表現論入門セミナー

具体例から最先端にむかって

平井 武・山下 博 共著

遊星社

はじめに

二人の夭折（ようせつ）の天才アーベルとガロアによって19世紀前葉（ぜんよう）に数学の世界に導入された「群」の概念は，徐々に成長・発達して現代数学の根幹の中に入り込んでいる．いまや，群そのものの研究は多岐にわたっているが，それは群の本質の半分であって，残りの半分は群が他の事物に「作用する」ことにある．その作用を標準的に取り出したものが「群の表現」である．本書は，群の表現の理論について，その初歩から現代の最先端まで通覧してみようとするものである．単なる解説書に終わらないためには，数多くの表現論のテーマのうちから慎重に具体例を選んで，それらを詳しく論じながら読者に一般論を体得してもらう以外にない．

はじめ本書執筆の依頼を受けたときには，むしろ解説書の性格に重きをおいたもので大学3回生以上を対象とするものであった．共著者二人で学会や研究集会の際に何回か相談を重ねて，ようやく執筆にとりかかるまでにすでに年を重ねていた．その後，多忙のせいもあってなかなか筆が進まなかったが，書き進んでいくうちに初心者に対する入門の部分を重視すると同時に，群やリー環の表現論を実際に使おうとする理科系の学生や研究者にも役立つものにするという方向にも重点をおき，それなりに分量も増えたのだが充実した入門書となったと自負している．

本書は，第I部 (平井担当) と第II部 (山下担当) に分けてあるが，相互に原稿を検討して意見を交換しあい，連携をはかってある．しかしながら，第II部は，第I部との関連を踏まえながらも，独立に読み始められるように書かれている．北海道大学での著者による講義や高校生向けの公開講座の内容も取り入れられており，初心者でもここから学習を始めることもできる．内容は主としてリー代数 (＝リー環) とその表現の理論であるが，一般論ではなく，具体的である．その後半の第10, 11章に至って，現代の表現論の最先端の話題に手が届いている．これだけの分量の中では何を捨て何を拾って述べていくかが重要であり，大いに工夫を要したところである．第II部の初め (p. 187) に序文があるので，著者 (山下) の意気込みについてはそちらを読んで頂くとして，ここでは第I部について説明する．

第I部の大きな特徴は，群の表現が物理学との関連で詳しく論じられている点にある．なぜ表現論と物理学が関わりが深いのかとの設問は，とくに第3章～第5章を読んで頂く際のポイントであろう．いまここでは，「ニュートン力学，量子力学，相対性理論などに内在する対称性は，それぞれ適当な群とその表現を用いて記述される」とだけ述べておこう．

まず，第1章は導入部として，初心者のためにできるだけ馴染みやすい日常生活と関連のあるところから群やその作用の例をとることから始めている．ついで，20世紀初頭におけ

る表現論の創始者フロベニウスやその高弟シュアによる有限群の表現論を概観する．時代としてはほぼ森鴎外や夏目漱石が活躍した時期に前後する．彼らの業績は人類の遺産としての「知的文化財」とも捉えられるが，それに直接触れる喜びをここで読者と共有できる．そして，ポピュラーな群として置換群をとり，それからつらなっている 置換群の表現群，組みひも群等の一連の系譜をたどってみた後，有限群の表現の理論にやさしいところから入っていく．

さらに，正多面体群などの有限群とともに回転群などの連続群が，結晶や原子・分子の対称性の群として自然に現れてくることを見る．また，情報理論との関連について，畏友 有本卓氏 (立命館大学理工) の論文に従って，初期の「誤りの訂正機構」について振り返ってみる．

第２章では，表現論の初歩的な一般論を述べている．第３章から第５章は，量子力学や相対性理論への応用に重点をおきながら，表現論を具体的な群をとって詳細に論じている．その詳しい内容は目次を見ていただきたいが，その重点をひとことずつでまとめてみると次のようになる．

第３章では，回転群 $SO(3)$ の表現とそのリー環 $\mathfrak{so}(3)$ の表現を，相互に関連づけながら調べ，シュレーディンガー方程式への応用を論じている．第４章では，パウリ方程式への応用を頭において，普遍被覆群 $SU(2)$ から $SO(3)$ への被覆写像を与え，そのリー環 $\mathfrak{su}(2)$ と関連させながらこれらの表現を調べている．第５章では，ニュートン力学とユークリッド運動群の関係から始めて，相対性理論とローレンツ群，そしてディラック方程式の不変性，などを論じ，物理学における要求からも，群の無限次元ユニタリ表現の理論の発生が 促 されたことを述べる．

他方，数学内部での発展としても数多くの方面があるのだが，第６章では，３次元ローレンツ群 $SO_0(2,1)$ の２重被覆群 $SL(2,\boldsymbol{R}) \cong SU(1,1)$ と複素上半平面の上の保型関数・保型形式の話題に限って，できるだけ平易に述べている．

前著『線形代数と群の表現』よりは内容の程度はやや高いが，１，２回生での数学の講義を踏まえれば読めるようになっており，セミナーのテキストとか講義の参考書としても用い得る．

本書第 I 部の内容に関して，いろいろの方々のお世話になったが，とくに行者明彦氏 (名古屋大学多元数理) のお知恵を拝借した．第 II 部については，お世話になった方々のお名前をのちにその序文に記して謝辞としたい．また，堀田良之氏 (岡山理科大学理) には原稿を読んでご意見などを書いて頂いた．深く感謝する．西原昌幸氏 (遊星社) には出版に関し大変お世話になった．謝意を表する．

2003 年 10 月　　著　者

目　　次

はじめに . . . iii

第 I 部　表現論入門

第 1 章　群とその作用 — 3

1.1　置換群とその作用 . . . 3

1.1.1　n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ とその構造 . . . 3

1.1.2　置換群が作用している例 . . . 6

1.2　有限群の指標と線形表現の理論の起こり . . . 10

1.2.1　「群」の誕生から「線形表現」の誕生へ . . . 10

1.2.2　フロベニウスの群指標および線形表現の理論 . . . 11

1.2.3　有限群の射影表現と表現群 . . . 12

1.2.4　n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現群 . . . 15

1.3　n 次対称群，n 次交代群および関連する群 . . . 16

1.3.1　$\mathfrak{S}_6$ の外部自己同型と表現群の同型 $\mathfrak{T}_6 \cong \mathfrak{T}'_6$ . . . 16

1.3.2　n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ とその表現群 . . . 18

1.3.3　組み糸群 $\mathfrak{Z}_n$ と対称群 $\mathfrak{S}_n$ . . . 20

1.4　正二面体・正多面体に作用する群とその表現 . . . 22

1.4.1　二面体群 . . . 22

1.4.2　二面体群の置換表現 . . . 23

1.4.3　二面体群の自然な線形表現，行列表現 . . . 23

1.4.4　群の行列表現，線形表現 . . . 24

1.4.5　多面体群とその置換表現 . . . 24

1.5　群の直積・半直積，多面体群の表現 (続) . . . 28

1.5.1　群の直積と半直積 . . . 28

1.5.2　正六面体，正八面体の場合 . . . 29

1.5.3　正十二面体，正二十面体の場合 . . . 30

1.5.4　多面体群の行列表現 . . . 31

1.6　原子・分子レベルでの対称性の群 . . . 32

1.6.1 水素原子の場合 32
1.6.2 等核2原子分子の場合 34
1.6.3 異核2原子分子の場合 34
1.7 群の作用 35
1.8 情報処理における誤りの訂正機構と群の役割 39
1.8.1 素数 p に対する巡回群 $\mathbb{Z}_p$ 39
1.8.2 p 元群符号系 39
1.8.3 復号化写像と誤り訂正 40
1.8.4 誤り訂正機構 41

第2章 群の作用と群の線形表現 ———— **44**
2.1 群の作用を関数への作用に上げる 44
2.2 群の線形表現 46
2.3 線形表現の例 48
2.4 シュアの補題 51
2.5 ユニタリ表現 52
2.5.1 ヒルベルト空間とその上の線形作用素 52
2.5.2 群のユニタリ表現 54

第3章 回転群の表現とその量子力学への応用 ———— **58**
3.1 古典力学から量子力学へ (量子化) 58
3.2 N 個の粒子の運動と対称性の群 60
3.3 N 粒子系の対称性の群とその表現 63
3.4 中心力が働いている系の場合 65
3.5 球面調和関数と回転群 $SO(3)$ の準正則表現 68
3.6 体球関数・球面調和関数と回転群の表現 70
3.6.1 体球関数・球面調和関数と回転群 70
3.6.2 $\mathbb{P}_\ell$ 上の表現と $V(\Delta_S,\nu_\ell)$ 上の表現 π_ℓ 74
3.7 群 $SO(3)$ に対するリー環 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathbb{P}_\ell$ における作用 75
3.7.1 リー環 $\mathfrak{so}(3)$ とその表現 75
3.7.2 完備性 (定理 3.5(ii)) および同型 $\mathbb{P}_\ell \cong V(\Delta_S,\nu_\ell)$ 80
3.8 水素原子の電子の軌道 81

第4章 $SO(3)$, $SU(2)$ およびそのリー環の表現 ———— **86**
4.1 パウリのスピン行列とパウリ方程式 86
4.2 特殊ユニタリ群 $SU(2)$ とそのリー環 $\mathfrak{su}(2)$ 88
4.2.1 $SU(2)$ と $\mathfrak{su}(2)$ 88

4.2.2　$\mathfrak{su}(2)$ から $SU(2)$ への指数写像 89
4.2.3　$SU(2)$ から $\mathfrak{su}(2)$ への対数写像 91
4.3　$SU(2)$ から $SO(3)$ への被覆写像と同型 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ 91
4.3.1　$SU(2)$ から $SO(3)$ への被覆写像 91
4.3.2　リー環の同型 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ 93
4.4　パウリ方程式に対する $SU(2)$ 共変性 94
4.5　群 $SU(2)$ の表現 T_ϖ とリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の表現 95
4.5.1　群 $SU(2)$ の表現 T_ϖ に随伴するリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の表現 95
4.5.2　リー環 $\mathfrak{g}$ の表現と普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の表現 97
4.5.3　相関作用素 $S = T_\varpi(a)$, $a = (X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2$ 97
4.6　群 $SU(2)$ の表現 $(T_\varpi, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ の既約分解 99
4.6.1　$\mathfrak{su}(2)$ の表現作用素 $T_\varpi(H), T_\varpi(Y_+), T_\varpi(Y_-)$. 99
4.6.2　同時固有空間 $V(S_1, \nu_\ell; S_2, \lambda)$ 99
4.6.3　$SU(2)$, $\mathfrak{su}(2)$ の表現 T_ϖ (T_ϖ^S) の既約分解 101
4.7　リー群の表現と対応するリー環の表現 (線形群の場合) 102
4.8　$SU(2)$, $SO(3)$ および $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ の既約表現の分類 105
4.9　既約表現の行列要素と特殊関数 108
4.10　表現の指標とその性質，既約指標 110
4.11　テンソル積表現とクレブシュ-ゴルダンの係数 111

第5章　有限次元表現から無限次元表現へ ―――― 114
5.1　ニュートンの運動方程式とユークリッド運動群 114
5.1.1　運動の 3 法則と慣性系 114
5.1.2　ガリレイの相対性およびユークリッド運動群 117
5.2　アインシュタインの特殊相対性理論とローレンツ群 119
5.2.1　電磁場と静止エーテル仮説 119
5.2.2　ローレンツ収縮とローレンツ変換 120
5.2.3　特殊相対性理論とローレンツ群 123
5.3　ローレンツ群とそのリー環の構造 124
5.3.1　相対性原理とローレンツ変換について 124
5.3.2　固有ローレンツ群の分解 127
5.3.3　ローレンツ群のリー環および指数写像について 128
5.3.4　純ローレンツ変換はローレンツ群を生成する 130
5.4　ローレンツ群，普遍被覆群 $SL(2,\mathbb{C})$，それらの表現 131
5.4.1　$SL(2,\mathbb{C})$ から $SO_0(3,1)$ への被覆写像 131
5.4.2　ローレンツ群，$SL(2,\mathbb{C})$ の有限次元表現：テンソルとスピノル ... 133

5.5 ディラック方程式とその相対論的共変性 136
5.5.1 クライン-ゴルドン方程式とディラック方程式 137
5.5.2 クライン-ゴルドン方程式の不変性 138
5.5.3 ディラック方程式の共変性 139
5.5.4 古典力学の角運動量と量子力学の軌道角運動量およびスピン 142
5.6 有限次元表現から無限次元表現への飛躍 144
5.6.1 物理系の対称性の群と無限次元表現への道 144
5.6.2 群の表現と物理法則の共変性についてのまとめ 145
5.7 無限次元ユニタリ表現と誘導表現 145
5.7.1 リー群の有限次元の表現の理論とその応用 145
5.7.2 非斉次ローレンツ群の既約ユニタリ表現の構成法の一般化 146
5.7.3 誘導表現の方法 147
5.7.4 非斉次ローレンツ群の既約ユニタリ表現 148
5.7.5 斉次ローレンツ群の既約ユニタリ表現 149

第 6 章 上半平面・単位円板での分数変換と保型関数・保型形式 —— 151

6.1 上半平面上の保型関数と保型形式 151
6.1.1 群 $G = SL(2, \mathbb{R})$ 内の断面と G の分解 152
6.1.2 離散部分群と保型関数，保型形式 153
6.2 $SL(2, \mathbb{R})$ のユニタリ表現と $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の表現 156
6.2.1 $G = SL(2, \mathbb{R})$ の $L_2(G)$ 上の正則表現 156
6.2.2 $G = SL(2, \mathbb{R})$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ とその作用 158
6.2.3 正則表現 $\big(R, L_2(G)\big)$ の解析 160
6.3 $SL(2, \mathbb{R})$ のユニタリ表現と保型関数，保型形式 163
6.3.1 $G = SL(2, \mathbb{R})$ の $L_2(\Gamma \backslash G)$ 上の表現 R_Γ 163
6.3.2 $C^\infty(\Gamma \backslash G)$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ の表現と $\big(R_\Gamma, L_2(\Gamma \backslash G)\big)$ の無限小形 164
6.3.3 表現 $\big(R_\Gamma, L_2(\Gamma \backslash G)\big)$ の K-型を決めたときの部分空間 164
6.4 単位円板上の分数変換と $SU(1, 1)$ の離散系列表現 168
6.5 群 $SL(2, \mathbb{R})$ の既約表現の構成 173
6.5.1 共役表現，普遍エルミート内積，ユニタリ化可能 173
6.5.2 誘導表現 $\pi_s, \pi_{\varepsilon,s}$ 173
6.5.3 表現 $\pi_s, \pi_{\varepsilon,s}$ の無限小形 175
6.5.4 誘導表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ の性質 176
6.6 正則離散系列表現の行列要素 179

引用文献 (第 I 部) 182

第II部　リー代数と表現論

はじめに.......187

第7章　行列とリー代数　190

7.1　線形空間と双1次形式.......190

7.1.1　シンプレクティック基底と直交基底.......190

7.1.2　ラグランジュ部分空間.......195

7.1.3　実シンプレクティック形式と非退化エルミート形式.......197

7.2　いろいろなリー代数.......200

7.2.1　リー代数の定義，基本的な諸概念.......200

7.2.2　古典リー代数.......204

7.2.3　単純リー代数.......206

7.2.4　可解リー代数と冪零リー代数.......208

7.3　ハイゼンベルグ代数とその拡大.......210

7.3.1　ハイゼンベルグ代数.......210

7.3.2　ワイル代数.......212

7.3.3　ハイゼンベルグ代数の拡大.......213

7.3.4　ハイゼンベルグ群.......215

7.3.5　余随伴軌道.......217

第8章　実単純リー代数　219

8.1　古典型実単純リー代数.......219

8.1.1　複素リー代数の実型.......219

8.1.2　コンパクト実型.......221

8.1.3　θ-安定な実型とそのカルタン分解.......223

8.2　エルミート型実型.......224

8.2.1　定義および実例 (AIII, CI, DIII, BDI).......224

8.2.2　分類定理.......234

8.2.3　不変複素構造と三角型分解.......234

第9章　リー代数の表現論 — 事始め　238

9.1　リー代数の表現.......238

9.1.1　表現という概念.......238

9.1.2　自然表現とそのテンソル積：シュア-ワイル理論.......240

9.2 無限次元表現に親しむ 242
9.2.1 例 I：ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の場合 242
9.2.2 例 II：$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(1,1)$ のハリシュ-チャンドラ加群の分類 243
9.3 シュアの補題とその応用 250
9.3.1 リー代数版 シュアの補題 250
9.3.2 応用 I：可換リー代数の場合 252
9.3.3 応用 II：ハイゼンベルグ代数の場合 252
9.3.4 応用 III：カシミール作用素と無限小指標 ($\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合) 253
9.4 定理 9.4 および 9.6 の証明 255
9.5 実リー代数のユニタリ表現 259
9.5.1 表現のユニタリ性 259
9.5.2 ユニタリ化可能なハリシュ-チャンドラ加群の決定 262

第 10 章 ハイゼンベルグ代数のフォック表現とその拡張 ―― 267

10.1 ハミルトン作用素と認容的表現 267
10.1.1 表現の認容性 267
10.1.2 認容的な既約ユニタリ表現の分類 269
10.2 フォック表現 272
10.2.1 ハイゼンベルグ代数のフォック表現 272
10.2.2 ハイゼンベルグ群のフォック表現 274
10.3 ヴェイユ表現―フォック表現の拡張 282
10.3.1 既約表現の拡張とその一意性 282
10.3.2 半直積 $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ の構造 283
10.3.3 拡張 $\tilde{\varpi}_s$ の構成 285

第 11 章 ヴェイユ表現とはしご表現 ―― 288

11.1 ヴェイユ表現の既約分解 288
11.1.1 表現 $\tilde{\varpi}$ の分解公式 289
11.1.2 ルートとウェイト 290
11.1.3 最低ウェイトベクトルの決定と分解公式の証明 292
11.2 ユニタリ リー代数 $\mathfrak{u}(p,q)$ への制限とはしご表現 294
11.2.1 部分リー代数部分 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ 295
11.2.2 相関作用素 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}})$ の固有空間分解 296
11.2.3 表現 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の分解公式とはしご表現 297
11.3 直交リー代数 $\mathfrak{o}^*(2n)$ への制限とはしご表現 300

11.3.1 部分リー代数 $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ 300
11.3.2 表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の作用素 302
11.3.3 消滅代数 $\mathcal{N}$ と最低ウェイトベクトル 304
11.3.4 表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の既約分解 306

参考文献 (第 II 部) 314

解　説 (堀田良之) 319

記号索引 (第 I 部) 321
記号索引 (第 II 部) 323
事項索引 326

装丁＝海保 透

●コラム
第 I 部
閑話休題 1 14
閑話休題 2 25
閑話休題 3 28
閑話休題 4 74
閑話休題 5 81
閑話休題 6 85
閑話休題 7 107
閑話休題 8 117
閑話休題 9 121
閑話休題 10 143
閑話休題 11 150

第 II 部
トピックス 1 (ディンキン図形) 207
トピックス 2 (べきという字) 209
トピックス 3 (実単純リー代数の分類) 220
トピックス 4 (デュアルペア) 232
トピックス 5 (最高ウェイト表現) 249
トピックス 6 (半単純リー群の表現論 (小史)) 265
トピックス 7 (ハイゼンベルグ代数と量子力学) 280
トピックス 8 (キリロフ軌道理論) 280
トピックス 9 (半単純リー群の表現と冪零軌道) 281
トピックス 10 (メタプレクティック群のヴェイユ表現) 287
トピックス 11 (数学書を読むときの心得) 305
トピックス 12 (ユニタリ最低ウェイト表現の研究) 313

第Ⅰ部　表現論入門

第1章 群とその作用

数学における群 (group) は，抽象的には，そこに 2 項演算である「積」が定義されていて，結合律が満たされ，‘割り算’が自由自在に行えるというもの，である (群の定義は **1.5** 節)．しかし，群の本質は他の対象に作用することにある．したがって，群は，その構造とともにその「作用」をも一体として取り扱われることを希望している．

群の作用を標準化したものが，群の表現であり，そのうちでさらに取り扱いやすくしたものが，群の線形表現である．

以上の文章は，一種のスローガンのように見えるであろうから，この章と次章において，やや詳しく具体的に説明していこう．まず，本章では，身近な置換群から始めて，具体的な群や群の作用を豊富な例によって体得する．群の抽象的な定義なども **1.5** 節で 復習するが，群の一般論には立ち入らない．

1.1 置換群とその作用

1.1.1 n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ とその構造

n 個の数字の集合 $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ の上の置換の全体は群(ぐん)をなすが，それを $\mathfrak{S}_n$ と書き n **次対称群**とよぶ．そこでの積は次のように定義される．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が，I_n 上の置換として，$I_n \ni j \mapsto \sigma(j) \in I_n$ として与えられていると，σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と表される．そして，$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ の積 $\sigma\tau$ は，$j \xrightarrow{\tau} \tau(j) = k \xrightarrow{\sigma} \sigma(k) = \sigma(\tau(j)) =: (\sigma\tau)(j)$ $(j \in I_n)$, として置換の重ね合わせとして定義される．これを図式で表すと,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ (\sigma\tau)(1) & (\sigma\tau)(2) & \cdots & (\sigma\tau)(n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

置換 σ の**台**を $\mathrm{supp}(\sigma) := \{\, i \in I_n \,;\, \sigma(i) \neq i \,\}$ とおく．2つの置換 σ, τ について，$\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \emptyset$ となるとき，σ, τ は**互いに素**(そ)である，という．このとき，σ, τ は互いに可換である．

置換 σ は (1.1) のような表し方のほかに，互いに素な巡回置換の積としても一意的に表せる．実際，まず，どれかの $i_1 \in I_n$ から出発して，$i_1 \xrightarrow{\sigma} \sigma(i_1) = i_2 \xrightarrow{\sigma} \sigma(i_2) = i_3 \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} \sigma(i_{k-1}) = i_k \xrightarrow{\sigma} \sigma(i_k) = i_1$ と σ で移していって k 回目に初めて出発点の i_1 にもどったとすると，この置換を $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ と書いて**長さ** k の**巡回置換**とよぶ．これを κ_1 と書き，$I_n \setminus \mathrm{supp}(\kappa_1)$ の元 j_1 を σ で移していくと別の巡回置換 $\kappa_2 = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_{k'})$ を得る．かくて，置換 σ に対して，何個かの巡回置換 $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\ell$ が得られて，

$$\sigma = \kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_\ell \quad (\text{巡回置換の積}) \tag{1.3}$$

と表される．このとき長さ 1 の巡回置換は**恒等置換 1** (どの $j \in I_n$ も動かさない置換) と等しいから，この表示からははずしておく．表示式での積の順序は自由であるが，巡回置換の集合 $\{\, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\ell \,\}$ は一意的に決まる．

例 1.1.　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

とする．これらを互いに素な巡回置換の積に書けば，

$$\sigma = (1\ \ 3\ \ 2)\,(4\ \ 5\ \ 6), \qquad \tau = (1\ \ 4\ \ 6)\,(2\ \ 5)\,(3) = (1\ \ 4\ \ 6)\,(2\ \ 5).$$

さらに，この巡回置換による表示を使って，σ の逆元 σ^{-1}，および，積 $\sigma\tau$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &= (2\ \ 3\ \ 1)\,(6\ \ 5\ \ 4) = (1\ \ 2\ \ 3)\,(4\ \ 6\ \ 5), \\ \sigma\tau &= (1\ \ 5)\,(2\ \ 6\ \ 3)\,(4) = (1\ \ 5)\,(2\ \ 6\ \ 3). \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで，積 (1.4) の計算は，変換公式　$i \xrightarrow{\tau} \tau(i) \xrightarrow{\sigma} \sigma(\tau(i))$　を忠実に当てはめていけばよい．すると，

$$\begin{aligned} &1 \xrightarrow{\tau} 4 \xrightarrow{\sigma} 5, \quad 5 \xrightarrow{\tau} 2 \xrightarrow{\sigma} 1; \\ &2 \xrightarrow{\tau} 5 \xrightarrow{\sigma} 6, \quad 6 \xrightarrow{\tau} 1 \xrightarrow{\sigma} 3, \quad 3 \xrightarrow{\tau} 3 \xrightarrow{\sigma} 2; \\ &4 \xrightarrow{\tau} 6 \xrightarrow{\sigma} 4. \end{aligned}$$

(例 1.1 終わり)

2個の数字 i, j の入れ替え $(i\ \ j)$ を**互換**とよぶ．すると，巡回置換は次のように互換の積に書ける (積の形は一意的とは限らない)：

$$\begin{aligned} (i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_k) &= (i_1\ \ i_2)(i_2\ \ i_3)\cdots(i_{k-1}\ \ i_k) \\ &= (i_{k-1}\ \ i_k)(i_{k-2}\ \ i_k)\cdots(i_1\ \ i_k). \end{aligned} \tag{1.5}$$

ゆえに,「任意の置換 σ は何個かの互換の積になっている」. **置換の符号** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は, σ が m 個の互換の積になっているとき, $\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^m$ と決める. よって,

$$\text{巡回置換}\ \ \sigma = (i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_k)\ \ \text{に対して,}\ \ \mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^{k-1}. \tag{1.6}$$

置換 σ は $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1, -1$ に従って, **偶置換**, **奇置換**とよばれる. $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$ であるから, $\mathfrak{S}_n$ の偶置換の全体 $\mathfrak{A}_n$ は部分群をなし, n **次交代群**とよばれる.

互換のうち, $s_1 = (1\ \ 2)$, $s_2 = (2\ \ 3)$, ..., $s_{n-1} = (n-1\ \ n)$ を**単純置換**とよぶ. すると,「すべての置換はこれら $(n-1)$ 個の単純置換の積で表される」. 実際, 任意の互換 $(i\ \ j), i < j$, を単純置換の積に書くと, 例えば,

$$(i\ \ j) = (s_i s_{i+1} \cdots s_{j-2}) s_{j-1} (s_{j-2} s_{j-3} \cdots s_{i+1} s_i)\quad \text{(単純置換の積)}. \tag{1.7}$$

したがって, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の**生成元系**として, $S = \{\, s_i = (i\ \ i+1)\ ;\ 1 \le i \le n-1 \,\}$ がとれる. この生成元系に対する**基本関係式** (解説 1.1 参照) は見やすくかつ面白いものなので, (ウォーミングアップの意味で) ゆっくりと次の定理を証明してみよう.

定理 1.1. n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の生成元系 $S = \{\, s_i = (i\ \ i+1)\ ;\ 1 \le i \le n-1 \,\}$ は, 次の基本関係式をもつ:

$$s_i^{\,2} = \mathbf{1}, \qquad s_i s_j = s_j s_i\ \ (|i-j| \ge 2), \tag{1.8}$$

$$s_i s_{i+1} s_i \ \ = \ \ s_{i+1} s_i s_{i+1}\ \ (1 \le i \le n-2). \tag{1.9}$$

解説 1.1. (1.8)−(1.9) 式が n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の生成元系 $\{\, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \,\}$ に対する基本関係式であるとは, 何を意味するかを説明しよう. まず, 文字 $\{\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \,\}$ から生成される (非可換) 自由群 $\mathfrak{F}_n$ を考える. $\mathfrak{F}_n$ は, 語(ご) (word) とよばれる

$$t_{i_1}^{m_1} t_{i_2}^{m_2} \cdots t_{i_N}^{m_N} \quad (m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{Z};\ i_k \ne i_{k+1})$$

の形の元全体であり, そこに, 自然な積演算を入れる. この $\mathfrak{F}_n$ の部分群で, (1.8)−(1.9) の関係式からでてくる元,

$$t_i^{\,2}\ \ (\Leftarrow\ s_i^{\,2} = \mathbf{1}), \qquad t_i t_j t_i^{-1} t_j^{-1}\ \ (\Leftarrow\ s_i s_j (s_j s_i)^{-1} = \mathbf{1}),$$

$$t_i t_{i+1} t_i t_{i+1}^{-1} t_i^{-1} t_{i+1}^{-1}\ \ (\Leftarrow\ s_i s_{i+1} s_i (s_{i+1} s_i s_{i+1})^{-1} = \mathbf{1}),$$

の全体から生成されるものをとり, それを含む最小の正規部分群を $\mathfrak{N}_n$ とする. 群 $\mathfrak{S}_n$ では関係式 (1.8)−(1.9) が成り立っているので, 群準同型 $\Phi : \mathfrak{F}_n \ni t_i \to s_i \in \mathfrak{S}_n$ から準同型 $\Phi' : \mathfrak{F}_n/\mathfrak{N}_n \to \mathfrak{S}_n$ が得られる. 関係式 (1.8)−(1.9) が**基本関係式**であるとは, この準同型 Φ' が実は同型である, ことを意味する.

定理 1.1 の証明. n に関する数学的帰納法による. $G_n := \mathfrak{F}_n/\mathfrak{N}_n$ とおき, $G = G_n$ の部分群 $H = G_{n-1}$ による左剰余類 $Hg \in H\backslash G$ の代表元を選ぶ. 代表元 g を $g = t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_\ell}$ と書いたとき, 語としての長さ ℓ が最短のものを選ぶ. すると, まず, $i_k \neq i_{k+1}$ である.

(1) $i_1 < n-1$ ならば, $t_{i_1} \in H$ なので, $Hg = Hg', g' = t_{i_2}\cdots t_{i_\ell}$, となり, 語としての長さが短くて済む. そこで, $Hg \neq H$ に対しては, $i_1 = n-1$ である.

(2) $i_2 < n-2$ だと, 可換性から, $t_{i_1}t_{i_2} = t_{i_2}t_{i_1}$ となり, $t_{i_2} \in H$ により, t_{i_2} を取り除いた短い語で置き換え得る. よって, $i_2 = n-2$ である.

(3) $i_1 = n-1$, $i_2 = n-2$, ..., $i_k = n-k$, まで分かったとする. $p := i_{k+1} \neq i_k$ だから, $p > i_k$ としてみると,

$$t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_{k+1}} = t_{n-1}t_{n-2}\cdots t_{n-k}t_p \tag{1.10}$$

の中に (可換性を使って右端の t_p を左に送って) $t_pt_{p-1}t_p$ ができる. これを, $t_pt_{p-1}t_p = t_{p-1}t_pt_{p-1}$ によって置き換えれば, 現れた左の t_{p-1} は可換性によって, 語の最左端に送られる. そしてそれは H に吸収されるので, より短い語で済む.

(4) そこで, $p < i_k - 1$ の場合を考えると, 可換性によって, 語 (1.10) の右端の t_p は最左端に送られて, H に吸収される.

以上によって, 剰余類の集合 $H\backslash G$ の完全代表系を, 集合

$$g_0 := \mathbf{1}, \quad g_\ell := t_{n-1}t_{n-2}\cdots t_{n-\ell} \ (1 \leq \ell \leq n-1),$$

から選ぶことができる.

よって, 群の位数について, $|G| \leq n \times |H|$ を得る. 帰納法によって, $|G_n| \leq n! = |\mathfrak{S}_n|$. したがって, 上の準同型 $\Phi' : G_n \to \mathfrak{S}_n$ は同型でなければならない. □

問題 1.1. 上であげた集合 $\{g_\ell\,;\, 0 \leq \ell \leq n-1\}$ は実際に剰余類の完全代表系になっていることを示せ. また, それらを Φ' によって, $\mathfrak{S}_{n-1}\backslash\mathfrak{S}_n$ の代表系に写すと, 次の巡回置換の集合になることを示せ:

$$\mathbf{1},\ (n\ n{-}1),\ (n\ n{-}1\ n{-}2),\ \ldots,\ (n\ n{-}1\ \ldots\ 2),\ (n\ n{-}1\ \ldots\ 2\ 1). \tag{1.11}$$

1.1.2 置換群が作用している例

置換のなす群, とくに対称群は非常に重要でいろんなところに顔を出す. ここでは, 置換群が働いている卑近な例を考えてみよう.

例 1.2 (手品). 昔は祭礼の露天で, 詰将棋とならんでよく見かけたのだが, 並べた3個のマッチ箱のうちの1個にコインを入れておき, 客の面前で2個ずつ入れ替えてコインの入った箱を当てさせる賭けがあった. 今は手品で (マッチ箱が小さくなりすぎたからか) コップを用いてやっている. これは3次対称群 $\mathfrak{S}_3$ が働いている場合である.

群 $\mathfrak{S}_3$ の働き方を記述するには，コップの置く場所に，1, 2, 3, ... と番号を打ち，番号 i の場所にあったものが番号 $\sigma(i)$ の所に移されるということで置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を決める．すると，置換 τ, τ' をこの順番に繰り返した結果は，置換の積 $\sigma = \tau'\tau$ に従ってコップが動かされている．

手品師に幻惑されるひとつの原因は，関係式 (1.9) が示すように，結果として同じ置換を得るのにいろいろのやり方があるからである．それは，この場合では $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2 = (1\ \ 3)$ である．互換の積を素早く暗算できれば，手品師に勝てるかも知れない．

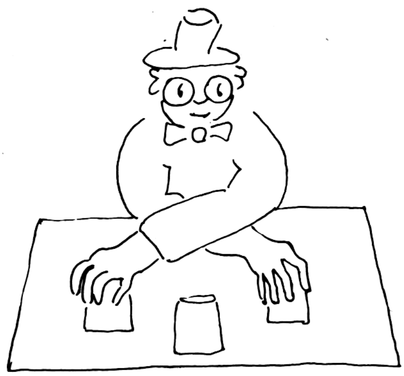


図 1.1. 手品：3 個のコップの置き換え

例 1.3 (あみだくじ). あみだくじは，籤(くじ)を引く順番によらない結果が得られて公平なのでよく使われる．そのやり方は，人数分 (n 人とする) の縦線を引いてさらに横線で適当に隣同士の縦線をつないだものである．縦線を下に向かってたどるうちに横線に来ればそれを渡って隣の縦線に移るという規則である．子供たちはこのように線をたどっていってその行き先を見るのに少々のスリルを味わう．

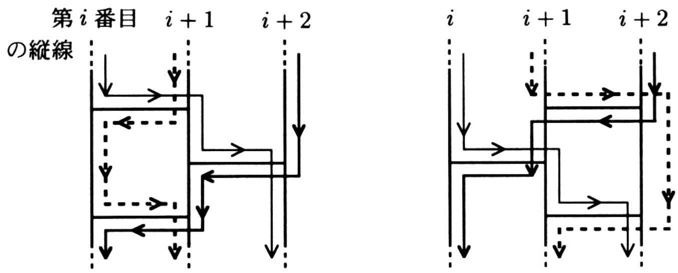
この籤の仕掛けを，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用を用いて説明してみよう．縦線の上部の出発点と下部の到達点にそれぞれ左から $1, 2, \ldots, n$, と番号をふっておく． 1 つのあみだくじは，番号 j から出発して番号 $\sigma(j)$ に到達する $(1 \le j \le n)$ ということで，$\mathfrak{S}_n$ の 1 つの元 σ を与える．

この σ を籤の形から計算してみよう．第 i 番目と第 $i+1$ 番目の縦線の間に横線を引くと，その効果として単純置換 $s_i = (i\ \ i+1)$ が生ずる．したがって，横線を上から順番に，

$$i_1 \text{ と } i_1+1\,;\quad i_2 \text{ と } i_2+1\,;\quad \ldots\,;\quad i_m \text{ と } i_m+1; \tag{1.12}$$

の縦線を橋渡しているとすると，$\sigma = s_{i_m}\cdots s_{i_2}s_{i_1}$ となる．これから，「勝手な置換 σ を生じさせるあみだくじが作れる」ことが分かる．

他方， 1 つの置換 σ に対し，それを与えるあみだくじは 1 種類とは限らない．その事情を表しているのが，s_i の間の基本関係式である．例えば，関係式 (1.9) は，次の図に示す 2 つのあみだくじが同等である (同じ結果を与える) ことを述べている．



$s_i s_{i+1} s_i = (i\ i{+}2)$ $s_{i+1} s_i s_{i+1} = (i\ i{+}2)$

図 1.2. 形は違うが同等なあみだくじ ($s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ による)

問題 1.2. 関係式 (1.8) を図 1.2 のように図示せよ.

例 1.4 (方陣のゲーム). 正方形の升目(ます)を縦，横ともに n 個ずつ並べた方陣を考える．全体の升目は n^2 個あるが，1個だけを空白にして残りに $1, 2, \ldots, N := n^2 - 1$, と数字を入れたものを考える．ゲームとしては「これらの升目を空白を利用してずらしながら所定の形に直していく」ことである (行者明彦氏のご教示による).

ゲームでの結果：2種類の最終の形がある．それは置換の偶奇によって説明できる．(ルービックキューブは3次元的なゲームであり，置換群との関係はこの場合より複雑である.)

上の結果を証明するにはうまく状況を整理する必要がある．群を取り扱うことに慣れるために少々詳しく証明してみよう.

証明：まず，n^2 個の升目の順番を決めてそれらに番号を振る．順番は，左上隅から出発して右に水平に進み，端に来ると1段下に下りて左に水平に進む．端に来ると1段下に下りて水平に右に進む．これを繰り返すと，n の偶奇によって，最終の升目が左下隅か右下隅になる.

1	2	3
6	5	4
7	8	∞

$\longrightarrow\ \longrightarrow$
$\longleftarrow\ \longleftarrow$
$\longrightarrow\ \longrightarrow$

$(n = 3)$

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
∞	15	14	13

$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$
$\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$
$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$
$\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$

$(n = 4)$

図 1.3. 升目の順番 ($n = 3, 4$ の場合)

さて，n^2 個の升目にこれらの数字と空白 (∞ で表す) を入れたものを**配位**とよび，空白の位置が最終升目に来ているものを**標準配位**とよぶ．ある配位 A での空白を，上で決めた升目

の順番に従って順送りに動かして最終升目までもって来たものを A の**標準形**といい，$\mathrm{St}(A)$ と書く．標準配位 $\mathrm{St}(A)$ は，i 番目の升目に数字 $\sigma(i)$ が来ている $(1 \leq i \leq N)$ ということで，N 次対称群 $\mathfrak{S}_N$ の元 σ が 1 対 1 に対応する．$n=3$ のときの，下の図 1.4 を参照せよ．

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 6 & \infty & 4 \\ \hline 8 & 2 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \mathrm{St}(A) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 8 & 6 & 4 \\ \hline 2 & 7 & \infty \\ \hline \end{array} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

図 1.4. 配位の標準形と対応する置換

ここまで準備しておいて，このゲームで可能な「操作」を調べてみよう．ある配位 A において，空白 ∞ が k 番目の升目に位置していたとする．(イ) ∞ と左または右にある数字と入れ替える，または，(ロ) ∞ と上または下にある数字と入れ替える，ことによって新たな配位 A' を得る．このとき，その標準形 $\mathrm{St}(A')$ は A の標準形 $\mathrm{St}(A)$ とどう違うだろうか？

操作 (イ) の場合は，$\mathrm{St}(A') = \mathrm{St}(A)$ である．操作 (ロ) の場合は，空白 ∞ をすぐ上の数字と入れ替えたとすると，その数字は升目の順番を偶数個 ($2m$ 個，0 個もある) 後ろに飛び移る．すぐ下の数字と入れ替えると升目の順番を偶数個飛び越える．これは長さ $2m+1$ の巡回置換

$$\begin{aligned} \tau &= (k-2m-1, k-2m, \ldots, k-2, k-1), \\ \text{または，}\quad \tau &= (k+2m, k+2m-1, \ldots, k+1, k), \end{aligned}$$

を標準形 $\mathrm{St}(A)$ に対応する置換 σ に作用させることになる．そのとき，標準形 $\mathrm{St}(A')$ に対応する置換は $\sigma\tau$ である．実際，A, A' の空白 ∞ を，決められた方法で最終位置まで動かすときには数字の順番の入れ替えがないので，$\mathrm{St}(A)$ では i 番目の升目には $\sigma(i)$ があり，それが $\sigma(\tau(i))$ に置き換わったものが $\mathrm{St}(A')$ である．ここで，$\mathrm{sgn}(\tau)=1$ に注意すると，標準形配位に対応する置換は，偶置換でしか変わらないことが示された．

他方，対称群 $\mathfrak{S}_N$ の正規部分群である交代群 $\mathfrak{A}_N = \{\sigma \in \mathfrak{S}_N\,;\,\mathrm{sgn}(\sigma)=1\}$ による剰余類 $\mathfrak{S}_N/\mathfrak{A}_N$ は位数 2，その代表元系として例えば $\{\mathbf{1}, s_1 = (1\ 2)\}$ がとれる．したがって，この方陣の最終形は，標準形で対応する置換が $\mathbf{1}, s_1$ であるもの 2 つであろうと推測できる．

実際にこれがその通りであることを示すには，交代群 $\mathfrak{A}_N$ を生成するような偶置換の系が空白 ∞ を使って実現できることを示さねばならない．ここでは，上の τ として長さ 3 の巡回置換 $(1\ 2\ 3)$ が実現できることを図示するにとどめ，残りは，長くなるので，問題として提出しておこう．

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \infty & 5 & 4 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{左回り}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 5 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{小回り}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & \infty & 4 \\ \hline 2 & 1 & 5 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{上下}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & \infty & 5 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{右回り}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \infty & 5 & 4 \\ \hline \end{array}$$

図 1.5. 巡回置換 $(1\ 2\ 3)$ の実現 $(n=3)$

問題 1.3. 交代群 $\mathfrak{A}_N$ の生成元系として，長さ 3 の巡回置換の集合 $\mathcal{J} := \{(i\ j\ k)\ ;\ i,j,k$ はすべて相異なる$\}$ がとれることを示せ．

問題 1.4. 生成元系 $\mathcal{J}$ の部分集合 $\mathcal{J}'$ で相変わらず $\mathfrak{A}_N$ の生成元系となっているものとして，$\mathcal{J}' = \{\tau_i\ ;\ 1 \le i \le n-2\}$, $\tau_i := (i\ i{+}1\ i{+}2)$, がとれることを示せ．

1.2 有限群の指標と線形表現の理論の起こり

1.2.1 「群」の誕生から「線形表現」の誕生へ

本書全体への導入部として，少し先走って（あとでしっかり定義される）専門的な述語も使いながら，この小節と次の小節で,「群」の誕生から，フロベニウス (F.G. Frobenius, 1849–1917) による「有限群の線形表現とその指標」の世界初(せかいはつ)の研究を一覧しておこう．

まず,「群」の概念がはっきりと数学の中に登場してきたのは，1820 年代で，アーベル (N.H. Abel, 1902–29) とガロア (É. Galois, 1811–32) による代数方程式の代数的解法に関する研究が初めである．体 $\mathbb{K}$ 上の代数方程式とは，

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_i \in \mathbb{K}, a_n \neq 0)$$

の形の方程式である．その代数的解法とは，係数 $\{a_i\}$ を用いて，四則および q 乗根 (q は自然数) をとる (冪根(べきこん)をとる) 操作 $\sqrt[q]{a}$ によって，n 個の根 (重根を含む) を求める解法，である．$n = 2,3,4$ のときには，根の公式が与えられて，どの方程式も代数的に解ける．

アーベルが示したのは,「5 次方程式では，代数的に解けないのが一般的である」ということである．ガロアはさらに $n \ge 5$ のときに，この問題を解く鍵(かぎ)として，与えられた方程式の n 個の根の置換のうちどれが“許される”置換なのかを決めて，いわゆる「方程式のガロア群」を作り，それが可解群であることが，代数的解法が可能であるための必要十分条件であることを見通し，それを示唆した遺書や書き物を残したのである．ここに初めて群 (ここでは置換のなす群) が根本的に重要な役割を果たすべく登場してきたのである．$n \ge 5$ のときに「一般に n 次方程式は代数的には解けない」という命題は，n 個の根を自由に置換する群である n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が可解でない，ということを意味する．

ガロアの死後，約 40 年を経て，彼のアイディアはジョルダン (C. Jordan, 1838–1922) によって厳密に証明された．

その後，クライン (F. Klein, 1849–1925) は，幾何学における変換群の役割を研究し，リー (M.S. Lie, 1842–99) は連続群，とくにいわゆるリー群を研究した．1897 年には，バーンサイド (W. Burnside, 1852–1927) の名著『有限群の理論』の初版が出た．この本では，群は「同じ事物もしくは事物の集合への作用」の集まり (a set of operations, which can be performed on the same object or set of objects) であって，結合律などの公理を満たすもの，として定義されている．例えば，$\mathfrak{S}_n$ は，$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ への作用 (置換) の集まり，として捉え

ている．すなわち,「何かに作用する」ことをもって，群の本質としている．そして，当時は，群の元はすべて大文字で書かれている．

現代においては，群は抽象化された形で定義され，群の元は (記号のデノミが行われて) 小文字で書かれるのが普通となった．そして我々は，抽象的な群の具体的事物に対する「群の作用」を考えることになる．この意味で，

「群」＝「群の代数的・幾何学的構造」＋「群の作用」

と考えるべきである．群の作用の特別のものを「群の表現」という．有限群 G の**置換表現**とは，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の中への準同型 $\varpi : G \ni g \mapsto \varpi(g) \in \mathfrak{S}_n$ のことである．(字母 ϖ は π の変わり形であり，変形パイと読む.) また，**線形表現**とは，あるベクトル空間 W の上の可逆な線形写像のなす群の中への準同型である．$W = \mathbb{C}^d$ のときには，線形写像は標準基底に関して，d 次正方行列で表されるので，線形表現は準同型 $\pi : G \ni g \mapsto \pi(g) \in GL(d, \mathbb{C})$ である．ここに，$GL(d, \mathbb{C})$ は d 次の正則な正方行列のなす群で，**一般線形群**とよばれる．これらの「群の表現」は，

(1) 群 G の方に重点をおいて考えれば，G の構造や性質を解明しようとするものであり，

(2) 群が作用する事物 (object) の方に重点をおいて考えれば，G を用いて，その事物の対称性とか構造とかを解明しようとするものである．

今後この本では，これらが抽象的なスローガンではなくて，実際に実現されている具体的な事例を取り上げながら，読者に納得してもらおうと目論んでいる．(1) と (2) はそんなに画然(かくぜん)と分けられるものではないので，その辺の機微を次のような実例によって読みとってもらいたい．すなわち，ある結晶に対する結晶群，ニュートン力学に対するユークリッド運動群の役割，量子力学におけるシュレーディンガー方程式の対称性の群としての回転群 $SO(3)$ の作用, パウリ方程式に対する $SU(2)$ の作用, ディラック方程式に対する $SL(2, \mathbb{C})$ の作用,複素上半平面に働く $SL(2, \mathbb{R})$ の作用，など．本書ではこれらを詳しく取り扱う．

1.2.2 フロベニウスの群指標および線形表現の理論

さて，バーンサイドと同時代を生きたフロベニウスの研究であるが，彼の全集 (全 3 巻) を見ると，群の代数的な研究が多くあり，第 3 巻目に至って，有限群の「指標」と「線形表現」の研究が始まる．全集のリスト番号付きで論文を引用すると，

53. Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Köziglich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin [雑誌名], 985–1021 [頁数] (1896 [発行年]).

56. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, ibid.(同誌), 944–1015(1897).

が，それぞれ**指標** (Charaktere, 独語) と**表現** (Darstellung, 独語) とを世界で初めて取り扱ったものである．現代では「線形表現」は linear representation(英語) といわれるが，このタ

イトルでは直訳すれば,「線形代入による表現」と書かれている.群 G の元 g に線形変換 $\varpi(g)$ を代入している,の意味であろう.関係式

$$\varpi(gh) = \varpi(g)\varpi(h) \quad (g, h \in G) \tag{1.13}$$

を認めるのであるから,本質的には同じことであるが,少しニュアンスの違いが受け止め方の違いとして感ぜられる.これらの研究の契機となったのは,**53** の前書きにも書いてあるが,デデキント (R. Dedekind, 1831–1916) が彼に出した問題だった.

これから 10 年後の 1906 年までに,シュアとの共著 2 編 (**75, 76**(1906)) を込めて,都合 13 編の指標と線形表現を主題とする論文を書いた.それによって,この主題に関する一般論の主たる部分を完成し,対称群と交代群に対する既約表現の分類理論も与えた.

ここでは,本書のはじまりの部分でもあり,これ以上深入りはしない.ただ,Charaktere という術語は,ガウスが『数論』の中で,特別な可換群の 1 次元表現に対して命名した,とのことであるが,線形表現 ϖ の指標

$$\chi_\varpi(g) := \mathrm{tr}(\varpi(g)) = \text{行列 } \varpi(g) \text{ の対角要素の和} \quad (g \in G) \tag{1.14}$$

の意味に使ったのはフロベニウスが最初であり,また,表現 Darstellung の命名の誉(ほま)れも彼のものである.なお,正方行列 A の**トレース** (trace) とは A の対角要素の和であり,$\mathrm{tr}(A)$ と書く.

1.2.3 有限群の射影表現と表現群

シュア (J. Schur = I. Schur, 1875–1941) は,師フロベニウスの線形表現の理論を受けて,有限群の**射影表現**の理論を研究した.彼の論文を全集 (全 3 巻) の論文番号 (数字) を付けて引用すると,

[S4] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Journal für die reine und angewante Mathematik, **127** [巻] (1904 [発表年]), 20–50 [頁数].

[S10] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **132**(1907), 85–137.

[S16] J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **139**(1911), 155–255.

が,三部作であり,足掛け 8 年の労作である.

このタイトルにある gebrochene lineare Substitutionen は現代の用語とは違っているが,その意味は「分数変換の代入」ということである.線形変換 (したがって行列) を $g \in G$ に代入していたのを,分数変換で置き換えてみて何が新しく出てくるかを研究したのである.ここで,**分数変換**とは,$x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})$ (縦ベクトル x をスペースの節約のために転置

して書いている) を $x' = {}^t(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m-1})$ に写す次の形の変換である：

$$x'_i = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,m-1}x_{m-1} + a_{im}}{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m,m-1}x_{m-1} + a_{mm}} \quad (1 \le i \le m-1). \tag{1.15}$$

これにも m 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ が対応するので，上の右辺を $P_A(x)$ と書くことにする．分母，分子に同じ $\lambda \neq 0$ を掛けても上式の右辺は変わらないので，λA もこの分数変換に対応する，すなわち，$P_A = P_{\lambda A}$．また，別の m 次正方行列 $B = (b_{ij})$ に対する P_B との積 (繰り返し) $P_A \cdot P_B$ をとると，行列の積 AB による分数変換 P_{AB} となる．すると，P_A の逆変換 P_A^{-1} は，A が正則なときに存在して，$P_{A^{-1}}$ になる．したがって，

$$P_A \cdot P_B = P_{AB}, \quad P_A^{-1} = P_{A^{-1}} \qquad (A, B \in GL(m, \mathbb{C})). \tag{1.16}$$

読者が，分数変換 (1.15) を見て，分母が 0 になるところはどうするのか，と疑問をもたれるのは自然である．ここのところは，$(m-2)$ 次元分の無限遠点を付け加えて，いわゆる $(m-1)$ 次元の複素射影空間を導入してうまく辻褄(つじつま)を合わせるのであるが，ここでは詳しい話を避けても大丈夫なので，射影空間と射影変換の厳密な話は文献 [平井 II] に譲る．実質上の話をすると，有限群 G の射影表現 Π (ギリシア大文字パイ) とは，$g \in G$ に正則な m 次正方行列 $\Pi(g)$ を対応させて，

$$\Pi(g)\Pi(h) = r_{g,h}\Pi(gh) \quad (g, h \in G, r_{g,h} \in \mathbb{C}^\times) \tag{1.17}$$

を満たすようにしたものである．ここで，スカラー $r_{g,h} \neq 0$ がつねに 1，すなわち，$r_{g,h} \equiv 1$，となっていれば，それは，G の線形表現である．ここに，$\mathbb{C}^\times := \{a \in \mathbb{C}; a \neq 0\}$．

上の関係式 (1.17) を言い直してみよう．一般線形群 $GL(m, \mathbb{C})$ を，その中心であるスカラー行列の全体 $\{\lambda 1_m ; \lambda \in \mathbb{C}^\times\} \cong \mathbb{C}^\times$ で割った群を**射影線形群** $PGL(m, \mathbb{C})$ とよぶ：$PGL(m, \mathbb{C}) := GL(m, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$．ここに，$1_m$ は m 次単位行列を表す．すると，射影表現 Π とは，「群 G から $PGL(m, \mathbb{C})$ への準同型」である，と言える．

さて，シュアが提起した問題は何かというと，「任意の射影表現をスカラー倍で修正して，線形表現に直せるか？」ということである．すなわち，$\Pi(g)$ を $\lambda_g \Pi(g)$ $(\lambda_g \neq 0)$ で置き換えてもよいとする．彼の主たる結果を列挙すれば，

(1) 有限群 G の適当な中心拡大 $\widetilde{G}$ をとれば，G の任意の射影表現が $\widetilde{G}$ の線形表現になる．ここに，$\widetilde{G}$ が G の**中心拡大**であるとは，$\widetilde{G}$ から G の上への準同型 ϕ があって，$Z = \mathrm{Ker}(\phi)$ は $\widetilde{G}$ の中心に入る，したがって，$\widetilde{G}/Z \cong G$ であり，次の群準同型の図式は完全列である：

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \widetilde{G} \xrightarrow{\ \phi\ } G \longrightarrow 1 \quad (\text{完全}). \tag{1.18}$$

(2) 上の「中心拡大」$\widetilde{G}$ のうち，最も‘効率的’なものは，同型でないものが有限個ある．それらはみな有限群であって，G の**表現群**とよばれる．

(3) 表現群の作り方，および，具体例を与えた．

(4) とくに，[S16] において，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$，交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現群を構成して，それらの既約表現を分類し (したがって，$\mathfrak{S}_n$，$\mathfrak{A}_n$ の既約な射影表現をすべて分類し)，それらの指標を原理的には決定した．既約な射影表現の指標の完全な表は，$\mathfrak{A}_6, \mathfrak{A}_7$ の表現群 (これらは例外的な重要な場合である) について与えられている．

かくて，シュアの上記の三部作は，フロベニウスの群指標，線形表現の理論や，$\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$ に対する具体的な結果を踏まえての，射影表現に関する集大成である．

◆閑話休題 1 ◆

フロベニウス (1849–1917) の群の指標や線形表現の仕事は，全集第3巻にまとまっており，**53** (1896), **56** (1897) から **75, 76** (1906) にわたっているが，今から約1世紀前である．

他方，シュア (1875–1941) の全集第1巻最初の論文

[S1] J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

は，彼の学位論文で，少部数が印刷配布されただけだったとのことであるが，フルウィッツ (A. Hurwitz, 1859–1919) の不変式論から示唆されて，

「群 $G_k = GL(k,\mathbb{C})$ 上の関数 f で，条件 (1) $f(AB) = f(BA)$，すなわち，$f(A) = f(BAB^{-1})$ $(A, B \in G_k)$，および，(2) $f(A)$ は行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ の要素 a_{ij} の多項式である，を満たすものを求める」

という問題を研究している．この問題を追求していくと，群 G_k の自然表現 $G_k \ni A \mapsto \pi_1(A) := A$ のテンソル積表現を考えることになり，n 回のテンソル積 $\bigotimes^n \pi_1$ (**4.11** 参照) の空間に n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が働くことになって，$G_k = GL(k,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の間のいわゆるシュア - ワイル対応 (**9.1.2** 参照) が出てくる．この重要な結果は，学位論文が印刷公表されなかったので，長らく大カルタン (Élie Cartan, 1869–1951) やワイル (Hermann Weyl, 1885–1955) の知るところではなかった，とのことである．(息子の Henri Cartan も大数学者であるので，区別するため父 Élie は大カルタンとよばれる．) さらに，上で説明した射影表現三部作 **[S4]** (1904), **[S10]** (1907), **[S16]** (1911), も1世紀弱前の論文である．

私 (平井) 自身は，自分の研究がながらく「連続群の無限次元ユニタリ表現」を主題としていたので，彼らのこうした代数的な仕事については，いろんな専門書から知識を得ており，原論文自体には馴染みがなかった．しかし，最近必要があって，これらの原論文を読むことになった．すると，いままで「昔の偉い人の仕事」と感覚的に隔たりをもっていたのが，もっと暖かみと人間味とが感じられるものになってきた．

考えてみれば，フロベニウスは，森鴎外 (1862–1922) や夏目漱石 (1867–1916) より少し早く生まれ，シュアは少し遅く生まれている．彼らの上記の論文は，鴎外や漱石の作品とほぼ同時期に書かれている．

初期の作品から一部を挙げると，鴎外では，1887年『於母影(おもかげ)』，1890年『舞姫(まいひめ)』，『うたかたの記』，1892年11月より『即興詩人』発表開始，1901年まで9年にわたる彫心鏤骨(ちょうしんるこつ)の翻訳．1911年『雁』，1913年『阿部一族』，など．漱石では，1905年1月～翌年8月の『我が輩は猫である』，1906年『坊ちゃん』，1907年『虞美人草(ぐびじんそう)』，1910年『門』，1912年『彼岸過迄(ひがんすぎまで)』，1912～13年『行人(こうじん)』，など．とくに，『即興詩人』は，父の蔵書の「総ルビの改造社の円本(えんぽん)」で小さいときから何回となく読んだ私の愛読書である．

フロベニウスやシュアの論文は，鴎外・漱石の作品と同じように用語などに古めかしさを感ずるが，懐古趣味ではなくて，原論文を読むことは著者たちの息遣いが感じられて，素晴らしいことである．

1.2.4 n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現群

ここでは,「生成元系と基本関係式」という定理 1.1 の観点から，とくに興味深い $\mathfrak{S}_n$ の表現群について述べよう ([S16, p.164])．原論文の感じを出すために記号を [S16] のままとする．$n \geq 4$ に対して，それぞれ生成元系 $\{ J, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1} \}$, $\{ J, T'_1, T'_2, \ldots, T'_{n-1} \}$ をもち，次の基本関係式 (1.19), (1.20) をもつ群を $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ と書く (E は単位元)：

$$J^2 = E,\ (T_\alpha)^2 = J,\ \ (T_\beta T_{\beta+1})^3 = J,\ \ T_\gamma T_\delta = J T_\delta T_\gamma\ ; \tag{1.19}$$

$$J^2 = E,\ J T'_\alpha = T'_\alpha J,\ \ (T'_\alpha)^2 = E,\ \ (T'_\beta T'_{\beta+1})^3 = E,\ \ T'_\gamma T'_\delta = J T'_\delta T'_\gamma,\ ; \tag{1.20}$$

$$(1 \leq \alpha \leq n-1,\ 1 \leq \beta \leq n-2,\ \gamma < \delta - 1).$$

$\phi(T_\alpha) = s_\alpha\, (1 \leq \alpha \leq n-1)$ とおいて，全射準同型 $\phi : \mathfrak{T}_n \to \mathfrak{S}_n$ が得られることは，基本関係式の比較から分かる．このとき， $\phi(J) = \phi(T_\alpha)^2 = s_\alpha^{\,2} = \mathbf{1}$ などとなり，J で生成される位数 2 の部分群 $Z = \{ J, E \}$ をとると，$\mathrm{Ker}(\phi) = Z$ で，これは中心に入り，$\mathfrak{T}_n / Z \cong \mathfrak{S}_n$ である．同様に，$\mathfrak{T}'_n / Z \cong \mathfrak{S}_n$ である．(後の章で述べる連続群の被覆群の場合に倣(なら)って,「$\mathfrak{T}_n$ は $\mathfrak{S}_n$ の 2 重の被覆群である」と言うと，感じが出る.)

$n \geq 4, n \neq 6$ で $\mathfrak{S}_n$ の表現群は $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ の 2 つであり，$n = 6$ では $\mathfrak{T}_6 \cong \mathfrak{T}'_6$ となって 1 個である (**1.3.1** 参照)．$\mathfrak{T}_n$ と $\mathfrak{T}'_n$ の違いは，$\mathfrak{S}_n$ の単純置換に対応する T_α, T'_α の位数がそれぞれ 4, 2 となっていることである．

$\mathfrak{S}_n$ の射影表現は，表現群 $\mathfrak{T}_n$ および $\mathfrak{T}'_n$ の線形表現を与える.

これを示そう．$\mathfrak{S}_n$ の射影表現 Π をとる．$A_\alpha = \Pi(s_\alpha)$ とおくと，

$$(1)\quad A_\alpha^{\,2} = a_\alpha I\,; \qquad (2)\quad (A_\beta A_{\beta+1})^3 = b_\beta I\,; \qquad (3)\quad A_\gamma A_\delta = c_{\gamma\delta} A_\delta A_\gamma \ \ (\delta \geq \gamma + 2)\,;$$

を満たす．ここに，I は恒等変換を表し，$a_\alpha, b_\beta, c_{\gamma\delta} \in \mathbb{C}^\times$ である．

(3) より，$A_\gamma A_\delta A_\gamma^{-1} = c_{\gamma\delta} A_\delta$ であり，この両辺を自乗して，

$$(4) \qquad\qquad c_{\gamma\delta}^{\,2} = 1$$

を得る．$n \geq 4$ とする．2 つのペア $(\gamma, \delta), (\gamma', \delta')$ でそれぞれ $n > \delta \geq \gamma + 2,\ n > \delta' \geq \gamma' + 2$ を満たすものをとったとき，$s(\gamma) = \gamma'$, $s(\gamma+1) = \gamma'+1$, $s(\delta) = \delta'$, $s(\delta+1) = \delta'+1$, を満たす $s \in \mathfrak{S}_n$ が存在する．そのとき，

$$s s_\gamma s^{-1} = s_{\gamma'}, \quad s s_\delta s^{-1} = s_{\delta'}, \quad \text{ただし，} s_\gamma = (\gamma\ \ \gamma{+}1)\ \text{etc.}$$

となる．$A = \Pi(s)$ とおくと，$AA_\gamma A^{-1} = cA_{\gamma'}$, $AA_\delta A^{-1} = dA_{\delta'}$ $(\exists c, d \in \mathbb{C}^\times)$ となる．(3) 式の両辺において，線形作用素 B を ABA^{-1} に変換すれば，

$$AA_\gamma A^{-1}AA_\delta A^{-1} = c_{\gamma\delta}AA_\delta A^{-1}AA_\gamma A^{-1},$$
$$\therefore \quad cdA_{\gamma'}A_{\delta'} = cdc_{\gamma\delta}A_{\delta'}A_{\gamma'} = cdc_{\gamma'\delta'}A_{\delta'}A_{\gamma'},$$

となり，$c_{\gamma\delta} = c_{\gamma'\delta'}$ を得る．さらに，(4) 式があるので，$c_{\gamma\delta}$ は (γ, δ) によらない．そこで，

$$(5) \qquad j = c_{\gamma\delta} = \pm 1 \ \ (\delta \geq \gamma + 2)$$

とおく．また，(2) 式から，$A_\beta A_{\beta+1}A_\beta = b_\beta A_{\beta+1}^{-1}A_\beta^{-1}A_{\beta+1}^{-1}$ となる．ここへ (1) 式を使って少し計算すれば，次の等式を得る：

$$(6) \qquad b_\beta^2 = a_\beta^3 a_{\beta+1}^3 \ \ (1 \leq \beta \leq n-1).$$

(I) 表現群 $\mathfrak{T}_n$ の場合： まず，A_α を適当にスカラー倍して，$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = j$ と正規化する．そのあと，

$$\Pi'(T_1) = A_1,\ \Pi'(T_2) = jb_1A_2,\ \Pi'(T_3) = b_1b_2A_3,\ \Pi'(T_4) = jb_1b_2b_3A_4,\ \cdots,$$

とおけば，$\Pi'(J) = jI$, $\Pi'(T_\alpha), 1 \leq \alpha \leq n-1$, は基本関係式 (1.19) に対応する等式を満たすので，表現群 $\mathfrak{T}_n$ の線形表現を与えていることが分かる．

(II) 表現群 $\mathfrak{T}'_n$ の場合： まず，A_α を適当にスカラー倍して，$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$ と正規化する．そのあと，

$$\Pi''(T_1) = A_1,\ \Pi''(T_2) = b_1A_2,\ \Pi''(T_3) = b_1b_2A_3,\ \Pi''(T_4) = b_1b_2b_3A_4,\ \cdots,$$

とおけば，$\Pi''(J) = jI$, $\Pi''(T_\alpha), 1 \leq \alpha \leq n-1$, は基本関係式 (1.20) に対応する等式を満たし，したがって，表現群 $\mathfrak{T}'_n$ の線形表現を与えている．

問題 1.5. (i)　上の等式 (6) $b_\beta^2 = (a_\beta a_{\beta+1})^3$ を証明せよ．

(ii)　上で与えた $\Pi'(T_\alpha), 1 \leq \alpha \leq n-1$, および $\Pi''(T_\alpha), 1 \leq \alpha \leq n-1$, がそれぞれ基本関係式 (1.19) および (1.20) に対応する等式を満たすことを示せ．

1.3　n 次対称群，n 次交代群および関連する群

1.3.1　$\mathfrak{S}_6$ の外部自己同型と表現群の同型 $\mathfrak{T}_6 \cong \mathfrak{T}'_6$

シュアの論文 [S16] が書かれた，20 世紀初頭のころは，置換群の研究がかなり大きな位置を占めていたようである．そのころから知られていたであろう事実を少し挙げてみよう．

(i) $n \geq 5$ ならば，交代群 $\mathfrak{A}_n$ は単純群である，すなわち，$\{1\}$ と自分自身以外に正規部分群をもたない．([平井 I], 定理 6.11)

(ii) $n \geq 3, n \neq 6$, ならば，交代群 $\mathfrak{A}_n$ の任意の自己同型は，$\mathfrak{S}_n$ のある自己同型の制限である．よって，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_n) \cong \mathfrak{S}_n$ である．([鈴木]，第 3 章)

(iii) $n \geq 2, n \neq 6$, ならば，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の自己同型はすべて内部自己同型であって，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$ である．(同上)

(iv) $n = 6$ のとき，$[\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) : \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)] = 2$ であり，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_6) \supsetneqq \mathfrak{S}_6$ である．(同上)

ここで，群 G の**内部自己同型**とは，ある $g \in G$ が，$G \ni h \mapsto \iota_g(h) := ghg^{-1} \in G$ として引き起こす同型である．その全体のなす群を $\mathrm{Int}(G)$ と書く．これは自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群である．

上記の $n = 6$ における例外は，有限群の理論全体に大きな影響をもち，理論を難しいものにしている元凶のひとつ，とのことである．

$\mathfrak{S}_6$ の外部自己同型

そこで，$\mathfrak{S}_6$ の外部自己同型のひとつを，論文 [S16] からヒントを得て，具体的に与えてみよう ([S16, p.165] には「周知のように (bekantlich) $\mathfrak{S}_6$ は外部自己同型をもつ」とある).

定理 1.2. 対称群 $\mathfrak{S}_6$ の位数 2 の元 $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_5$ を次のようにおく：

$$\kappa_1 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6),\ \ \kappa_2 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6),\ \ \kappa_3 = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6),$$
$$\kappa_4 = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6),\ \ \kappa_5 = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5).$$

$\mathfrak{S}_6$ の生成元 $s_1, s_2, \ldots, s_5$ に対して，$\Gamma(s_i) = \kappa_i\ (1 \leq i \leq 5)$ とおくと，Γ は $\mathfrak{S}_6$ の外部自己同型を与える．

証明. 内部自己同型 $\iota_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_6$, を巡回置換に作用させると，

$$\iota_\sigma(j_1\ j_2\ \ldots\ j_\ell) = \sigma(j_1\ j_2\ \ldots\ j_\ell)\sigma^{-1} = (\sigma(j_1)\ \sigma(j_2)\ \ldots\ \sigma(j_\ell)) \tag{1.21}$$

であるから，互換は互換に写る．したがって，Γ (ギリシア大文字ガンマ) が自己同型を与えるとすると，それは外部自己同型である．

そこで，Γ が実際に自己同型を与えることを示そう．それには，(1) κ_i たちが基本関係式 (1.8)～(1.9) に対応する等式を満たすこと，(2) κ_i たちが生成する群が $\mathfrak{S}_6$ 全体であること，を示せばよい．

まず，基本関係式が満たされることは，$\kappa_i\kappa_{i+1}\kappa_i = \kappa_{i+1}\kappa_i\kappa_{i+1}$ などを総当たりで証明する必要はない．2 個くらい証明して，あとは出てくる数字を置き換えればよいことを確認する (上の内部自己同型の作用の仕方 (1.21) に留意する).

次に，κ_i たちが生成する群を H とすると，$\kappa_1\kappa_3\kappa_5 = (1\ 2) = s_1$ だから，$s_1 \in H$．さらに，

$$\iota_{\kappa_2}(s_1) = s_4,\ \iota_{\kappa_4}(s_1) = s_3,\ \iota_{\kappa_3}(s_3) = s_5,\ \iota_{\kappa_2}(s_5) = s_2,$$

は H に入る．すべての単純置換が H に入るので，$H = \mathfrak{S}_6$ である．□

$\mathfrak{S}_6$ の表現群の同型 $\mathfrak{T}_6 \cong \mathfrak{T}'_6$

この同型は $\mathfrak{S}_6$ の外部自己同型に伴って生ずるものである．具体的な 1 つの同型 $\Gamma' : \mathfrak{T}_6 \to \mathfrak{T}'_6$ が，$T''_\alpha := \Gamma'(T_\alpha)$ を次のように与えて得られる ([S16, p.166])：

$$T''_1 = T'_1T'_3T'_5, \quad T''_2 = T'_3T'_2T'_1T'_4T'_3T'_2T'_5T'_4T'_3, \quad T''_3 = T'_1T'_4T'_3T'_5T'_4,$$
$$T''_4 = T'_1T'_2T'_1T'_3T'_2T'_1T'_5, \quad T''_5 = T'_1T'_3T'_4T'_3T'_5T'_4T'_3.$$

これを検証するには，(1) $\{T''_j\ ;\ 1 \le j \le 5\}$ が，$\{T_j\ ;\ 1 \le j \le 5\}$ と同じ関係式 (1.19) を満たすこと，(2) $\mathfrak{T}'_6$ を生成すること，を示せばよい．これはシュア自身が実行した計算を追体験することになる (読者試みられよ)．私がやってみたところ，検算を込めて確実にチェックするのに 6 時間ほどを要した．

1.3.2　n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ とその表現群

交代群 $\mathfrak{A}_n$ は，$n \ge 5$ のとき，昔から知られている単純群の無限系列をなす．$\mathfrak{A}_n$ およびその表現群の構造についての既知の事実をすこしまとめておこう．これはこの本の後で使う，というわけではないが，「実生活に役に立たぬことは知らなくてよい」という知的怠惰(たいだ)や「円周率は 3 でよい」という功利主義とも言えぬ似非(えせ)功利主義 (円の内接正六角形の周長は直径の 3 倍！) とも離れて，我々の知的探求心を生かそうというものである．単純群 $\mathfrak{A}_n$ に関する面白い事実を知って愉快を覚えるのは，鴎外や漱石の一節を覚えて楽しむのと共通するものであろう．

交代群 $\mathfrak{A}_n$ の生成元系と基本関係式

ここでは，シュアに倣って，次の生成元系をとる：

$$\begin{cases} a_1 = s_1s_2 = (1\ 2\ 3),\ a_2 = s_1s_3 = (1\ 2)(3\ 4),\ \ldots, \\ a_{n-2} = s_1s_{n-1} = (1\ 2)(n-1\ n). \end{cases} \tag{1.22}$$

定理 1.3. n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ の生成元系 (1.22) に対する基本関係式は，次で与えられる：

$$a_1^3 = \mathbf{1},\ (a_1a_2)^3 = \mathbf{1},\ (a_1a_\lambda)^2 = \mathbf{1}\ (3 \le \lambda \le n-2);\ a_\alpha^2 = \mathbf{1}\ (2 \le \alpha \le n-2),$$
$$(a_\beta a_{\beta+1})^3 = \mathbf{1}\ (2 \le \beta \le n-3),\ a_\gamma a_\delta = a_\delta a_\gamma\ (\delta \ge \gamma+2).$$

この定理の証明は，次の (◇) を用いれば，定理 1.2 の n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の場合と同様にできるので，読者の演習問題としておく．

(◇) 関係式 $a_2a_1a_2 = a_1a_2a_1$, および，$a_1^2 = (s_1s_2)^2 = s_2s_1 = (1\ 3\ 2)$ に注意すれば，左剰余類全体の集合 $\mathfrak{A}_{n-1}\backslash\mathfrak{A}_n$ の完全代表系として，次の n 個の元の集合がとれることが分かる：

$$a_{n-2},\ a_{n-2}a_{n-3},\ \ldots,\ a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_2,\ a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_2a_1,\ a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_2a_1^2.$$

交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現群

交代群 $\mathfrak{A}_n$ については，$n \geq 4$ のとき，表現群は 1 個である．その位数は，$n \neq 6,7$ のとき $2\cdot(n!/2)$ であり，表現群 $\mathfrak{B}_n$ は $\mathfrak{S}_n$ の表現群 $\mathfrak{T}_n$ を $\mathfrak{A}_n$ に制限して得られる．$n = 6,7$ のときは，表現群の位数は，$6\cdot(n!/2)$ である．

$n \neq 6,7$ **の場合：** $\mathfrak{T}_n$ の生成元を用いて，$\mathfrak{A}_n$ の表現群 $\mathfrak{B}_n$ の生成元を与えると，

$$J,\ B_1 = T_1T_2,\ B_2 = T_1T_3,\ \ldots,\ B_{n-2} = T_1T_{n-1},$$

であり，それらの満たす基本関係式は，

$$\begin{cases} J^2 = E,\ JB_\alpha = B_\alpha J,\ B_1^3 = J,\ (B_1B_2)^3 = J,\ (B_1B_\lambda)^2 = J; \\ B_\alpha^2 = J,\ (B_\beta B_{\beta+1})^3 = J,\ B_\gamma B_\delta = JB_\delta B_\gamma, \end{cases} \tag{1.23}$$

である．$Z = \{J, E\}$ は中心に入り，$\mathfrak{B}_n/Z \cong \mathfrak{A}_n$ である．

$n = 6,7$ **の場合：** 例外的な場合として，$n = 6,7$ のとき，$\mathfrak{A}_n$ の表現群 $\mathfrak{C}_n$ は，$\mathfrak{A}_n$ の 6 重の被覆群になっている．

$n = 6$ の場合は，生成元系として，$K, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$，その基本関係式として，

$$\begin{cases} K^6 = E,\ KC_\alpha = C_\alpha K, \\ C_1^3 = (C_1C_2)^3 = (C_2C_3)^3 = (C_3C_4)^3 = K^3, \\ C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = (C_1C_3)^2 = (C_2C_4)^2 = K^3,\ (C_1C_4)^2 = K, \end{cases} \tag{1.24}$$

がとれる．これは [S16, p.242] の基本関係式を，少し書き換えてある．$Z = \langle K\rangle$ (K で生成される群) は位数 6 の巡回群で中心に入り，$\mathfrak{C}_6/Z \cong \mathfrak{A}_6$ である．

$n = 7$ の場合は，生成元系として，$K, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6$，その基本関係式として，次がとれて，$Z = \langle K\rangle$ は位数 6 で中心に入り，$\mathfrak{C}_7/Z \cong \mathfrak{A}_7$ である：

$$\begin{cases} K^6 = E,\ KC_\alpha = C_\alpha K, \\ C_1^3 = (C_1C_2)^3 = (C_2C_3)^3 = (C_3C_4)^3 = (C_4C_5)^3 = K^3, \\ C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = C_5^2 = K^3,\quad (C_1C_4)^2 = K, \\ (C_1C_3)^2 = (C_1C_5)^2 = (C_2C_4)^2 = (C_2C_5)^2 = (C_3C_5)^2 = K^3. \end{cases}$$

1.3.3　組み糸群 $\mathfrak{Z}_n$ と対称群 $\mathfrak{S}_n$

組み糸 (braid) とは，3次元ユークリッド空間内の長方形の枠を考えて，上枠と下枠にそれぞれ等間隔に n 個の点を $A_1, A_2, \ldots, A_n$，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ と順番に従ってとり，A_i たちと B_j たちを1対1に対応させて，対応する2点を糸でむすんだものである．糸の数 n をその次数という (図 1.6)．ただし，それぞれの糸は，くくり目がなくて，引っ張り縮めてピンと張らせると，一本の直線にできるものとする．ひとつの組み糸 z に対して，糸の両端を固定して糸を連続的に動かしてできる組み糸は z と同値であるとする．この同値類を $[z]$ と書き，しばしば代表元 z と同一視する．

2つの組み糸 z_1, z_2 の積 z_1z_2 とは，図 1.7 のように，組み糸 z_1 の下に組み糸 z_2 をつなぎ，高さを半分に縮小した組み糸のことである．

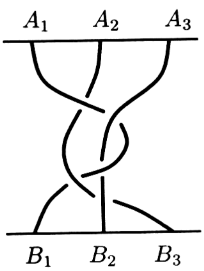


図 1.6. 組み糸の例

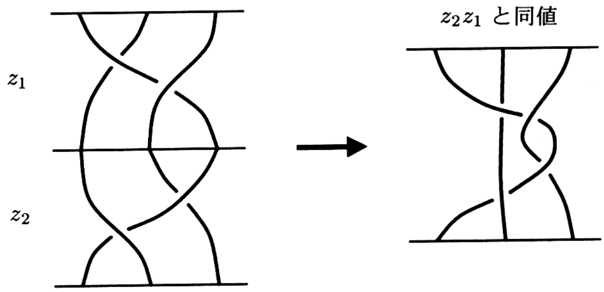


図 1.7. 積の定義の図示

この積によって，次数 n の組み糸の同値類全体は，**組み糸群** $\mathfrak{Z}_n$ をなす．それを示すには，結合律の成立と逆元の存在を言えばよい (読者試みられよ)．なお，単位元 e は各 A_i, B_i を直線的につないだ組み糸である．組み糸群の標準的な生成元系として，図 1.8a, 1.8b に示す z_i たちの同値類 $\mathfrak{z}_i = [z_i]$ からなる $\{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_{n-1}\}$ がとれる．

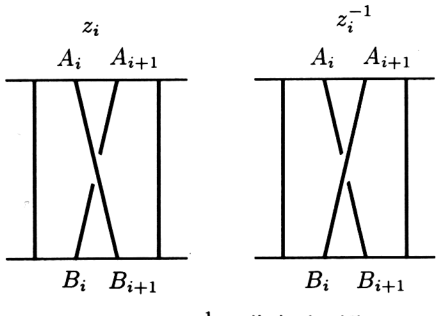


図 1.8a. $\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_i^{-1}$ の代表元の図

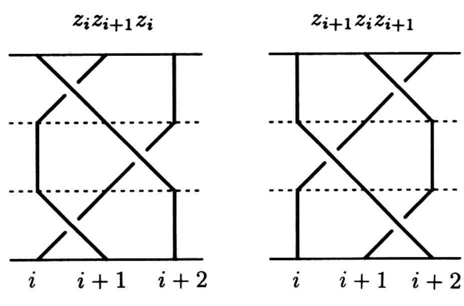


図 1.8b. $\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_{i+1}\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{i+1}\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_{i+1}$ の図

この生成元系に対する基本関係式としては次のものがとれる：

$$\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_j = \mathfrak{z}_j\mathfrak{z}_i \qquad (|i-j| \geq 2); \tag{1.25}$$

$$\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_{i+1}\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{i+1}\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq n-2). \tag{1.26}$$

n 次組み糸群 $\mathfrak{Z}_n$ から n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ への自然な準同型写像として $\Psi:\mathfrak{z}_i\to s_i$ となるものが存在する．それは，図形的には，組み糸 z の始点と終点とだけに注目して，添字 $1,2,\ldots,n$ の置換として $s=\Psi(\mathfrak{z})\in\mathfrak{S}_n$ を与えている．この Ψ による，$\mathfrak{Z}_n,\mathfrak{S}_n$ に対するそれぞれの基本関係式系の対応を考えると，(1.25) は (1.8) からの半分である．(1.26) は (1.9) と同等である．

この準同型の核 $\mathfrak{M}_n:=\Psi^{-1}(\{\mathbf{1}\})$ は**純組み糸群**とよばれ，$\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{M}_n\cong\mathfrak{S}_n$ である．群 $\mathfrak{M}_n$ は，複素 n 次元空間 $\mathbb{C}^n$ から $n(n-1)/2$ 個の超平面 $w_i=w_j\ (i\neq j)\ (w=(w_k)_{1\le k\le n}\in\mathbb{C}^n)$ を引き去った補集合 X の基本群 $\pi_1(X)$ と同型であることが知られている．これを (基本群をある程度知っている人のために) 説明しよう．複素平面 $\mathbb{C}$ の開正方形 D をとり，1 つの線分上に n 個の相異なる点 $w_1^0,w_2^0,\ldots,w_n^0\in D$ をとる．そして，パラメータ t の区間 $I=\{t;\,0\le t\le 1\}$ と D との直積 $D\times I$ をとる．$t\in I$ での切り口は $D_t=D\times\{t\}$ である．$t=0,1$ に対応する D_0,D_1 上の座標 w_k^0 をもつ点をそれぞれ A_k,B_k とする $(1\le k\le n)$．そして純組み糸群 $\mathfrak{M}_n$ の元 $\mathfrak{z}=[z]$ の代表元 z として，始点 $A_k\in D_0$ を出て終点 $B_k\in D_1$ に到る糸は各 $D_t,t\in I$，とただ 1 回ずつ交わるようにする．その交点を $(w_k(t),t)\in D_t$ とすると，$I\ni t\mapsto w_k(t)\in D$ は連続関数であり，D 内の道 (path) を与える．その道の終点 $w_k(1)$ は始点 $w_k(0)$ と一致するから，これは閉じた道である (図 1.9a 参照)．そこで，$w^0=(w_1^0,w_2^0,\ldots,w_n^0)\in D^n\cap X\subset\mathbb{C}^n$ とおくと，$w(t)=(w_1(t),w_2(t),\ldots,w_n(t)),0\le t\le 1$，は，$D^n\cap X$ 内の w^0 を始点かつ終点とする閉じた道を与える (なぜか)．これから，同型 $\mathfrak{M}_n\cong\pi_1(D^n\cap X)$ が分かる．他方，D は複素平面全体と位相空間として同相であり，したがって $D^n\cap X$ は X と同相である．ゆえに，$\pi_1(D^n\cap X)\cong\pi_1(X)$ となる．(基本群に馴染みのない読者にはまことに申し訳ないが，説明はここで止めるので，ここは単に読み飛ばして頂きたい．)

また，別の見方もある．$\mathfrak{M}_n$ の元は始点 A_k からの糸は終点 B_k に入っているので，始点 A_k と終点 B_k を絡(から)ませないようにつなぐと，n 本の糸の輪 (円周 S^1 と同相) が絡まり合っている絡み糸で，くくり目のないものが現れる (図 1.9b).

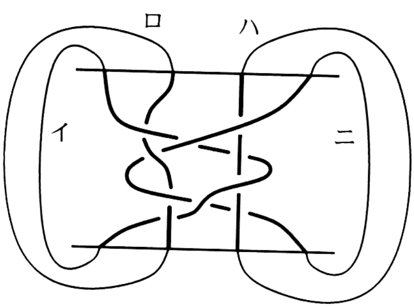


図 1.9a. $\mathfrak{z}\in\mathfrak{M}_n$ と w_k 平面での閉じた道

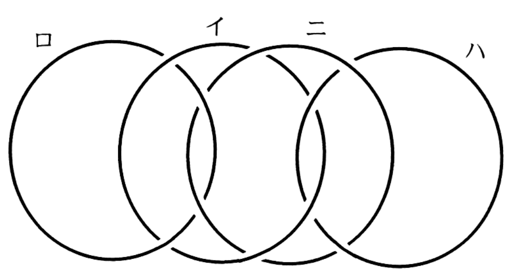


図 1.9b. $\mathfrak{z}\in\mathfrak{M}_n$ からきた絡み糸

なお，解説書として [河野] を挙げておこう．さらに，参考までに言っておくと，**結び糸** (knot) とは 3 次元ユークリッド空間 E^3 内の単一閉曲線のことであり，何個かの結び糸が絡

まり合っているものを**絡み糸** (link) とよぶ (図 1.10 参照). 結び糸・結び糸群, 絡み糸・絡み糸群, それから, 組み糸・組み糸群ときて, これらは多様体の位相的な問題を解くために考え出されて研究されてきたが, 最近めざましい発展を遂げている. そこでは, これらの可算無限群の線形表現が重要な働きをしている. 詳細についてはここでは立ち入らない.

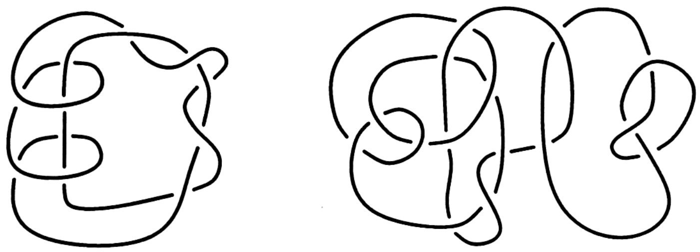


図 1.10. 結び糸 (knot) および絡み糸 (link)

1.4 正二面体・正多面体に作用する群とその表現

1.4.1 二面体群

ひとつの正 n 角形 R_n をとる. R_n を自分自身の上に重ねる変換の全体は群をなす. これを**二面体群**とよび, D_n と書く. R_n の頂点を右回りに $P_1, P_2, \ldots, P_n$ と名づける. 群 D_n は, R_n を右回りに 1 辺分だけ回す変換 a, および, P_1 と中心とを通る直線に関する裏返し b とで生成される. 生成元系 $\{a, b\}$ の満たす基本関係式は,

$$a^n = e, \quad b^2 = e, \quad (ab)^2 = e \qquad (e \text{ は単位元}), \tag{1.27}$$

であり, 位数は $|D_n| = 2n$ で, $D_n = \{\, a^k, a^k b \,;\, 0 \le k \le n-1 \,\}$.

$b' = ab$ は R_n の辺 $\overline{P_1P_2}$ の中点と中心とを結ぶ直線に関する裏返しであり, $b'^2 = e, D_n = \langle b, b' \rangle$ (b, b' で生成), である.

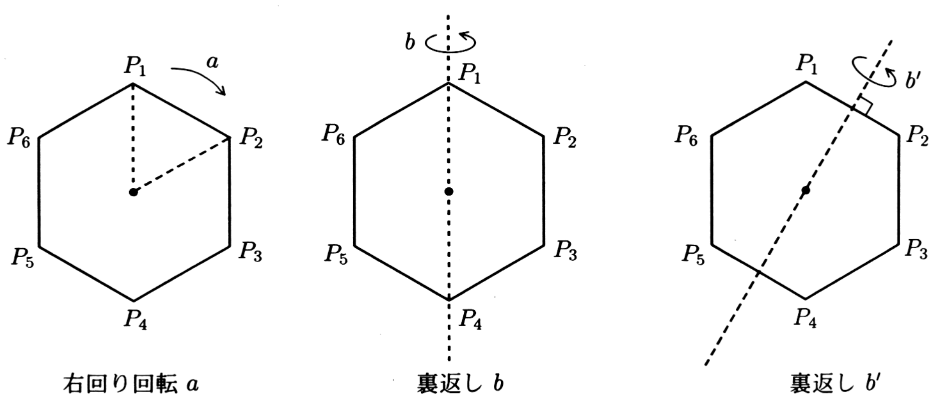


図 1.11. 正多角形を自分自身に写す変換 ($n = 6$ の場合)

群 D_n は抽象群としての構造は簡単ではあるが,「可換でない位数 2 の 2 元によって生成される有限群はどれかの二面体群に同型である」という事実があり,偶数位数の有限群の構造を調べるのに重要な働きをする.

問題 1.6. 互いに可換でない,位数 2 の 2 元によって生成される有限群は,どれかの D_n に同型であることを証明せよ.

1.4.2 二面体群の置換表現

多面体 R_n への作用を別の形で記述してみよう.そこで,n 個の頂点の動きに注目してみる.変換 a によって,$P_1 \xrightarrow{a} P_2 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} P_n \xrightarrow{a} P_1$ であるから,回転 a には巡回置換 $S(a) := (1\ 2\ \cdots\ n)$ が対応する.また,裏返し b には,

$$S(b) := \begin{cases} (2\ n)(3\ n{-}1)\cdots(k\ k{+}2) & (n = 2k\ \text{のとき}), \\ (2\ n)(3\ n{-}1)\cdots(k{+}1\ k{+}2) & (n = 2k+1\ \text{のとき}). \end{cases} \tag{1.28}$$

ここで与えられた写像 $S : D_n \to \mathfrak{S}_n$ は,置換群 $\mathfrak{S}_n$ の中への同型を与える.

ある群 G から置換群の中への準同型を一般に**置換表現**という.上の S は単射であるから,群 D_n の**忠実な**置換表現である.

1.4.3 二面体群の自然な線形表現,行列表現

正 n 角形の中心を原点 O とする 2 次元の直交座標を導入すると,$g \in D_n$ は O を不変にするので,2 次元の直交変換に拡張される.その直交変換を $\varpi(g)$ と書くと,ϖ は

$$\varpi(e) = I\ (\text{恒等変換}), \quad \varpi(gg') = \varpi(g)\varpi(g') \quad (g, g' \in D_n), \tag{1.29}$$

を満たす.この意味で,写像 ϖ は線形写像によって,群 D_n を‘表現する’ものであり,線形表現とよんでもいいだろう.

さらに,座標系を具体的に決めよう.$\overrightarrow{OP_1}$ 方向に x_2-軸をとり,それを角度 $\pi/2$ だけ右に回したところに x_1-軸をとる.$\varpi(g)$ をこの座標系に関して 2×2 型行列に書いたものを $\varpi'(g)$ とすると,

$$\varpi'(a) = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \quad (\theta_n = 2\pi/n), \qquad \varpi'(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

この ϖ' は群 D_n を 2 次行列によって表現したものであると言える.

1.4.4 群の行列表現，線形表現

体 $\mathbb{K}$ 上の m 次正方行列全体 $M(m,\mathbb{K})$ には，加法・乗法・スカラー倍があって，$\mathbb{K}$ 上の多元環をなしている．そこでの乗法 (積) だけに注目して，可逆元全体をとったものが**一般線形群** $GL(m,\mathbb{K})$ である．$g \in GL(m,\mathbb{K})$ にその行列式 $\det g$ を対応させると，$\det(gg') = \det(g)\det(g')$，$\det E_m = 1$ (E_m は m 次単位行列) であるから，1 次元表現 (指標) を与える．$\det g = 1$ とした部分群が**特殊線形群** $SL(m,\mathbb{K})$ である：

$$\begin{aligned} GL(m,\mathbb{K}) &:= \{\, g \in M(m,\mathbb{K})\ ;\ \det g \neq 0 \,\}, \\ SL(m,\mathbb{K}) &:= \{\, g \in GL(m,\mathbb{K})\ ;\ \det g = 1 \,\}. \end{aligned}$$

よく知られているように，$\mathbb{K}$ 上の m 次元数ベクトル空間 $V = \mathbb{K}^m$ 上の線形写像は，ある行列 $g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le m} \in M(m,\mathbb{K})$ により，

$$V \ni x = (x_j)_{1 \le j \le m} \longmapsto gx = (y_i)_{1 \le i \le m} \in V, \qquad y_i = \sum_{1 \le j \le m} g_{ij} x_j, \tag{1.31}$$

(ここに x は縦ベクトル) と書ける．V 上の線形写像の全体を $\mathcal{L}(V)$ と書くと，この対応によって，$\mathcal{L}(V)$ と $M(m,\mathbb{K})$ とは $\mathbb{K}$ 上の多元環として同型である．$\mathcal{L}(V)$ の可逆元全体を $\mathcal{L}(V)^\times$ と書くと，それは 一般線形群 $GL(m,\mathbb{K})$ と自然に同型である．

群 G を行列群 $GL(m,\mathbb{K})$ の中に準同型に写す写像を，G の m 次の $\mathbb{K}$ 上の**行列表現**という．これは，「G が (何かに) 作用する」状況を，「対応する行列が V に作用する」状況によって標準化した形で記述しているのである．

また，少々先走ったことを述べれば，$\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間 W をとり，W の連続線形作用素の全体を $\mathcal{L}(W)$，その可逆元全体を $\mathcal{L}(W)^\times$ とするとき，群 G から $\mathcal{L}(W)^\times$ への (連続な) 準同型写像 π を考えることがいろいろの意味で重要である．これが，本書の主題である**群の線形表現**であり，おいおいに詳しく論じていく．

もし，W が有限次元であれば，W に基底を決めれば G のひとつの行列表現を得る．基底の取り方を変えれば違った行列表現が現れる (しかしそれらは互いに同値である).

群の行列表現，線形表現を研究する目的は，

(イ) 群 G 自身の構造を明らかにする，とともに，上述のように，

(ロ) 群の作用を解明する，あるいは，群の作用の標準形，線形近似，を与える，

(ハ) これらのことを，幾何学・解析学・代数学の数学の分野や，物理学・化学などの他分野に生かすこと，である．

1.4.5 多面体群とその置換表現

3 次元空間における凸多面体で，(1) その面がすべて同型な正多角形，かつ，(2) 各頂点の回りの状況がすべて同一，となっているものを**正多面体**とよぶ．この正多面体は，正四面

体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種類に限ることがギリシャのプラトン (Platon, 427–347 B.C.) の時代には知られており，彼によって，宇宙を構成する基本単位として認識されていた．彼は，これらに (上の順序で) 火 (Fire)，土 (Earth)，空気 (Air)，宇宙 (The Universe)，水 (Water) を対応させていた．後世，彼の名をとって，プラトン多面体ともよばれるが，ケプラー (J. Kepler, 1571–1630) も，当時知られていた惑星 (水星，金星，地球，火星，木星，土星) の軌道がこれら 5 種の正多面体で決定されていることを見いだして神の摂理として感激している．

◆閑話休題 2 ◆

ケプラーは 1596 年の著作 *Mysterium cosmo graphicum* において，骨の折れる計算の労苦の結実だとして，次の発見を述べている．「太陽を中心として，地球の軌道を含む球面をとる．これに外接する正十二面体，次いでその外接球面をとると，その上に火星軌道が乗っている．さらに，その外接正四面体，その外接球面の上に木星軌道が乗り，次いでその外接正六面体，その外接球面の上に土星軌道がある．逆に，地球軌道の球面に内接する正二十面体，その内接球面をとると，その上に金星軌道が乗り，さらにその内接正八面体，その内接球面の上に水星軌道が乗っている．」

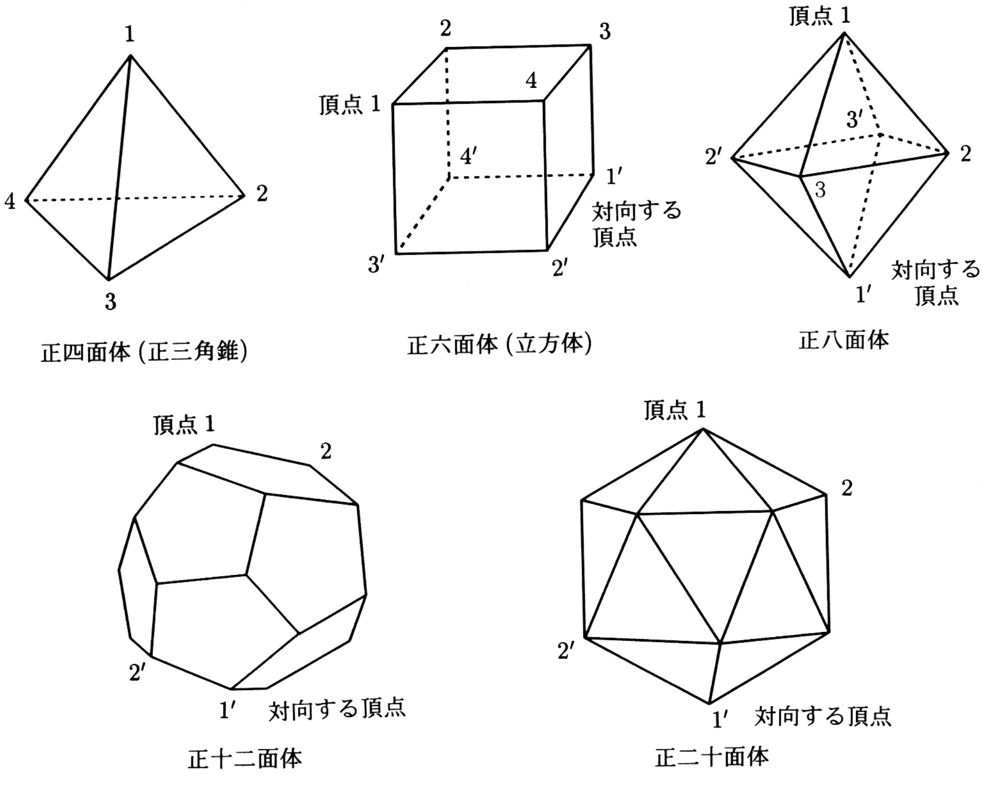


図 1.12. 3 次元ユークリッド空間内の正多面体

ここでは，最も対称性に富んだ立体として，その対称性を群論を用いて数学的に調べよう．これは，数理的結晶学の一部でもある．また，これは量子力学レベルでの原子・分子の対称性を記述するのにも役立つ．

正 k 面体 T_k	面の種類 正 p 角形	面の個数	頂点の個数	辺の個数	双対の関係	$G(T_k)$ の位数	$G(T_k)$ (同型群)
4	3	4	4	6	自己双対	12	$\mathfrak{A}_4$
6	4	6	8	12	互いに	24	$\mathfrak{S}_4$
8	3	8	6	12	双対	24	$\mathfrak{S}_4$
12	5	12	20	30	互いに	60	$\mathfrak{A}_5$
20	3	20	12	30	双対	60	$\mathfrak{A}_5$

表 1.1. 正 k 面体 T_k の対称性の群 $G(T_k)$

3次元ユークリッド空間 E^3 の中で，正 k 面体 T_k を動かして，自分自身に重ねる変換を T_k の**対称操作**ともいうが，その全体は群をなし，k **面体群**とよばれ，$G(T_k)$ と書かれる．さらに，E^3 の中での鏡映変換 (ある平面での鏡映) をも許して T_k をそれ自身に写す変換の全体を，**拡大** k **面体群**とよび，$G'(T_k)$ と書く．これらの群を調べてみよう．

E^3 に T_k の中心に原点をおいた正規直交基底をとると，対称操作 $g \in G(T_k)$ は，3次元の回転を表す行列 (特殊直交群 $SO(3)$ の元) で表される．まず，直交群について思い出しておく：

$$n \text{ 次直交群：} \quad O(n) = \{ g \in GL(n,\mathbb{R})\ ;\ g\,{}^t g = E_n \}, \tag{1.32}$$

$$n \text{ 次特殊直交群：} \quad SO(n) = \{ g \in O(n)\ ;\ \det g = 1 \}, \tag{1.33}$$

ここに，${}^t g$ は g の転置行列，E_n は n 次の単位行列，である．

命題 1.4. 3次元特殊直交群 $SO(3)$ の元 g は，次の形の元に共役である：

$$\begin{pmatrix} u_2(\theta) & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ここに，} u_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

さらに，$0_{p,q}$ は $p \times q$ 型零行列を表す．換言すれば，3次元ユークリッド空間 E^3 の回転 g はある回転軸の回りの2次元的回転 $u_2(\theta)$ に他ならない．

問題 1.7. 上の命題を証明せよ．

問題 1.8. $g \in SO(n)$ の固有値は，$n = 2k+1$ のとき，$1, \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}$ (ここに，$|\lambda_j| = 1$, $\overline{\lambda_j}$ は λ_j の共役) である．これを示せ．

さて，上の命題により，T_k の対称操作 g は，T_k の中心 O と，次のどれかを結んだ軸の回りの2次元的回転である．(イ) 頂点，(ロ) 稜の中点，(ハ) 面の中心．

正四面体の場合

図 1.12 のように T_4 の頂点に番号 1, 2, 3, 4 を付ける．1 つの頂点の回りには面が 3 個集まっている．したがって，(イ) の場合の回転は角度 $2\pi/3, 4\pi/3$ である．頂点 1 と中心 O とを結ぶ軸の回りの角 $2\pi/3$ の回転を a と名づける．(ロ) の場合の回転角は π である．稜 $\overline{12}$ の中点と O とを結ぶ軸の回りの角 π の回転を b とする．(ハ) の場合は (イ) の場合と一致する．これで，対称操作の個数が求まる：

$$1(\text{恒等操作}) + 4 \times 2(\text{場合 (イ)}) + 3 \times 1(\text{場合 (ロ)}) = 12.$$

さて，a と b を適当に繰り返すと，任意の頂点を頂点 1 に移動できるので，結局 $G(T_4) = \langle a, b \rangle$ (生成) が分かる．

この $G(T_4)$ をより詳しく知るために，これを T_4 の 4 個の頂点の置換によって表現してみよう．まず，a による頂点の置換は，$1 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 4, 4 \to 2$, であるから，$\mathfrak{S}_4$ の元として巡回置換 $\rho(a) = (2\ \ 3\ \ 4)$ を得る．ついで，b に対しては，$1 \to 2, 3 \to 4$, であるから，置換 $\rho(b) = (1\ \ 2)(3\ \ 4)$ を得る．さらに，$\rho(a), \rho(b)$ は 4 次交代群 $\mathfrak{A}_4 := \{\sigma \in \mathfrak{S}_4\ ;\ \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ を生成する．ここに得られた置換表現 $\rho : G(T_4) \to \mathfrak{A}_4$ は，上への忠実な表現 (同型写像) である．

拡大四面体群 $G'(T_4)$ を考えよう．s を原点 O と稜 $\overline{12}$ を含む平面での鏡映変換とすると，これには置換 $\rho'(s) = (3\ \ 4)$ が対応する．一方，$G'(T_4) = \langle G(T_4), s \rangle$, $\mathfrak{S}_4 = \langle \mathfrak{A}_4, (3\ \ 4) \rangle$ であるから，ρ の拡張として得られた置換表現 $\rho' : G'(T_4) \to \mathfrak{S}_4$ は，上への忠実表現である．

例 1.5 (メタン分子 CH_4 の場合)．メタン分子は，炭素 C を中心として，その回りに 4 個の水素原子が正四面体の頂点をなすようにつながっている (図 1.13 参照).

この模型図から分かることは,「メタン分子 1 個の状態は，正四面体の対称性を記述する多面体群 $G(T_4)$ に関する対称性をもっている」ということである．したがって，その量子力学的方程式や，分子の波動関数は $G(T_4) \cong \mathfrak{A}_4$ の下での対称性をもつべきである．

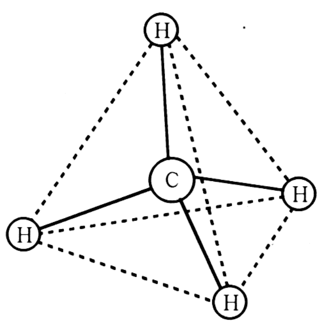


図 1.13. メタン分子 CH_4 の模型

鏡映変換を含めた拡大多面体群 $G'(T_4) \cong \mathfrak{S}_4$ についてはどうであろうか？ これについてもその対称性を要請してもよさそうであるが，ここでは留保しておきたい．その理由は,「群 $G(T_4)$ は E^3 の直交座標系の取り方の任意性を反映する対称性であるが，拡大された $G'(T_4)$ では，そこに含まれる鏡映によって E^3 の直交座標系は右手系と左手系が入れ替わる．この入れ替わりが物理的な何かを意味するかどうかは，実験によって確かめてみる必要があるのではないか.」さらに，下の閑話休題を参照のこと.

◆閑話休題 3 ◆

水晶は石英 SiO_2 の美しい結晶である．化学的性質は同一であるが，光を右に回すＤ型と左に回すＬ型の光学異性体がある．光学異性体のある化合物を化学的に合成するとＤ型Ｌ型が等量できるが，生体内では，アミノ酸はＬ型，糖類はＤ型，だけである．人工的合成では，普通Ｌ型とＤ型とが等量できるが，これをどちらかに偏らせる不斉合成の研究は化学の基本的な問題のひとつであった．平成13年のノーベル化学賞に野依（のより）良治教授が不斉合成法の研究に関して共同受賞者として選ばれた．その業績とは，京大助手時代の1966年に金属と有機化合物の触媒を使い，片方を10% 多く作り出すことに初めて成功し，その後いろいろの触媒開発に成功したことである．

他方，自然界でのＬ型Ｄ型の偏りの起源についての研究においても，近年注目すべき日本人の業績がある．平面的な化学構造をもちＤ型もＬ型もないピリミジンアルデヒドにアルキル亜鉛の試薬を加えるとアルコールの一種のピリミジルアルカノールができる．これにはＬ型とＤ型がある．硤合（そあい）憲三教授 (東京理大理) の実験によれば，あらかじめ右水晶 (Ｄ型) の微粉末を加えた状態で反応させると，最初の反応でＬ型が 51% で 2% 多く生成する．左水晶ではＤ型が 2% 多く生成する．反応を繰り返すとこの不斉自己増殖は最終的には収率 97% に達した．

教授によれば,「平面的なピリミジンアルデヒドの表と裏で右水晶，左水晶の吸着の仕方が違う．これが原因ではないか」とのことである．(「科学館」，雑誌『SAPIO』2000/7/12 発行，による)

1.5　群の直積・半直積，多面体群の表現 (続)

1.5.1　群の直積と半直積

先へ進む前に群の定義を復習しておこう．集合 G に２項演算が定義されていてそれが次の２つの公理を満たすときに**群**とよぶ．

公理 (G1)：　２項演算に対して結合率が成立する：

$$(ab)c = a(bc) \qquad (a, b, c \in G);$$

公理 (G2)：　次の２つの方程式がつねに一意的な解をもつ：

$$a, b \in G \text{ に対して，} \qquad ax = b, \quad ya = b.$$

直積群：２つの群 G_1, G_2 があったとき，その**直積**とは，集合としての直積 $\{(g_1, g_2)\,;\, g_1 \in G_1,\, g_2 \in G_2\}$ に積演算を

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2') \quad (g_1, g_1' \in G_1,\ g_2, g_2' \in G_2)$$

と定めたものである．この積によって確かに群が与えられることは，上述の群の公理 (G1), (G2) が成立することを検証すればよい．これは読者にまかせよう．

直積群は記号 $G_1 \times G_2$ によって表される．

群が群に作用する：２つの群 G, H があったとき，H が G に**作用する**とは，H の任意の元 h に対して，

(i) G の自己同型 $G \ni g \mapsto \iota_h(g) \in G$ が対応する：

$$\iota_h(e_G) = e_G,\ \iota_h(gg') = \iota_h(g)\iota_h(g') \quad (g, g' \in G,\ e_G \text{ は } G \text{ の単位元});$$

(ii) H から群 G の自己同型全体のなす群 $\mathrm{Aut}(G)$ への写像 $H \ni h \mapsto \iota_h \in \mathrm{Aut}(G)$ は準同型である：

$$\iota_{e_H} = I_G(:= G \text{ 上の恒等写像}),\quad \iota_{hh'} = \iota_h \iota_{h'} \quad (h, h' \in H).$$

半直積群：H が G に作用しているとき，集合としての G と H の直積 $\{(g,h)\,;\, g \in G, h \in H\}$ に積を次のように定義する：

$$(g,h)(g',h') := (g\,\iota_h(g'), hh') \quad (g, g' \in G,\ h, h' \in H). \tag{1.35}$$

この積が群の公理 (G1), (G2) を満たすことが検証されるので，群が得られる．これを G と H の**半直積群**とよび，記号 $G \rtimes H$ と書く．この記号は直積の記号 $\times$ の変形であるが，G が全体の群 $G \rtimes H$ の中で正規部分群になっているので $\times$ の左側はふさがず右側をふさいでいる．ちなみに，直積群 $G_1 \times G_2$ においては，その部分群として G_1, G_2 は両方とも正規である．

定理 1.5. 群 G に 2 つの部分群 G_1, G_2 があって，任意の元 $g \in G$ は一意的に $g = g_1 g_2$ と書けるとする．

(i) G_1 が正規部分群であれば，G_2 は，$\iota_{g_2}(g_1) := g_2 g_1 {g_2}^{-1}$ によって，G_1 に作用する．

(ii) このとき，G は自然な対応 $G \ni g = g_1 g_2 \mapsto (g_1, g_2) \in G_1 \rtimes G_2$ によって，半直積群 $G_1 \rtimes G_2$ に同型である．

問題 1.9. (1.35) で定義された積演算が，群の公理 (G1), (G2) を満たすことを示せ．

問題 1.10. 定理 1.[redacted]5 の (i) および (ii) を証明せよ．

1.5.2 正六面体，正八面体の場合

正六面体 T_6 の各面の中心を頂点とする凸多角形は正八面体となる．逆に正八面体 T_8 の各面の中心を頂点とする凸多角形は正六面体となる．これを，T_6 と T_8 とは互いに**双対**である，という．双対の関係から，2 つの多面体群 $G(T_6), G(T_8)$ が自然に同型であることが分かる．

正六面体 (立方体) の頂点，稜，面はそれぞれ 8, 12, 6 個ずつである．それぞれの集合に注目すれば，立方体の対称性を記述する群 $G(T_6)$ の置換群 $\mathfrak{S}_8, \mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{S}_6$ の中への忠実な置換表現 3 種が得られる．これを具体的に書き下すのは四面体群 $G(T_4)$ の場合と同様にできる．しかし，この場合は表現によって写っていった先の像を部分群として簡潔に特徴づけることが

できない．そこで別の対象を用いよう．図 1.14 に見るように1つの頂点と T_6 の中心 O を結ぶ直線は対向する頂点を通る．そこで，ベクトル $\overrightarrow{11'}, \overrightarrow{22'}, \overrightarrow{33'}, \overrightarrow{44'}$, に対称操作 g がどう働くかをみよう．

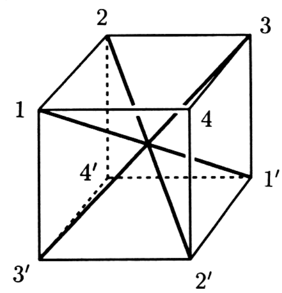


図 1.14. 正六面体の対角線

まず，$G(T_6)$ の元として，面 1234 の中心と T_6 の中心 O を結ぶ軸の回りの角 $\pi/2$ の回転を a とする．これによって，

$$\overrightarrow{11'} \to \overrightarrow{22'},\ \ \overrightarrow{22'} \to \overrightarrow{33'},\ \ \overrightarrow{33'} \to \overrightarrow{44'},\ \ \overrightarrow{44'} \to \overrightarrow{11'},$$

となる．したがって，巡回置換 $\rho(a) = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ が対応する．次に，稜 $\overline{12}$ の中点と中心 O とを結ぶ軸の回りでの角 π の回転を b とすると，それは，

$$\overrightarrow{11'} \longleftrightarrow \overrightarrow{22'},\ \ \overrightarrow{33'} \to -\overrightarrow{33'} = \overrightarrow{3'3},\ \ \overrightarrow{44'} \to -\overrightarrow{44'} = \overrightarrow{4'4},$$

となる．これはベクトルの向きを無視すれば，置換 $\rho(b) = (1\ \ 2)$ を与える．また，例えば，T_6 の面の動きに注目すれば，$G(T_6) = \langle a, b \rangle$ が分かる．

拡大された六面体群 $G'(T_6)$ の元として，稜 $\overline{12}, \overline{34}$ それぞれの中点と中心 O で決まる平面での鏡映を s とすれば，

$$\overrightarrow{11'} \longleftrightarrow \overrightarrow{22'},\ \ \overrightarrow{33'} \longleftrightarrow \overrightarrow{44'},$$

となる．そして，$G'(T_6) = \langle a, b, s \rangle$ である．以上により次が分かる．

命題 1.6. (i) $G(T_6)$ の置換表現 ρ は4次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の上への同型である．

(ii) 拡大六面体群 $G'(T_6)$ は上の置換表現 ρ を通じて，$\mathfrak{S}_4$ と位数 2 の群 $C_2 = \{\mathbf{1}, \tau = (1\ \ 2)(3\ \ 4)\}$ との次の半直積群に同型である：

$$\mathfrak{S}_4 \rtimes C_2, \qquad \text{ただし，} \rho(sgs^{-1}) = \tau\rho(g)\tau^{-1}\ \ (g \in G(T_6)). \tag{1.36}$$

問題 1.11. 正六面体 T_6 の面の集合に注目して，拡大六面体群 $G'(T_6)$ の $\mathfrak{S}_6$ の中への置換表現を具体的に求めよ． 〔ヒント： 変換 a, b, s それぞれに対して計算せよ.〕

1.5.3 正十二面体，正二十面体の場合

正十二面体と正二十面体とは互いに双対であるので，それらの対称操作の群は同型である：$G(T_{12}) \cong G(T_{20})$．これを調べるのはここではパスする．これらの多面体の展開図を掲げておくので，これを拡大コピーして，ハサミとセロテープで実際に多面体を手作りして対称操作 (イ)，(ロ)，(ハ) について実感してもらいたい．さらに詳しく知りたい方は，文献 [平井, I] を見られたい．

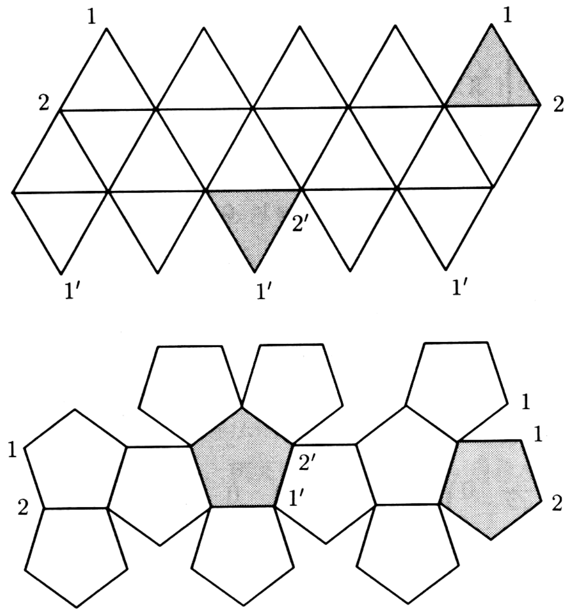


図 1.15. 正十二面体，正二十面体の展開図

1.5.4 多面体群の行列表現

体 $\mathbb{K}$ を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする．群 G から $GL(n,\mathbb{K})$ への行列表現は，数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ 上の線形表現を基底に関して行列表示したものとも思える．上の多面体群の各元は，E^3 内の原点 O を動かさない等距離変換であり，これは直交行列によって表示できる．この意味で，各 $G(T_k) \subset G'(T_k), k = 4, 6, 8, 12, 20,$ はそれぞれに自然な 3 次元の線形表現 ϖ をもっている (字母 ϖ の読みは変形パイ)．適宜に直交座標系を決めれば，これは 3 次行列による行列表現を与える．それは，E^3 における $G(T_k), G'(T_k)$ の作用がどんなものであるかを見せてくれるので，置換表現とは違った意味で重要である．

四面体群の自然な行列表現

図 1.12 の T_4 の図において，中心 O を原点にとり，頂点 1 の方向に z-軸をとる．稜 $\overline{12}$ の方向に x-軸をとり，右手系の直交座標系を決める．頂点 1 の座標を ${}^t(0,0,1)$ にとれば，$\overline{12}$ の中点 P の座標は ${}^t(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{1}{3})$ である．変換 a, b, s に対する行列表示を計算すると次のようになる．例えば，a に対しては，2 次元的回転 $u_2(2\pi/3)$ が現れ，b に対する計算では，

xz-平面で見れば，O, P を通る直線に関する折り返し変換が現れる：

$$\varpi(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varpi(b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\varpi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

六面体群 $\cong$ 八面体群の自然な行列表現

図 1.12 の T_6 の図において，中心 O を原点にとり，面 1234 の中心方向に z-軸をとる．面 $123'4'$ の中心の方向に x-軸をもつ右手系の直交座標系を決める．変換 a, b, s に対する行列表示を計算すると次のようになる：

$$\varpi(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varpi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varpi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 1.12. $G(T_4)$ の表現 ϖ に対する公式 (1.37) 式を計算によって確かめよ．

問題 1.13. $G(T_6)$ の表現 ϖ に対する上の公式を計算によって確かめよ．

1.6 原子・分子レベルでの対称性の群

上で取り扱った正多角形の対称操作のなす群は，巨視的結晶学の初歩である．数理的結晶学にはこのほかに結晶格子の対称性を扱う微視的結晶学があり，X 線回折による物質の構造の研究とか実用面とも深い関係がある．平面のタイリングの問題も面白い．

この節では，さらに超微視的な原子・分子レベルの対称性の群を見てみよう．

1.6.1 水素原子の場合

水素原子は，核は陽子 1 個よりなり，1 個の電子がその回りを回っている (図 1.16 参照)．そしてスピン量子数 1/2 の核スピンをもっている．

現代の量子力学的描像では，電子は**波動関数** $\psi(x,t)$, $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ で表される．ここに，x は 3 次元ユークリッド空間 E^3 の正規直交座標であり，原子核に原点をとっておく．時間 t のときに，電子が $\mathbb{R}^3$ のある領域 D に存在する確率は積分値

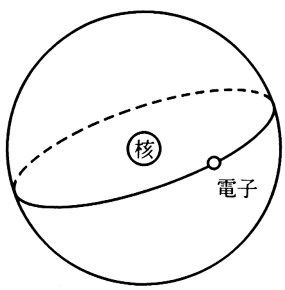


図 1.16. 水素原子の模式図

$$p(D;t) := \iiint_D |\psi(x,t)|^2\,dx, \quad dx := dx_1dx_2dx_3, \tag{1.38}$$

で与えられる．ここで，$\psi(x,t)$ は t を止めるごとに，ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3; dx)$ の元であるが，そのノルムが 1 になるように正規化されていて，上の確率論的解釈を保証している，すなわち，全確率 $= p(\mathbb{R}^3;t) = \|\psi(\cdot,t)\|^2 \equiv 1$.

図 1.16 は模式図であるからあまりはっきりは描けていないが，水素原子 H は核の回りにどんなに回転させても対称のはずである．したがって，H の対称操作は原点を中心とした回転であり，$u \in SO(3)$ で表される．空間の反転 $x \to -x$ $(x \in \mathbb{R}^3)$ や鏡映変換を含む $O(3)$ にまで対称性を拡げておくかどうかは議論のあるところであろうから，ここでは回転群 $SO(3)$ にとどめておく．

こういうわけだから，H に関する物理法則は，回転群 $SO(3)$ に関して，不変性もしくは適当な変換性をもつことが要請される．例えば，波動関数 ψ 自身やそれに対する方程式はこうした性質をもっていなければならない．

変数 x に対する $u \in SO(3)$ の変換は，関数 ψ に対しての変換

$$\psi \mapsto R(u)\psi, \quad (R(u)\psi)(x,t) := \psi(u^{-1}x,t) \ \ (x \in \mathbb{R}^3), \tag{1.39}$$

を引き起こす．このとき，

$$R(e)\psi = \psi, \quad R(uu')\psi = R(u)(R(u')\psi) \quad (u,u' \in SO(3)),$$

が成立しているから，回転群 $SO(3)$ の線形表現が現れてきている．

時間 t を分離した形で，それをきっちり定義しておくと，表現空間としては，ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3; dx)$ をとり，その上の線形作用素 $R(u)$ を

$$(R(u)f)(x) := f(u^{-1}x) \quad (f \in \mathcal{H},\, x \in \mathbb{R}^3) \tag{1.40}$$

と定義する．各 $R(u)$ はユニタリ作用素，すなわち，全射，かつ等長：$\|R(u)f\| = \|f\|$ $(f \in \mathcal{H})$, である，実際，

$$\begin{aligned}\|R(u)f\|^2 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} |R(u)f(x)|^2\,dx \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} |f(u^{-1}x)|^2\,dx = \iiint_{\mathbb{R}^3} |f(x')|^2\,dx' = \|f\|^2.\end{aligned}$$

ここで，$x' = u^{-1}x$ のとき，$dx' = dx$ となることを用いた．表現作用素 $R(u)$ がつねにユニタリなので，表現 $(R,\mathcal{H})$ は**ユニタリ**であるといわれる．群の表現については次章で詳しく取り上げるので，ここではあっさりこの程度で済ませておこう．(ヒルベルト空間の基本事項については，**2.5.1** 参照.)

波動関数 ψ が $SO(3)$-不変であるとは，$R(u)\psi = \psi$ $(u \in SO(3))$ となることである．

また，電子のあるエネルギーレベルに対する波動関数が，何次元かの自由度をもっていたとする．このときは，$R(u)$ をそれらの波動関数のなすベクトル空間の上に制限すれば，有限次元の $SO(3)$ の表現が現れるはずである．

1.6.2　等核 2 原子分子の場合

同じ種類の原子 2 個がひとつの分子をなしている場合を考えよう．

例として，水素分子 H_2 をとる．このとき，2 つの原子 H は完全には等価とは言えない．それは，原子核がもっているスピン量子数 1/2 に向きの違いがあり得るからである．核スピンを核の自転であると理解するが，2 つの核の自転の向きが同じであるときその分子をオルト水素，向きが異なっているときにはパラ水素という．これら 2 種の間には化学的性質の差はほとんどないが，比熱はかなりの差がある．しかし，水素分子の取り扱いの第 1 次近似としては，2 つの原子 H が等価としてよい．

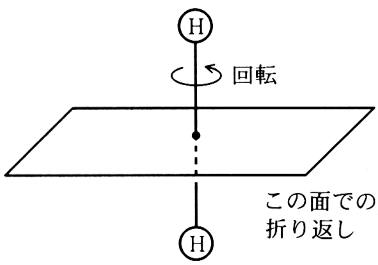


図 1.17a. 水素分子 H_2 の模式図

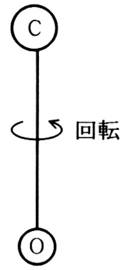


図 1.17b. 異核 2 原子分子 CO の模式図

この等価 2 原子分子としての H_2 に対する対称操作は，まず，2 つの H をつなぐ軸の回りの回転である．つぎに，この軸の中点で折り返す鏡映変換 s である．軸の中点を原点にとり，軸の方向を z-軸にとって，これらの操作を 3×3 の行列で表す．記号として，対角行列もしくはブロック型対角行列を $\mathrm{diag}(\cdots)$ で表すと，

$$\mathrm{diag}(u_2(\theta), 1) = \begin{pmatrix} u_2(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{diag}(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

1.6.3　異核 2 原子分子の場合

異なった原子 2 個よりなる分子に対する対称操作の群を考える．この種の分子の例としては一酸化炭素 CO などがある (図 1.17b 参照)．この場合は，等核 2 原子分子の場合に比べて，対称性は当然減じているわけで，鏡映変換 s がなくなっている．したがって，対称性の群は $\{\, \mathrm{diag}(u_2(\theta), 1)\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$ で記述される．

1.7 群の作用

群 G が集合 X に**作用する** (もしくは，X が G-**空間**である) とは，$g \in G, x \in X$ に対して，$gx \in X$ が定まり，次が満たされること：

$$\begin{aligned} ex &= x && (x \in X,\, e = G \text{ の単位元}), \\ (gh)x &= g(hx) && (g, h \in G,\, x \in X). \end{aligned} \tag{1.42}$$

G の X への作用が**忠実である**とは，「任意の $g \in G, g \neq e$, に対して，g の作用が，恒等変換 I_X ではない，すなわち，ある $x \in X$ に対して，$gx \neq x$ となる」ことである．また，点 x が G で写された点の集合 $Gx := \{ gx \,;\, g \in G \}$ を x を通る G の**軌道**という．G の X への作用が**推移的である**とは，任意の 2 元 $x, y \in X$ に対し，ある $g \in G$ があって，$gx = y$ となる，すなわち，X が単一の軌道となることである．

1 点 $a \in X$ を固定する元 $g \in G$ の元の全体 $G_a := \{ g \in G \,;\, ga = a \}$ を a の**固定部分群** (stabilizer) とよぶ．このとき，対応 $G \ni g \to ga \in X$ から誘導される写像によって，G-軌道 Ga は，G の均質空間 G/G_a と G-空間として同型である．

例 1.6 (ユークリッド空間とその運動群)．3 次元ユークリッド空間 E^3 の等距離変換とは，任意の 2 点の間の距離を不変にする変換である．すなわち，写像 $T : E^3 \to E^3$ で全射，かつ $\mathrm{dist}(T(x), T(y)) = \mathrm{dist}(x, y)$ $(x, y \in E^3)$ となるものである．等距離変換の全体 $\mathrm{Iso}(E^3)$ は，等距離変換群とよばれる群をつくる．また，等距離変換のうち恒等変換 $I_{E^3} : E^3 \ni x \to x \in E^3$ と連続的につながっているものを E^3 の**運動**という．運動の全体 $\mathcal{M}(E^3)$ は，E^3 の**運動群**とよばれる．

E^3 に原点 O と直交座標系を決めると，$E^3 \cong \mathbb{R}^3$ であり，$x = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3$, に対し，

$$\mathrm{dist}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \tag{1.43}$$

である．$x \in \mathbb{R}^3$ を縦ベクトルに書くことにすれば，等距離変換 T に対して，

$$a \in \mathbb{R}^3, u \in O(3) \text{ が存在して，} \quad T(x) = ux + a \quad (x \in \mathbb{R}^3) \tag{1.44}$$

と書ける．T が運動であるための条件は，$u \in SO(3)$ である．特殊直交群 $SO(3)$ は原点 O の回りの回転の全体であり，直交群 $O(3)$ はさらに O を含む平面での鏡映変換などを含む．$\mathrm{Iso}(E^3)$ は $a \in \mathbb{R}^3$ による平行移動のなす加法群 $\mathbb{R}^3$ と直交群 $O(3)$ との半直積である．これらを式に書くと，

$$\mathrm{Iso}(E^3) \ni T \quad \overset{\cong}{\longmapsto} \quad (a, u) \in \mathbb{R}^3 \rtimes O(3), \tag{1.45}$$

$$\mathcal{M}(E^3) \quad \cong \quad \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3), \tag{1.46}$$

$$O(3) = SO(3) \ \sqcup \ SO(3)J_3, \quad J_3 = \mathrm{diag}(1, 1, -1),$$

である．ここに，対角行列 J_3 は (x,y)-平面に関する鏡映変換を表す．(これらの事実については，例えば，[平井 I, 第7章] 参照)．記号 $\sqcup$ は互いに素な (すなわち，共通部分のない) 合併を表すときに用いる．

以上の状況をこの節の「群の作用」という設定にまとめてみると，$X = E^3$ に $G = \mathrm{Iso}(E^3)$，または $G = \mathcal{M}(E^3)$ が作用している，というわけである．

例 1.7 (球面と直交群)．2次元の単位球面 $S^2 \subset E^3$ をとる．そこに次のように距離を入れる．2点 $x, y \in S^2$ に対して，これらを通る大円をとる．この大円を伝って x から y に到る距離のうち短い方をもって，x, y 間の距離 $d_S(x,y)$ と決める．これを式で書くと，

$$\begin{aligned} d_S(x,y) &= \mathrm{Arccos}\,\langle x,y\rangle, \\ \langle x,y\rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \end{aligned} \tag{1.47}$$

この距離空間 (S^2, d_S) の等距離変換全体のなす群を $\mathrm{Iso}(S^2)$ と書く．変換 $T \in \mathrm{Iso}(S^2)$ に対して $u \in O(3)$ が存在して，$T(x) = ux \quad (x \in S^2)$ となり，$\mathrm{Iso}(S^2) \cong O(3)$ である．恒等変換 I_{S^2} と ($O(3)$ の中で) 連続的につながっている変換全体は $SO(3)$ であり，これを S^2 の運動群とよぶ．

$u \in SO(3)$ は，命題 1.4 で述べたように，ブロック型対角行列 $\mathrm{diag}(u_2(\theta), 1)$ に共役であり，原点を通るある回転軸の回りの (角 θ の) 2次元的回転を表す．他方，$u \in O(3) \setminus SO(3) = SO(3)J_3$ は，$\mathrm{diag}(u_2(\theta), -1)$ に共役である．それはある回転軸の回りの2次元的回転に引き続いて，この回転軸方向を原点で反転させることになる．

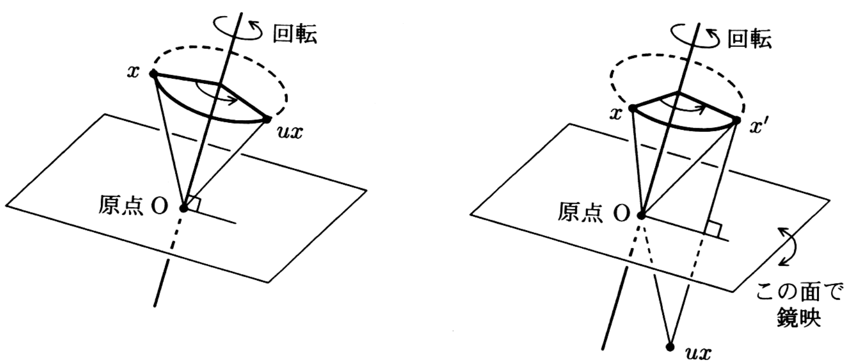


図 1.18. 回転：$u \in SO(3)$ と 回転 ＋ 鏡映：$u \in SO(3)J_3$

この節の「群の作用」の設定に合わせると，$X = S^2$ に $G = O(3)$ または $G = SO(3)$ が作用している．また，X で各点 x とその対向点 $-x$ とを同一視する (例えば北極と南極を同一視する) と，興味ある多様体 $\widetilde{X} = S^2/\{\pm\}$ を得るが，G は $\mathbb{R}^3$ に線形に作用するので，$\widetilde{X}$ には相変わらず G が作用している．群の作用を忠実にしたければ，G の商群 $G/(G \cap \{\pm E_3\})$ に移ればよい．

$\widetilde{X}=S^2/\{\pm\}$ に d_S から誘導された距離を考えたリーマン面は 2 次元の，いわゆる**楕円型の非ユークリッド空間** (非ユークリッド平面) になる．その運動群が $SO(3)$ である．(以上の詳細は，[平井 II, 第 14 章] 参照.)

例 1.8 (ミンコフスキー空間とローレンツ群)．$(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間 M^{n+1} とは，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ に不定計量内積

$$\langle x,y\rangle_L=-x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1}={}^t x J_{n,1}y, \tag{1.48}$$
$$J_{n,1}=\mathrm{diag}(-E_n,1)=\begin{pmatrix}-E_n & 0_{n,1}\\ 0_{1,n} & 1\end{pmatrix},\ x=(x_j)_{j=1}^{n+1},\ y=(y_j)_{j=1}^{n+1}\in\mathbb{R}^{n+1},$$

を入れたものである．これは，ミンコフスキー (H. Minkowski, 1864–1909) が 1907 年にアインシュタイン (A. Einstein, 1879–1955; ノーベル賞, 1921) の特殊相対性理論を表現する時空 4 次元空間として提出した M^4 の多次元版である．1905 年に発表された特殊相対性理論は，(1) 互いに等速運動する慣性系に対する相対性，と (2) 光速度不変の原理，とに基づいて構成された時間・空間の理論であり，電磁気学をはじめとしてすべての物理法則の基礎になることが分かっている．M^4 では，$x={}^t(x_1,x_2,x_3,x_4)$ において，${}^t(x_1,x_2,x_3)$ が 3 次元空間の座標を表し，$x_4=ct$ は時間 t を光速度 c 倍したものである．

M^{n+1} 上の全単射であって内積を不変にする変換 T は，線形変換であることが分かり，ある $g\in GL(n+1,\mathbb{R})$ を用いて $T(x)=gx$ と書けるが，g は次で与える群 $O(n,1)$ に属する．また，この群の部分群も何種類か与えておこう：

$$\begin{aligned}
O(n,1) &= \{\,g\in GL(n+1,\mathbb{R})\ ;\ {}^t gJ_{n,1}g=J_{n,1}\,\},\\
SO(n,1) &= \{\,g\in O(n,1)\ ;\ \det g=1\,\}=SO_0(n,1)\sqcup SO_0(n,1)s_1s_t,\\
O^{\uparrow}(n,1) &= \{\,g\in O(n,1)\ ;\ g=(g_{ij})_{1\le i,j\le n+1},\ \ g_{n+1,n+1}\ge 1\,\}\\
&= SO_0(n,1)\sqcup SO_0(n,1)s_1,\\
SO_0(n,1) &= SO(n,1)\cap O^{\uparrow}(n,1),
\end{aligned}$$

ここに，記号 $\sqcup$ は互いに素な集合の合併を表し，$s_1=\mathrm{diag}(-1,E_n)$，$s_t=\mathrm{diag}(E_n,-1)$ はそれぞれ空間 x_1-軸の反転 (鏡映)，時間反転，を表す．

群 $O(n,1)$ を全 (斉次) ローレンツ群といい，その単位元 $e=E_{n+1}$ の連結成分 $SO_0(n,1)$ を**固有ローレンツ群**という．空間 $X=M^{n+1}$ にこれらの群が作用しているわけだが，例 1.6, 1.7 の場合とは異なって，群の作用は推移的ではない．固有ローレンツ群による M^{n+1} の軌道分解は次のようになる：

二葉双曲面	$L_R^{\varepsilon}=\{\,x\in M^{n+1}\ ;\ \langle x,x\rangle_L=R^2,\varepsilon x_{n+1}>0\,\},\ \ R>0,\varepsilon=\pm,$
一様双曲面	$S_R=\{\,x\in M^{n+1}\ ;\ \langle x,x\rangle_L=-R^2\,\},\ \ R>0,$
光　錐	$C^{\varepsilon}=\{\,x\in M^{n+1}\ ;\ \langle x,x\rangle_L=0,\ \varepsilon x_{n+1}>0\,\},\ \ \varepsilon=\pm,$
原　点	$\{\,O\,\}=\{\,\mathbf{0}\in M^{n+1}\,\}.$

その他の群 $O(n,1)$ などによる軌道分解は，上の $SO_0(n,1)$-軌道を適宜合併すればよい．実際に特殊相対性理論で使われるのは，4次元の M^4 である．平行移動の群 (並進群) $\mathbb{R}^4$ と $SO_0(3,1)$ との半直積として与えられる**非斉次ローレンツ群** $\mathbb{R}^4 \rtimes SO_0(3,1)$ の既約ユニタリ表現の分類と構成に利用される (**5.7** 節参照).

この M^4 に対する図を書くのは難しいので，その退化版 (空間部分が2次元) の M^3 の場合に $SO_0(2,1)$ による上の軌道分解を図示しておこう．

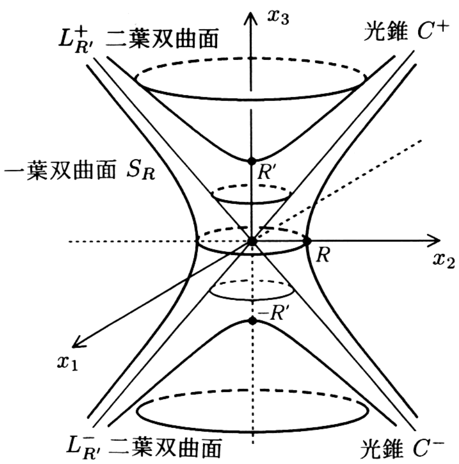


図 1.19. 3次元ミンコフスキー空間の固有ローレンツ群による軌道分解

問題 1.14. 下で与えられる 2×2 行列 $v_2(\tau)$ の引き起こす変換を2次元の双曲的回転という．これはローレンツ (H.A. Lorentz, 1853–1928) がマイケルソン-モーリーの「エーテルの静止系に対する地球の相対運動を検出する」実験 (「閑話休題 9」参照) の否定的結果をうけて，電磁現象を説明するために 1893 年に提出したローレンツ収縮の仮説にでてくる変換と本質的に同じものである．

$$v_2(\tau) = \begin{pmatrix} \cosh\tau & \sinh\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix}, \quad \cosh\tau = \frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2}, \; \sinh\tau = \frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2}. \tag{1.49}$$

(i) $v_2(\tau)$ を対角要素に含んだブロック型対角行列 $g(\tau) = \mathrm{diag}(E_{n-1}, v_2(\tau))$ が固有ローレンツ群 $SO_0(n,1)$ の元であることを示せ．

(ii) $\{\, g(\tau)\,;\, \tau\in\mathbb{R}\,\}$ が一径数部分群をなすこと，すなわち，$g(0)=e$, $g(\tau)g(\tau')=g(\tau+\tau')$ $(\tau,\tau'\in\mathbb{R})$ を示せ．

問題 1.15. (i) 二葉双曲面の上葉 $L^n := L^+_1$ は，$O^{\uparrow}(n,1)$ や $SO_0(n,1)$ のひとつの軌道であることを示せ．

(ii) 点 $x^0 = {}^t(0,0,\ldots,0,1)\in L^n$ のこれらの群における固定部分群は，それぞれ次で与えられることを示せ：

$$\begin{aligned} O'(n) &:= \{\,\mathrm{diag}(u,1)\,;\, u\in O(n)\,\}, \\ SO'(n) &:= \{\,\mathrm{diag}(u,1)\,;\, u\in SO(n)\,\}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

二葉双曲面の上葉 $L^n := L^+_1$ は，重要な幾何学的対象である．$x,y\in L^n$ に対しては，$\langle x,y\rangle_L \geq 1$ となるので，

$$d_L(x,y) = \mathrm{Arccosh}(\langle x,y\rangle_L) \tag{1.51}$$

とおくと，これが $O^{\uparrow}(n,1)$ で不変な距離を与える：$d_L(gx,gy) = d_L(x,y), g\in O^{\uparrow}(n,1)$．この距離空間 (L^n, d_L) は n 次元のロバチェフスキー (N.I. Lobachevskiĭ, 1793–1856) の空間とよばれ，いわゆる**双曲型非ユークリッド空間**を与える．またこれは，負の定曲率空間のひとつ

である．この空間の運動群 $\mathcal{M}(L^n)$ は $O^{\uparrow}(n,1)$ の単位元の連結成分 $SO_0(n,1)$ である．(以上，文献 [平井, II] 参照.)

後の第 5 章ではディラック方程式の，ローレンツ群 $SO_0(3,1)$ の**普遍被覆群** $SL(2,\mathbb{C})$ の下での共変性を論じる．また，第 6 章では，上半平面 $\mathfrak{H}=\{\,z=x+iy\in\mathbb{C}\,;\,y>0\,\}$ やその上の保型関数と関連づけて，$SO_0(2,1)$ の 2 重被覆群である $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現を取り扱う．

1.8 情報処理における誤りの訂正機構と群の役割

1.8.1 素数 p に対する巡回群 $\mathbb{Z}_p$

位数 p の巡回群は，商加群 $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型である．$k, k' \in \mathbb{Z}$ が同じ同値類に入ることを，$k \equiv k' \pmod p$ と書く．剰余類 $k+p\mathbb{Z}$ の代表元として，$k\in\{\,0,1,\,\ldots\,,p-1\,\}$ をとる．$(k+p\mathbb{Z})+(k'+p\mathbb{Z})=(k+k')+p\mathbb{Z}$ であるから，その代表元 k'' は $k''\equiv k+k' \pmod p$ であるが，この k'' を「$k+k'$ を $\bmod p$ で考えた」という．

さらに，演算規則 $(k+p\mathbb{Z})\cdot(k'+p\mathbb{Z}) := kk'+p\mathbb{Z}$, によって，$\mathbb{Z}_p$ に積を導入することができる．この積は結合律を満たす．

いま，p が素数である場合を考える．このとき，上で導入した積は，非常に有効である．実際，$\mathbb{Z}_p$ は体になる．

これを証明するには，代表元 $k\not\equiv 0$ をもつ元 $k+p\mathbb{Z}$ に対して，その逆元の存在を言えばよい．それには，方程式 $kk'\equiv 1 \pmod p$ の解 k' の存在 (と一意性) が分かればよい．r, s を自然数とし，(r,s) をその最大公約数とすれば，ユークリッドの互除法によって，$(r,s)=ar+bs$ となる整数 a, b の存在が分かる．$r=k, s=p$, とすれば，$(r,s)=1$ だから $k'\equiv a \pmod p$ によって k' が求まる．

体 $\mathbb{Z}_p$ はもはやより小さな部分体を含まないので素体(そたい)とよばれる (p はその標数) が，この有限体上のベクトル空間などは，情報処理における誤り訂正とか，通信における暗号とかにおいてしばしば有効に使われている．ここでは草創期の頃の，友人の論文 [有本] に基づいて話をしよう．

1.8.2 p 元群符号系

「計算機を中心とする情報処理においては，符号化，複合化，誤りの訂正などを計算機でおこなうことができる．その場合には，これらの演算がプログラムしやすく，論理設計が容易で，演算に要する時間が少なく，記憶装置も少なくてすむような算法をもつ群符号系を見つけておくことが重要となる.」として，素数 p に対して，p 元(げん)群符号系について論じている．

$\mathbb{Z}_p$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{Z}_p^n$ の部分空間 N をとり，発信する始めの正しい信号は

すべて N に属するとする．N を群符号系といい，N に属する信号ベクトルを**群符号**という．始めの正しい群符号の1つを $x \in N$ とし，それがある伝送系を通って受信したときに $y \in \mathbb{Z}_p^n$ になったとする．$a = y - x$ をエラーベクトルとよぶ．$a + N = y + N$ で y から a が計算できれば，始めの信号は，$x = y - a$ として回復される．$a + N = y + N$ であるから，a は modulo N では分かるが，a を完全に決定するには，まず N をうまく選ばねばならぬ．

$z = {}^t(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ に対して，$\mathrm{supp}(z) := \{ i \in I_n \,;\, z_i \neq 0 \}$ とおく．ここに，$I_n := \{ 1, 2, \ldots, n \}$ は添字の集合である．z のノルム $\|z\|$ として，

$$\|z\| := \left|\mathrm{supp}(z)\right| = \text{「}z_i \neq 0 \text{ となる } i \text{ の個数」} \tag{1.52}$$

とおく（$|A|$ は集合 A の元の個数を表す）．このノルムは次の性質をもつ（証明せよ）：

1) $\|z\| \geq 0$, かつ, $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;　　2) $\|z\| = \|\lambda z\|$ $(\lambda \in \mathbb{Z}_p, \neq 0)$;

3) $\|z + z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$ $(z, z' \in \mathbb{Z}_p^n)$.

定義 1.1. $d = 2e + 1 \leq n$ とする．$\mathbb{Z}_p^n$ の部分空間 N が $(n\ d)$ **部分空間**であるとは，N の 0 でない任意の元 x に対して，$\|x\| \geq d$ となることである．

(i) N を $(n\ d)$ 部分空間とする．$b \in \mathbb{Z}_p^n$ が $\|b\| \leq e$ とすると，剰余類 $b + N$ の b 以外の任意の元 z は，$\|z\| > e$ となる．実際，$z = b + x$ $(\exists x \in N, \neq 0)$ であるから，ノルムの性質 3) により，$\|z\| \geq \|x\| - \|b\| \geq d - e > e$.

(ii) (i) より，剰余類の集合 $\mathbb{Z}_p^n/N$ の完全代表系 R として，$b \in \mathbb{Z}_p^n, \|b\| \leq e$, をすべて含むものがとれる．

(iii) 始めの群符号 $x \in N$ に対し，$y \in \mathbb{Z}_p^n$ を受信したとする．エラーベクトル $a = y - x$ のノルムが e 以下ならば，それは y だけから決まる．実際，$a + N = y + N$ であり，(i) により，a は剰余類 $y + N$ の代表元として一意に決まる．

さて，実際問題として応用可能な符号系を作るには，(イ) $(n\ d)$ 部分空間 N を見つけること，(ロ) (iii) の場合に y から a を具体的に計算するのに，まず modulo N の不確定さを減らしておきたい，(ハ) ノルムが e を超えるエラーベクトルが出てくると，訂正を誤るか訂正しないままになるので，その頻度を小さくしたい，といった課題がある．このうち，(イ) と (ロ) は次の「復号化の方法」によって解決される．

1.8.3 復号化写像と誤り訂正

$\mathbb{Z}_p^n$ から $\mathbb{Z}_p^n$ への線形写像 f でこの核 $N := f^{-1}(0)$ が $(n\ d)$ 部分空間になるものを**復号化写像**といい，それに対応する n 次行列 T を**復号化行列**という．これについては次の定理が成立する．

定理 1.7. (i) 線形写像 f が復号化写像であるための必要十分条件は，それに対応する行列 T において，その $(d-1)$ 個の列ベクトルがつねに 1 次独立であること，である．

(ii) 任意の $(n\ d)$ 部分空間 N に対して，それを核とする復号化写像が存在する．

問題 1.16. 定理 1.7 の (i)，(ii) を証明せよ．

我々の p 元符号化に使っている $(n\ d)$ 部分空間 N に対する f, T をとる．すると，$f(z) = f(z') \Leftrightarrow z + N = z' + N$, であるから，$f(z)$ の全体 R_f は，対応 $z + N \mapsto f(z)$ によって，剰余類の空間 $\mathbb{Z}_p^n/N$ と 1 対 1 に対応する．エラーベクトル $a = y - x$ に対して，始めの信号は $x \in N$ であるから，復号化ベクトル $c := f(a) = f(y)$ は受けた信号 y から決まる．

したがって，$\mathbb{Z}_p^n/N$ の完全代表系 R と R_f との間に $R \ni z \leftrightarrow f(z) \in R_f$ の 1 対 1 対応のリストを作成しておけば，それを用いて，ノルムが e 以下の誤りは完全に訂正できる．すなわち,「エラーベクトル a のノルムが e 以下ならば，$a \in R$ であるから，$R_f \ni c = f(a) \to a \in R$ によって，a が決定できる.」

1.8.4 誤り訂正機構

信号の長さ n を大きくしたとき，$\mathbb{Z}_p^n/N$ の位数も大きくなり，R, R_f の対応リストも大きくなり，参照機能も込めて大きな記憶容量を食う．日本の電機会社が，電子計算機の各社第 1 号機の設計・製造に取りかかっていた 1960 年前後には，記憶装置として磁気ドラムや磁気コアメモリが使われ，記憶容量は貴重な資源であった．そこで提案されているのが，特別な形の f を選んで，エラーベクトル a を復号化ベクトル $c = f(a) = f(y)$ からできるだけ簡単に計算する方法である．

まず，素数 p を大きくとって，$p > n$ と仮定する．そして，f に対応する行列 T として，

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{\ell-1} & 3^{\ell-1} & \cdots & \cdots & n^{\ell-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\ell = d - 1 = 2e < n)$$

をとる．すると，rank $T = \ell$ で，さらに，T の列ベクトルはどの ℓ 個をとっても互いに 1 次独立である (Vandermonde の行列式を使え)．したがって，$N = f^{-1}(0)$ は $(n\ d)$ 部分空間である．この f に対して，復号化ベクトル $c = f(a)$ から，

(1) $\|a\| = |\mathrm{supp}(a)| \le e$ の仮定の下に，$k = \|a\|$ を求める，ついで

(2) $\mathrm{supp}(a)$ の各元を求め，最後に

(3) $a = {}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 自身を求める，

という手順で訂正する機構を作る．

(1) 復号化ベクトル c を $c = {}^t(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = {}^t(c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1}, 0, \ldots, 0)$ とおくと，$c_q = \sum_{i \in I_n} i^q a_i$ $(q < \ell)$ である．次の行列式を考える $(2m \leq n)$：

$$\det H_m, \quad H_m = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{2m-1} \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

ここに，上の c_q の表示を代入して，各列とも，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の和に従って展開する．第 $1, 2, \ldots, m$ 列からそれぞれ $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$ の項を拾えば，

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \cdot \begin{vmatrix} {i_1}^0 & {i_2}^1 & {i_3}^2 & \cdots & {i_m}^{m-1} \\ {i_1}^1 & {i_2}^2 & {i_3}^3 & \cdots & {i_m}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {i_1}^{m-1} & {i_2}^m & {i_3}^{m+1} & \cdots & {i_m}^{2m-2} \end{vmatrix},$$

ここに，$i_1, i_2, \ldots, i_m$ は I_n を走る．上の行列式は，ヴァンデルモンドの行列式に帰着させて，

$$i_2 {i_3}^2 \cdots {i_m}^{m-1} \cdot \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_m), \quad \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_m) := \prod_{1 \leq s < r \leq m} (i_r - i_s),$$

と計算される．$k = \|a\|$ とし，$\mathrm{supp}(a)$ を $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ とすれば，

$$\begin{cases} \det H_m = 0 & (m > k \text{ のとき}), \\ \det H_k = a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \cdot \Delta(n_1, n_2, \ldots, n_k)^2 \neq 0, \end{cases} \tag{1.54}$$

となる．かくて，$\det H_m$ を m に従って順次計算すれば，$k = \|a\|$ が求まる．

(2) $A := \mathrm{supp}(a)$ の元 $n_1, n_2, \ldots, n_k$, を求めるには，λ に関する次の k 次方程式を解けば，k 個の解がちょうど A を与える：

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{2k-2} & \lambda^{k-1} \\ c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{2k-1} & \lambda^k \end{vmatrix} = 0. \tag{1.55}$$

実際，行列式の第 $k+1$ 列を簡単化することによって，これを書き換えると

$$\begin{vmatrix} c_0\lambda - c_1 & c_1\lambda - c_2 & c_2\lambda - c_3 & \cdots & c_{k-1}\lambda - c_k \\ c_1\lambda - c_2 & c_2\lambda - c_3 & c_3\lambda - c_4 & \cdots & c_k\lambda - c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k-1}\lambda - c_k & c_k\lambda - c_{k+1} & c_{k+1}\lambda - c_{k+2} & \cdots & c_{2k-2}\lambda - c_{2k-1} \end{vmatrix} = 0$$

となる．そこで，この左辺に，$c_q\lambda - c_{q+1} = \sum_{i\in A}(i^q\lambda - i^{q+1})a_i = (\lambda - i)i^q a_i$ を代入して，$\det H_m$ の展開のときと同様に考えれば，

$$\text{上式左辺} = \prod_{i\in A}(\lambda - i) \times a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_k}\Delta(n_1, n_2, \ldots, n_k)^2.$$

計算機では，(1.55) を第 $k+1$ 列で展開した式の λ に，$1, 2, \ldots, n$ を順次代入して解を求めるのが簡単であろう．

(3) $A = \mathrm{supp}(a) = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ が分かったので，$f(a) = c$ を a_i $(i \in A)$ の方程式としてみれば，$z_r = a_{n_r}$ とおいて，

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \cdots\cdots\cdots + z_k = c_0, \\ n_1 z_1 + n_2 z_2 + \cdots\cdots + n_k z_k = c_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n_1^{k-1} z_1 + n_2^{k-1} z_2 + \cdots + n_k^{k-1} z_k = c_{k-1}. \end{cases} \tag{1.56}$$

これを解いて，エラーベクトル a が得られる．これにより，始めの信号 $x = a - y$ が，受信した信号 y から回復される．

注意 1.1. 行列 H_m はハンケル行列とよばれる．有本氏によれば，「実は，1960 年の夏に考えついたこの誤り訂正符号は本質的には RS (リードソロモン) 符号と同等であった．そして復号化のアルゴリズムは後に Peterson のアルゴリズム (1960 年 12 月発表) と同等であった．もちろん，それは後に知ったことなので，⋯⋯」また，ここに現れた RS 符号や復号化アルゴリズムは，戸田方程式のソリトン解と関係することが最近分かってきた，とのことである (応用数理学会誌『応用数理』12 巻 1 号 (2002)，応用数理の遊歩道 (28), pp.72–74).

第2章
群の作用と群の線形表現

第1章での準備の後，いよいよ群の表現論に向かって船出しよう．はじめに，**2.1** 節では，群 G がある対象 X に作用しているとき，それは，X 上の関数の空間への作用に自然にもち上げられて，G の線形表現を惹(ひ)き起こすことを見る．ここでの関数は複素数値である場合から一般化されて，G が線形に働くベクトル空間の値をとってもよい (変換公式1参照)．第1章からここまでの結果を踏まえて，**2.2** 節ではあらためて群の線形表現に関する基本的な定義などを与える．**2.3** 節ではそれを具体例を通して体得する．**2.4** 節では，群の表現論の研究において基本的な役割を果たすシュアの補題について述べる．**2.5** 節では，ヒルベルト空間に関する簡単な復習ののち，ユニタリ表現に関する基本的な事実を述べ，具体例 (変換公式2を含む) を与える．

2.1　群の作用を関数への作用に上げる

関数への作用

群 G が集合 X に作用しているとする．X 上の関数 f は比喩的に言えば，土台 X 上の森を表し，地点 x に高さ $f(x)$ の木が生えている状況を示す．地面が地震や地滑りによって動けば，その上にのっている木々も動いて森の形が変わる．この比喩は事態の一面を表すにすぎないが，感覚的にはよく分かる．

さて，こういうわけで，土台 X を $g \in G$ が，$X \ni x \to gx \in X$ と動かしているとき，X 上の関数はどう動かされるか？　図で考えると，地点 x にあった高さ $f(x)$ の木は地点 $y = gx$ に移っていったことになる．すると新しくできた森の形 F では，$F(y) = f(x)$ と

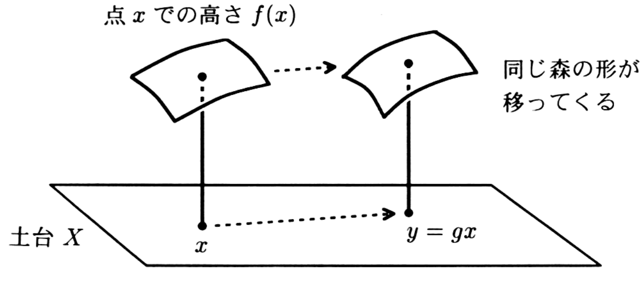


図 2.1. 関数への $g \in G$ の作用

なっている．したがって，$F(gx) = f(x)$ から次が分かる：

$$f \xrightarrow{g} F, \quad F(x) = f(g^{-1}x) \quad (x \in X). \tag{2.1}$$

このとき，F を $R(g)f$ とおけば，それは g が関数 f に作用した結果である．そして，$R(e)f = f$, $R(gg')f = R(g)(R(g')f)$ $(g, g' \in G)$ となる．

ベクトル値関数への作用

V をベクトル空間とする．X 上の V-値関数 $\boldsymbol{f}$ があるとき，それの変換公式はどうなるか？

例として，球面 $X = S^2$ 上の接ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を考える．この場合，$V = \mathbb{R}^3$ の値をとる X 上の関数と思える．群 $SO(3)$ の作用を見てみよう．下の図 2.2 から分かるように，$u \in SO(3)$ によって土台の点 $x \in X$ は，ux に移るが，点 x での値 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x)$ は ux に移るときに u による変換を受けて，$\varpi_1(u)\boldsymbol{v} = \varpi_1(u)(\boldsymbol{f}(x))$ となる．ここに，ϖ_1 は回転群 $SO(3)$ の V 上の自然な表現 $\varpi_1(u)\boldsymbol{w} = u\boldsymbol{w}$ $(\boldsymbol{w} \in V)$ である．したがって，変換後のベクトル値関数 $\boldsymbol{F}$ を $T(u)\boldsymbol{f}$ と書くと，

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{u} T(u)\boldsymbol{f}, \quad \big(T(u)\boldsymbol{f}\big)(x) = \varpi_1(u)\big(\boldsymbol{f}(u^{-1}x)\big) \quad (x \in X). \tag{2.2}$$

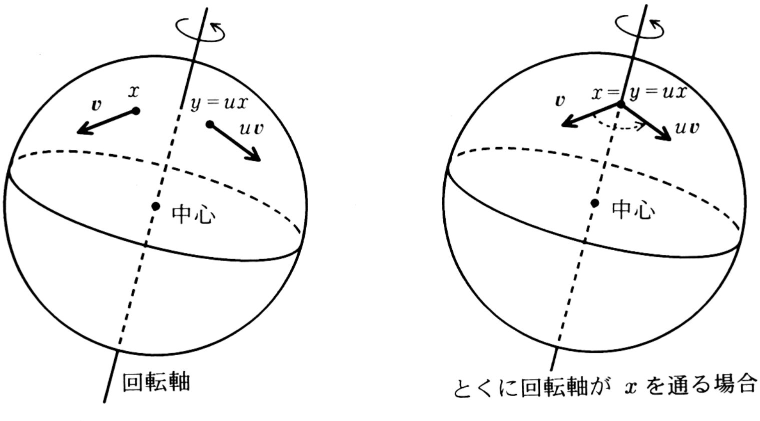


図 2.2. S^2 上の接ベクトル場への回転 u の作用

別の例として，空気の流れの中に球面 S^2 があってそれが回転する場合を考えよう．$u \in SO(3)$ をとる．球面 S^2 上の点 x における空気の流れは，その方向と速さをまとめて 3 次元ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x) \in W = \mathbb{R}^3$ で表される．この W の上には $G = SO(3)$ の恒等表現 $\mathbf{1}_G : G \ni u \to I_W$, が働いていると解釈するのがよい．$x$ が u によって変換されていった点 $y = ux$ における流れは，相変わらずもとのままの $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{f}(y)$ である．したがって，この場合には，変換された関数 $\boldsymbol{F} =: T_0(u)\boldsymbol{f}$ は，$\boldsymbol{F}(y) = \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{f}(ux)$，ゆえに，$(T_0(u)\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}(u^{-1}x)$ $(x \in S^2)$ を得る．

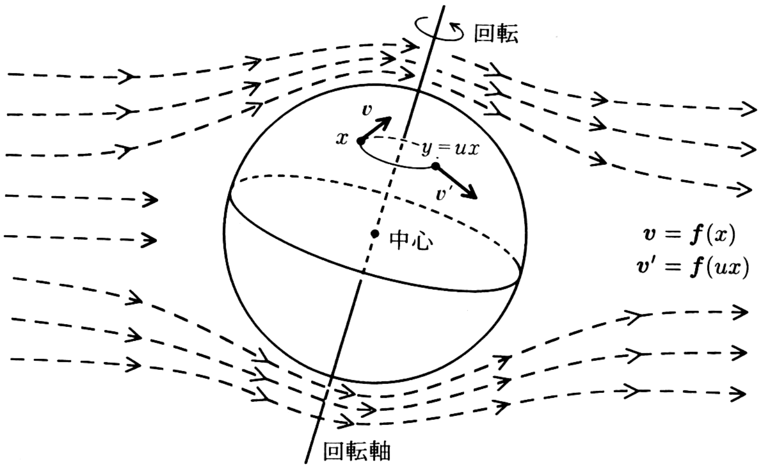


図 2.3. 空気の流れの中にある球面 S^2 の回転

関数の変換の一般公式

G が X に作用しているとする．さらに，ベクトル空間 V に G の表現 ϖ が働いているとする．このとき，X 上の V-値関数 $\boldsymbol{f}$ に対する $g \in G$ の作用 $T_\varpi(g)$ は，次の公式で与える：

変換公式 1 ：
$$\big(T_\varpi(g)\boldsymbol{f}\big)(x) = \varpi(g)\big(\boldsymbol{f}(g^{-1}x)\big) \quad (x \in X). \tag{2.3}$$

この公式の実例としては，例えば，**4.4, 5.5** 節の波動関数の変換公式を参照せよ．

問題 2.1. 上の変換公式について，$T_\varpi(e)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$，$T_\varpi(gg')\boldsymbol{f} = T_\varpi(g)\big(T_\varpi(g')\big)\boldsymbol{f}$ $(g, g' \in G)$, を証明せよ．

2.2 群の線形表現

前章では群の表現がどのように自然な形で立ち現れてくるかを，予告編として説明した．本章では群の線形表現の本編が始まる．なお，リー環(あるいは，リー代数)の表現は，第9章以降の主題である．

まず前提になるいくつかの定義を，少々天下り的ではあるが，さっさと与えてしまおう．それらの定義の意味は，物理学，化学，その他への応用なども見ていくうちにおいおいに明らかになってくるであろう．

G を群とする．体 $\mathbb{K}$ を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする．V を体 $\mathbb{K}$ 上の空間とする．V が有限次元でないときには，一般には，位相の入った位相ベクトル空間を考える．V 上の (すなわち，$V \to V$ の) 連続な線形作用素の全体を $\mathcal{L}(V)$ と書く．$S \in \mathcal{L}(V)$ に対し，逆写像 S^{-1} が存在して，連続であるとき，$\mathcal{L}(V)$ の可逆元とよばれるが，その全体を $\mathcal{L}(V)^\times$ と

書く.

群の線形表現に関する基本的な定義

定義 2.1. 群 G の V 上の**線形表現**(体 $\mathbb{K}$ 上の表現ともいう)とは, G から線形作用素の群 $\mathcal{L}(V)^{\times}$ への準同型である. すなわち, 各 $g \in G$ に, $T(g) \in \mathcal{L}(V)^{\times}$ が対応して,

$$T(e) = I_V, \quad T(gg') = T(g)T(g') \ \ (g, g' \in G), \tag{2.4}$$

となるものである. 体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるのに従って, T を**実表現**または**複素表現**とよぶ. 特に体について言及がなければ, 複素表現を考えている.

さらに, G が位相群であるときには, 対応 $G \ni g \mapsto T(g) \in \mathcal{L}(V)^{\times}$ に連続性を要求する. その連続性には次の種類がある:

(I) 強連続性: V は位相ベクトル空間 (例えば, バナッハ空間, ヒルベルト空間) であって, 任意の $v \in V$ に対して, 写像 $G \ni g \mapsto T(g)v \in V$ が連続である;

(II) 弱連続性: 任意の $v \in V, w \in V^*$ に対して, 写像 $G \ni g \mapsto (T(g)v, w) \in \mathbb{K}$ が連続である.

ここに, V^* は V の**双対空間**とよばれ, V 上の連続線形汎関数 $w : V \to \mathbb{K}$ の全体のなすベクトル空間である. そして, $(v, w) := w(v), v \in V, w \in V^*$, は V と V^* との間の自然な対(つい) (pairing) を与える内積である. また, $(T(g)v, w)$ の形の G 上の関数を, 表現 T の**行列要素**とよぶ. 表現空間 V の次元をもって, 表現 T の**次元**とする.

定義 2.2. 群 G の $\mathbb{K}$ 上の線形表現 (T, V) が与えられているとき, V の閉部分空間 V_1 が**不変である**とは, $T(g)V_1 \subset V_1 \ \ (g \in G)$ ということである. 表現 (T, V) が**既約である**とは, 不変な閉部分空間が自明なもの (V と $\{\mathbf{0}\}$) に限るときである.

群 G の 1 次元表現は当然既約であるが, G の**指標**とよばれる. 指標のうち有界なものは必然的にユニタリになる, すなわち, $|\chi(g)| \equiv 1$. G が可換なとき, 連続なユニタリ指標の全体を $\widehat{G}$ と書き, G のポントリャーギン (L.S. Pontryagin) の**双対**(そうつい) (dual) とよぶ. これは積

$$(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g) \quad (\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}, \ g \in G)$$

によってまた可換群になる.

定義 2.3. 群 G の $\mathbb{K}$ 上の 2 つの線形表現 $(T_j, V_j), j = 1, 2$, が与えられているとき, これらが**同値である**とは, V_1 と V_2 との同型を与える写像 $S : V_1 \to V_2$ があって, $ST_1(g) = T_2(g)S$, すなわち, $ST_1(g)S^{-1} = T_2(g) \ \ (g \in G)$, となるときである. ($S$ は全単射で, S, S^{-1} は共に連続)

定義 2.4. 群 G の $\mathbb{K}$ 上の2つの線形表現 $(T_j, V_j), j = 1, 2,$ が与えられているとき，連続な線形写像 $S : V_1 \to V_2$ が**相関作用素** (intertwining operator) であるとは，S が表現作用素と可換，すなわち，$ST_1(g) = T_2(g)S \ (g \in G)$ となるときである．T_1 から T_2 への相関作用素の全体は線形空間をなすが，それを $I(T_1, T_2)$ または $I(V_1, V_2)$ と書く．$T_1 = T_2$ のときには，これは $\mathbb{K}$ 上の多元環をなす．

相関作用素 S は表現 T_1 と T_2 とを相互に関連づける．また，$I(T_1, T_1)$ は T_1 自身の表現としての構造を与える．

線形表現の意味

さて，いささか哲学めくが，

「群の実体とは，その半身は (1) その構造や性質，であり，他の半身は (2) その作用 (作用されるものも込めて) の有り様(よう)，である.」

群 G の線形表現を調べることは，群の構造や性質を明らかすると同時に，群の実体の半身である「群の作用」を「線形近似によって調べる」ということである．

また，これは，作用される対象が「群作用によって表される対称性」をもっており，それを利用してこの対象を研究する，ことにもなる．

例えば，有限群論は，生まれ落ちたときからその表現論と一緒だった．そこでは，群とその作用は一体不可分なものとして取り扱われる．しかしながら，群が有限だからといってその表現が簡単に解明されるとは限らない．むしろその反対に結構難しい．しょっちゅうどこにでも顔を出す，対称群 $\mathfrak{S}_n$ や交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現についても，現在でも詳しく研究が続けられている．

注意 2.1. リー環 (またはリー代数) の表現に関する定義は，**3.7**，**4.5**，**4.8** 節での例を踏まえて，一般には第9章 **9.1.1** で与えられている．リー群とリー環の対応については，**3.7**，**4.5**，**4.8**，**5.3**，**6.2** 節を見よ．

2.3 線形表現の例

例 2.1 (四面体群および $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$ の線形表現)**.** 四面体群とその拡大 $G(T_4) \subset G'(T_4)$ を考えてみよう．これらは自然に $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$ に同型である．**1.5** 節 (1.37) 式により行列表現 ϖ が得られているが，これは $V = \mathbb{C}^3$ 上の線形表現である．この表現 ϖ は，実は実数体 $\mathbb{R}$ 上で定義され (すなわち，$\mathbb{R}^3$ 上で定義され) ており，対称群 $\mathfrak{S}_4$ がどのように T_4 に作用するか，そして (それを通して) どのように E^3 に作用するかを，分かりやすく表示している．同型対応 $\rho' : G'(T_4) \to \mathfrak{S}_4$ を通して，ϖ を $\mathfrak{S}_4$ の表現と見たものを ϖ_0 と書く．

$$\rho'(a) = (2\ \ 3\ \ 4), \quad \rho'(b) = (1\ \ 2)(3\ \ 4), \quad \rho'(s) = (3\ \ 4),$$

であるから，$\mathfrak{S}_4$ の標準的な生成元 $s_1 = (1\ 2)$, $s_2 = (2\ 3)$, $s_3 = (3\ 4)$, について ϖ_0 を書くと (1.37) 式から次を得る：

$$\varpi_0(s_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$
$$\varpi_0(s_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varpi_0(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

これは，既約表現である (問題 2.2 参照)．さらに，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ を置換 σ の符号とすると，sgn は $\mathfrak{S}_4$ の 1 次元表現 (指標) である．他の指標は，自明なもの $\mathbf{1}_G : G \ni g \to 1$ に限る．3 次元表現 $\varpi_1(\sigma) := \mathrm{sgn}(\sigma)\varpi_0(\sigma)$ は $\mathrm{sgn} \otimes \varpi_0$ とも書かれるが，既約であり，その表現作用素は $\varpi_1(s_j) = -\varpi_0(s_j)$ $(1 \le j \le 3)$ である．

対称群 $\mathfrak{S}_4$ の既約表現の同値類は 5 個あって，上の 4 個に，次で与えられる 2 次元表現 ϖ_2 を合わせると完全代表系となる：

$$\varpi_2(s_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \varpi_2(s_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \varpi_2(s_3) = \varpi_2(s_1). \tag{2.6}$$

なお，この場合は，$\mathrm{sgn} \otimes \varpi_2$ はもとの ϖ_2 に同値である．これらの $\varpi_2(s_j)$ は 2 次元空間での原点を通るある直線での折り返し変換を表す (問題 2.5 参照)．

以上数え上げた 5 個の既約表現は，群 $\mathfrak{S}_4$ の「作用の仕方」を代表していることになる．

問題 2.2. 対称群 $\mathfrak{S}_4$ の表現 ϖ_0 が既約表現であることを示せ．
〔ヒント： あとで与えるシュアの補題 (定理 2.1) を用いるのが簡単である.〕

問題 2.3. 対称群 $\mathfrak{S}_4$ の 2 つの表現 ϖ_0, ϖ_1 は互いに同値ではないことを示せ．
〔ヒント： シュアの補題を用いよ.〕

問題 2.4. (2.6) 式で与えられた ϖ_2 が確かに対称群 $\mathfrak{S}_4$ の表現を与えることを示せ．
〔ヒント：(方法 1) $\mathfrak{S}_4$ から $\mathfrak{S}_3$ への自然な準同型を通して，$\mathfrak{S}_3$ の 2 次元表現を $\mathfrak{S}_4$ から見たものが ϖ_2 であることを示す ([平井 I, **11.4** 節] 参照)．
(方法 2) $\varpi(s_j), j = 1, 2, 3,$ が (1.8)−(1.9) の基本関係式を満たすことを行列の計算によって示せばよい.〕

問題 2.5. (i) 2 次元空間において，原点を通る直線 $y = kx$ (k は定数) に関する折り返し変換は下の (2.7) の行列 $s(k)$ で表されることを示せ．
(ii) 表現作用素 $\varpi_1(s_j), \varpi_2(s_\ell)$ は，2 次元空間での原点を通るある直線に関する折り返し変換からきていることを示せ．

$$s(k) = \begin{pmatrix} \frac{-k^2+1}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

例 2.2 (ユークリッド運動群のユニタリ表現). 先に **1.6** 節でヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3; dx)$ 上に回転群 $SO(3)$ の表現 R を与えたが，これをユークリッド運動群 $\mathcal{M}(E^3)$ の表現に拡げることができる．$g = (a, u) \in \mathcal{M}(E^3) = \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$ とすると，$g{\cdot}x = ux + a$ であって，測度 dx はこの変換によって不変，すなわち，$x' = g{\cdot}x$ とおくと，$dx' = dx$. また，$g^{-1}{\cdot}x = u^{-1}(x-a) = u^{-1}x - u^{-1}a$ であるから，

$$\big(R'(g)f\big)(x) := f(g^{-1}{\cdot}x) = \boldsymbol{f}(u^{-1}x - u^{-1}a) \tag{2.8}$$

とおくと，群 $\mathcal{M}(E^3)$ の表現 R' を得る．表現作用素 $R'(g)$ はつねにユニタリであるから，R' はユニタリ表現である．

例 2.3 (3 次元回転群の表現). 回転群 $SO(3)$ の表現 $(R, \mathcal{H})$, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3; dx)$ をもうすこし詳しく見てみよう．$x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ を極座標 (r, θ, φ) で表すと，

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\sin\theta\,\cos\varphi, \\ x_2 &= r\,\sin\theta\,\sin\varphi, \\ x_3 &= r\,\cos\theta, \\ &(0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ -\pi \le \varphi < \pi). \end{aligned} \tag{2.9}$$

このとき，$dx = dx_1dx_2dx_3 = r^2dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ となる．(θ, φ) は単位球面 S^2 の座標である．

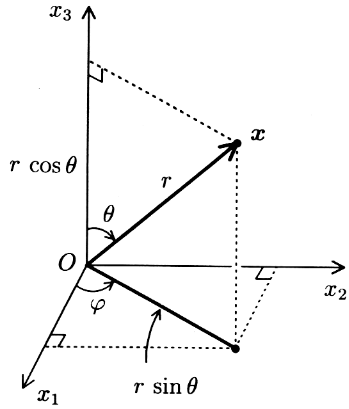


図 2.4. E^3 における極座標 (r, θ, φ)

点 $\omega \in S^2$ の座標を (θ, φ) とするとき，S^2 上の測度を，$d\mu_S(\omega) := \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ によって与える．すると，測度空間として，対応 $\Psi : \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto (r, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times S^2$ によって，

$$dx = r^2dr \times d\mu_S, \quad (\mathbb{R}^3, dx) \cong (\mathbb{R}_+, r^2dr) \times (S^2, d\mu_S), \tag{2.10}$$

と直積に分解できる．ここに，$\mathbb{R}_+ := \{\, r \in \mathbb{R}\,;\ 0 < r < \infty \,\}$.

測度空間としてのこの分解に即して，ヒルベルト空間のテンソル積分解ができる．実際，$\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{R}_+; r^2dr)$, $\mathcal{H}_2 := L_2(S^2; d\mu_S)$ とおき，$F_j \in \mathcal{H}_j\ (j = 1, 2)$ に対し，$f(x) = F_1(r)\,F_2(\omega)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} |F_1(r)|^2\,r^2dr \times \int_{S^2} |F_2(\omega)|^2\,d\mu_S(\omega) \\ &= \|F_1\|^2 \cdot \|F_2\|^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．この双線形写像 $(F_1, F_2) \mapsto f$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ のテンソル積と $\mathcal{H}$ との同型を導く：$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}$.

回転群の作用は，$\Psi(ux) = (r, u\omega)$ となって，S^2-成分にのみ働く．したがって，測度の不変性 $dx' = dx$, $x' = ux$, から，S^2 上の μ_S の不変性 $d\mu_S(u\omega) = \mu_S(\omega)$ を得る．$SO(3)$ の表現 R は次のテンソル積分解をもつ：

$$\begin{aligned}\big(R, L_2(\mathbb{R}^3; dx)\big) &\cong \big(\mathcal{I}, L_2(\mathbb{R}_+;\, r^2dr)\big) \otimes \big(R'', L_2(S^2\,; d\mu_S)\big), &(2.12)\\ \big(R''(u)F_2\big)(\omega) &= F_2(u^{-1}\omega)\\ &\quad (F_2 \in L_2(S^2;\, \mu_S), u \in SO(3), \omega \in S^2), &(2.13)\end{aligned}$$

ここに，$\mathcal{I}$ は $SO(3) \ni u \mapsto I_{\mathcal{H}_1}$ となる自明表現を表す．したがって，このテンソル積の第 1 成分は，第 2 成分での表現 R'' の重複度を表している．

水素原子の分子軌道法 (**1.6** 節) に現れるのは実質的にこの表現 $\big(R'', L_2(S^2;\, \mu_S)\big)$ であるから，またあとで R'' の既約表現への分解を論ずる (**3.5, 3.7** 節を見よ)．

問題 2.6. 公式 (2.10) を証明せよ．　〔ヒント：変数変換のヤコビアンを計算せよ.〕

問題 2.7. E^3 の上の測度 dx が回転群 $SO(3)$ (あるいは $O(3)$) に関して不変であることから，球面 S^2 上の測度 $d\mu_S(\omega)$ も不変であることを示せ．

2.4 シュアの補題

線形表現を取り扱う際に基本的であるシュア (Issai Schur) の補題といわれる命題を示そう．これは表現の既約性，同値性などを調べるときに重要な働きをする．ここでは線形表現のことを単に表現とよぶ．

定理 2.1 (シュアの補題： 有限次元の場合)．

(i) 群 G の 2 つの有限次元線形表現 (T_j, V_j) $(j = 1, 2)$ が共に既約ならば，0 でない任意の相関作用素は可逆である．

(ii) 複素数体上の有限次元表現 (T, V) が既約であるためには，すべての相関作用素がスカラー作用素になることが必要である．

証明．(i) 相関作用素 $S: V_1 \to V_2$ の核 $\mathrm{Ker}(S) \subset V_1$ および像 $\mathrm{Im}(S) \subset V_2$ は共に G-不変である．$S \neq 0$ に対しては，既約性から，$\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$，$\mathrm{Im}(S) = V_2$．したがって，S は全単射である．

(ii) 相関作用素 S に対し，その固有値の 1 つを λ とする．作用素 $S' = S - \lambda I_V$ はまた相関作用素であって，$\mathrm{Ker}(S') \neq \{0\}$ である．したがって，$\mathrm{Ker}(S') = V$, すなわち，$S = \lambda I_V$. □

このシュアの補題は，位相ベクトル空間上の線形表現の場合にはいろいろな形に一般化される．この場合には，表現にも相関作用素にも連続性を要求する．ここでは，バナッハ空間，

ヒルベルト空間の場合に述べるが，これらの空間に馴染みのない方は読み飛ばしてもらえばよい．(ヒルベルト空間の基本事項については，以下の **2.5.1** 参照.)

また，リー環の表現に対するシュアの補題とその応用については，**9.3** 節に述べられている．

(i′) 群 G のバナッハ空間 V_j $(j=1,2)$ 上の表現 (T_j, V_j) $(j=1,2)$ が共に既約ならば，任意の全射相関作用素は可逆である．

証明： 相関作用素 $S \neq 0$ に対し，$\mathrm{Ker}(S)$ は閉部分空間で G-不変であるから，$\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$．よって，S^{-1} が存在するが，これは閉グラフ定理によって，連続である． □

(ii′) バナッハ空間上の表現 (T, V) の任意の相関作用素が必ず V の $\{0\}$ でないある有限次元の部分空間を不変にする，とする．このとき，T が既約であれば，すべての相関作用素がスカラー作用素になる．

(**使い方：** G を中心有限の半単純リー群，K をその極大コンパクト部分群とすると，G の表現 T を K への制限 $T|_K$ とともに考察する.)

(iii′) ヒルベルト空間上のユニタリ表現に対しては，すべての相関作用素がスカラー作用素になることが，既約であるための必要十分条件である (次節参照).

2.5 ユニタリ表現

一般に，群 G の線形表現 T に対して，その表現空間を $V(T)$ と書く．いま，$\mathcal{H} = V(T)$ が複素ヒルベルト空間であって，各表現作用素 $T(g), g \in G$, がユニタリであるとき，T を**ユニタリ表現**とよぶ．

2.5.1 ヒルベルト空間とその上の線形作用素

ここで，ヒルベルト空間の抽象的な定義や簡単な性質を思い出しておこう．

体 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) とし，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V 上の**対称な内積** (または**エルミート内積**) とは，写像 $V \times V \ni (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{K}$ であって，$v_1, v_2, v, w \in V$，$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して，

$$\begin{aligned} &\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \beta \langle v_2, w \rangle, \\ &\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad (\text{または，} \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}\ ), \end{aligned} \tag{2.14}$$

を満たすものである．V が**前ヒルベルト空間**であるとは，V に対称 (またはエルミート) 内積があって，それが**正定値**であること，すなわち，

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \ (v \in V), \quad \text{かつ，} \quad \langle v, v \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ v = 0 \tag{2.15}$$

となることである．このとき，$v \in V$ のノルムとして，$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ とおくと，**シュワルツの不等式**：$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$ が成り立つ．これから

$$\|v - w\| \le \|v\| + \|w\| \quad (\text{三角不等式})$$

を得る．$v, w \in V$ に対し，$\mathrm{dist}(v, w) := \|v - w\|$ とおくと，これは距離の公理を満たす．V が距離空間として完備である (すなわち，すべてのコーシー列が収束する) とき，$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に従って，**実**または**複素ヒルベルト空間**であるという．

記号を変えて，ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ と書く．2つのベクトル $v, w \in \mathcal{H}$ が $\langle v, w\rangle = 0$ となっているとき，互いに**直交**しているという．直交するベクトルの系 $\{\, e_j\,;\, j \in J \,\}$ (J は添字集合) が**正規**であるとは，ベクトルの長さがすべて $\|e_j\| = 1$ のときである．$\{\, e_i\,;\, 1 \le i \le n \,\}$ を正規直交系とする．任意の $v \in \mathcal{H}$ に対して，$a_i = \langle v, e_i\rangle$ を係数とする1次結合 $\sum_{1\le i\le n} a_i e_i$ によって，v を近似すると，その誤差の評価は，

$$\Bigl\|v - \textstyle\sum_{1\le i\le n} a_i e_i\Bigr\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{1\le i\le n} |\langle v, e_i\rangle|^2 + \sum_{1\le i\le n} |a_i - \langle v, e_i\rangle|^2 \tag{2.16}$$

となる．これより，$\sum_{1\le i\le n} |\langle v, e_i\rangle|^2 \le \|v\|^2$ (ベッセルの不等式) を得る．これから，1つの正規直交系 $\mathcal{E} = \{\, e_j\,;\, j \in J \,\}$ に対して，$\langle v, e_j\rangle \ne 0$ となる $j \in J$ の集合は高々可算であることが分かる．$\mathcal{E}$ に対して，次の3つの性質を考える：

(1) $\mathcal{E}$ は正規直交系として極大である；

(2) 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対して，$v = \sum_{j\in J} \langle v, e_j\rangle e_j$；

(3) 任意の $v \in \mathcal{H}$ に対して，$\|v\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle v, e_j\rangle|^2$ (パーセヴァルの等式).

ここで，(2), (3) における和は実質上は可算和である．この3つの性質は互いに同値であることが証明される．この性質をもつ正規直交系 $\mathcal{E}$ を $\mathcal{H}$ の**正規直交基底**といい，添字集合 J の濃度をもって $\mathcal{H}$ の**次元**とする．また，極大な正規直交系の存在はツォルンの補題を用いて示せる．可分な (すなわち，至るところ稠密な可算集合をもつ) ヒルベルト空間の次元は，たかだか可算無限である．

$\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{N}$ は距離空間として完備であるから，それ自身ヒルベルト空間である．$\mathcal{N}$ の正規直交基底 $\mathcal{E}^{\mathcal{N}} = \{\, e_k\,;\, k \in K \,\}$ を含む $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\mathcal{E} = \{\, e_j\,;\, j \in J \,\} (J \supset K)$ が存在する．$\mathcal{N}$ の**直交補空間**を $\mathcal{N}^{\perp} := \{\, v \in \mathcal{H}\,;\, \langle v, w\rangle = 0\ (\forall w \in \mathcal{N}) \}$ と定義する．$\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^{\mathcal{N}}$ は，$\mathcal{N}^{\perp}$ の正規直交基底である．したがって，$\mathcal{N}^{\perp\perp} := \bigl(\mathcal{N}^{\perp}\bigr)^{\perp} = \mathcal{N}$ であり，

$$\mathcal{H} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{\perp}$$

と直交直和に分解する．この分解にそって，$v \in \mathcal{H}$ を

$$v \;=\; P_{\mathcal{N}}\, v \;+\; P_{\mathcal{N}^{\perp}}\, v \qquad (P_{\mathcal{N}}\, v \in \mathcal{N}, P_{\mathcal{N}^{\perp}}\, v \in \mathcal{N}^{\perp})$$

と表すとき，$\mathcal{N}$ の上への**直交射影** $P_{\mathcal{N}}$ は，$P_{\mathcal{N}}\, v = \sum_{k\in K} \langle v, e_k\rangle e_k$ によって与えられる．そして，$(P_{\mathcal{N}})^2 = P_{\mathcal{N}}$, $P_{\mathcal{N}^{\perp}} = I_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{N}}$, である．

連続線形汎関数．$\mathcal{H}$ から $\mathbb{K}$ への線形写像を**線形汎関数**とよぶ．連続な線形汎関数全体 $\mathcal{H}^*$ は自然な和とスカラー倍によってまた $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．これを $\mathcal{H}$ の**双対空間**(そうつい)とよぶ．$\varphi \in \mathcal{H}^*$ に対して，ある $w_\varphi \in \mathcal{H}$ が存在して，$\varphi(v) = \langle v, w_\varphi \rangle$ となる (リースの定理)．実際，φ の核 $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ は閉部分空間であり，その直交補空間は 1 次元で $\mathbb{K}w_0$, $\|w_0\| = 1$, となる．$w_\varphi = \varphi(w_0)\, w_0$ ととればよい．対応 $\mathcal{H}^* \ni \varphi \mapsto w_\varphi \in \mathcal{H}$ は共役線形な同型 (和を和に写し，$\lambda \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍を $\overline{\lambda}$ 倍に写す) を与える．

連続線形作用素．$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ をヒルベルト空間とする．$\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線形作用素を考えるときに，その定義域 $\mathcal{D}(T)$ は $\mathcal{H}_1$ の (閉とは限らぬ) 部分ベクトル空間である．いま，$\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}_1$ の場合を考える．T が連続であるための必要十分条件は，T のノルム

$$\|T\| := \sup_{\|v\| \le 1} \|Tv\| \quad (v \in \mathcal{H}_1)$$

が有限であること，である．この意味で T を**有界線形作用素**ともいう．T に対する共役作用素は $\mathcal{H}_2^* \to \mathcal{H}_1^*$ の作用素としては，$\varphi \mapsto \psi$, $\psi(v) := \varphi(Tv)$, として自然に定義される．これを，$\mathcal{H}_\ell^*$ と $\mathcal{H}_\ell$ との共役同型を通じて言い直すと，**共役作用素** $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ は次のように定義される：

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle \quad (v \in \mathcal{H}_1, w \in \mathcal{H}_2), \tag{2.17}$$

ここに，左辺は $\mathcal{H}_2$ での内積，右辺は $\mathcal{H}_1$ での内積，を表す．有界線形作用素 T が**対称** (または**エルミート型**) であるとは，$T^* = T$ を意味する．U が，**ユニタリ**であるとは，等長：$\|Uv\| = \|v\|$ $(v \in \mathcal{H}_1)$, かつ，全射であること．これは，$U^* = U^{-1}$ と同値である．$P^2 = P$ を満たす作用素を**射影作用素**というが，P が対称であれば，それはある閉部分空間への直交射影である．

有限次元ヒルベルト空間．$\mathcal{H}$ に直交基底 $\{\, e_i \,;\, 1 \le i \le n \,\}$ をとる．写像

$$\mathcal{H} \ni v = \sum_{1 \le i \le n} x_i e_i \longmapsto (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$$

によって，$\mathbb{K}^n$ との同型対応をつけると，$w \to (y_i)_{1 \le i \le n}$ として，

$$\|v\| = \Big(\sum_{1 \le i \le n} |x_i|^2 \Big)^{1/2}, \quad \langle v, w \rangle = \sum_{1 \le i \le n} x_i \overline{y_i},$$

となる．このとき，エルミート作用素にはエルミート行列が対応し，ユニタリ作用素にはユニタリ行列が対応する．

2.5.2 群のユニタリ表現

群のユニタリ表現に関する基本事項を挙げておこう．

定理 2.2. G のユニタリ表現 $(T, \mathcal{H})$ をとる. $\mathcal{H}$ の閉部分空間で G-不変なもの $\mathcal{N}$ があったとすると，その直交補空間 $\mathcal{N}^{\perp}$ はまた不変部分空間である. 直交直和への分解 $\mathcal{H} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{\perp}$ は表現 T の 2 つの部分表現への分解を与える.

証明. $v \in \mathcal{N}^{\perp}$ をとり，$v' = T(g)v$ とおく. $v' \in \mathcal{N}^{\perp}$ を示すには，$\langle v', w \rangle = 0$ $(w \in \mathcal{N})$ が分かればよい. ところで，$U = T(g)$ はユニタリだから，その共役作用素を U^* と書くと，$U^* = U^{-1}$. ゆえに，$T(g)^* = T(g)^{-1} = T(g^{-1})$. すると，

$$\begin{aligned} \langle v', w \rangle &= \langle T(g)v, w \rangle \\ &= \langle v, T(g)^* w \rangle = \langle v, T(g^{-1})w \rangle = 0 \quad (\because T(g^{-1})w \in \mathcal{N}). \end{aligned}$$

□

不変な閉部分空間 $\mathcal{N}$ への直交射影を $P = P_{\mathcal{N}}$ とすると，$T(g)P = PT(g)$ $(g \in G)$，よって，P は表現 T の相関作用素である. また，$Q := I_{\mathcal{H}} - P$ は直交補空間 $\mathcal{N}^{\perp}$ への直交射影であり，これも相関作用素である.

他方，ユニタリ表現 T に対して，相関作用素のなす多元環 $I(T, T)$ は弱閉であり，$*$-不変である. 実際，$S \in I(T, T)$ に対し，$ST(g) = T(g)S$ の両辺の共役をとると，左辺では，$\big(ST(g)\big)^* = T(g)^* S^* = T(g^{-1})S^*$，同じく右辺も計算すれば結局，$T(g^{-1})S^* = S^* T(g^{-1})$ を得る. よって，$S^* \in I(T, T)$. したがって，$I(T, T)$ はフォン・ノイマン (von Neumann) 環である.

その中に含まれる直交射影の集合 $IOP(T)$ は，作用素の強収束の意味で，次のように $I(T, T)$ を生成する.

定理 2.3. 群 G のユニタリ表現 $(T, \mathcal{H})$ をとる. $I(T, T)$ の中で，$IOP(T)$ が代数的に生成する部分環の (強収束に関する) 閉包は $I(T, T)$ 自身である.

証明の方針. $S \in I(T, T)$ をとると，S^* も相関作用素である. よって，

$$A = \frac{1}{2}(S + S^*), \quad B = \frac{1}{2i}(S - S^*)$$

は $I(T, T)$ に入る自己共役作用素であり，S はその線形結合である.

A のスペクトル分解を考えると，A は直交射影の積分 (重ね合わせ) で書ける. これは A がそれらの射影の 1 次結合の強収束極限であることを意味する. また，これらの射影は，$\{A\}$ の bicommutant $\{A\}'' := \big(\{A\}'\big)'$ の元である. ここで，作用素の集合 $\mathcal{A}$ に対して，その**可換子環** (commutant) とは，

$$\mathcal{A}' := \{\, C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\ ;\ CD = DC\ (\forall D \in \mathcal{A}) \,\}$$

である. さて，$\{A\}' \supset \{\, T(g)\ ;\ g \in G \,\}$ であるから，両辺の可換子環をとれば，$\{A\}'' \subset I(T, T)$. また，B についても同様である. これで証明が完結する.

例 2.4 (不変または準不変測度の場合). 測度空間 (X,μ) において，G が X に作用し，各 $g\in G$ に対し，$X\ni x\mapsto gx\in X$ が可測変換であるとする．このとき，測度 μ の g による変換とは，$(g\mu)(D):=\mu(g^{-1}D)$ $(\forall D\in\mathfrak{B})$ と定義される．ここに，$\mathfrak{B}$ は可測集合族を表す．

測度 μ が**不変である**とは，$g\mu=\mu$ $(g\in G)$ となること．また，**準不変である**とは，$g\mu$ がつねに μ と同値であること．このときは，μ が σ **有限**であれば，いわゆるラドン-ニコディム (Radon-Nykodim) の微分

$$J(x,g):=\frac{d\mu'}{d\mu}(x)>0,\quad \mu':=g\mu, \tag{2.18}$$

が μ-almost everywhere (ほとんど至るところ) の意味で存在する．この関数 J は次の 1-コサイクル条件を満たす：

$$J(x,gg')=J(x,g)\,J(g^{-1}x,g')\quad (x\in X,\ g,g'\in G). \tag{2.19}$$

一般に，複素数値の関数 $\alpha(x,g)\neq 0$ が

$$\alpha(x,gg')=\alpha(x,g)\,\alpha(g^{-1}x,g')\quad (x\in X,\ g,g'\in G) \tag{2.20}$$

を満たすとき，**1-コサイクル**という．$\rho\in\mathbb{R}$ に対し，

$$\alpha(x,g):=J(x,g)^{\frac{1}{2}+i\rho}\quad (i=\sqrt{-1})$$

とおけば，これは 1-コサイクルであり，$|\alpha(x,g)|^2=J(x,g)$.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}=L_2(X;\mu)$ 上にパラメータ ρ をもつユニタリ表現の 1 系列が，次の公式によって定義できる：

変換公式 2 ：　$(T_\alpha(g)f)(x):=\alpha(x,g)\,f(g^{-1}x)\quad (x\in X, f\in\mathcal{H}, g\in G).$　(2.21)

問題 2.8. (i)　次の等式を証明せよ：$T_\alpha(e)=I_{\mathcal{H}}, T_\alpha(gg')=T_\alpha(g)T_\alpha(g')$ $(g,g'\in G)$.
(ii)　$T_\alpha(g)$ がユニタリ作用素であることを示せ．

注意 2.2. G が位相群であるとき，連続性：$\|T_\alpha(g)f-f\|\to 0\,(g\to e)$, を示さねばならない．そのためには，$\alpha$ や (G,X) にさらに何らかの条件を科す必要がある．

例 2.5 (実数直線上のアファイン変換群). $X=\mathbb{R}$ 上のアファイン変換とは，$g_{a,b}: x\mapsto ax+b$ $(a\neq 0$ と b は実定数) である．その全体は群をなす．これを $ax+b$ 群とよび慣わしているが，簡単だが重要な例である．$x\in\mathbb{R}$ を縦ベクトル ${}^t(x,1)$ で表せば，$g_{a,b}$ は 2×2 の行列で表される：

$$m(a,b)=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x'\\ 1\end{pmatrix}=m(a,b)\begin{pmatrix} x\\ 1\end{pmatrix},\quad x'=g_{a,b}x. \tag{2.22}$$

$X=\mathbb{R}$ 上にルベーグ測度 dx をとった場合，$x''=g_{a,b}^{-1}x=a^{-1}(x-b)$ として，$J(x,g_{a,b})=\left|\frac{dx''}{dx}\right|=|a|^{-1}$. 1-コサイクル α をすこし一般化して，$L_2(\mathbb{R};dx)$ 上に実現される $ax+b$ 群 G のユニタリ表現は，$\varepsilon=0,1;\ \rho\in\mathbb{R}$, に対して，

$$\big(T_{\varepsilon,\rho}(g_{a,b})f\big)(x)=\mathrm{sgn}(a)^{\varepsilon}|a|^{-\frac{1}{2}+i\rho}f(a^{-1}(x-b))\quad(x\in\mathbb{R},\ g_{a,b}\in G). \tag{2.23}$$

例 2.6 (実数直線上の分数変換群). $X=\mathbb{R}$ 上の分数変換とは，群 $SL(2,\mathbb{R})$ の元による変換：

$$h=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \text{に対して,}\quad \mathbb{R}\ni x\longmapsto h\cdot x=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{2.24}$$

のことである．分数の分母が 0 になる点もあり得るので，正確には，射影直線 $\widetilde{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上の変換である．変換群として忠実にするには，中心 $\{\pm E_2\}$ による商群 $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$ をとればよい．

$g\in SL(2,\mathbb{R})$ に対して，g^{-1} を (2.24) の h にとれば，

$$J(x,g)=\frac{d(h\cdot x)}{dx}=|cx+d|^{-2}$$

であるから，パラメータ $\varepsilon=0,1;\ \rho\in\mathbb{R}$, に対して $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現 $\big(T_{\varepsilon,\rho},L_2(\mathbb{R};dx)\big)$ が次のように与えられる：$g\in SL(2,\mathbb{R})$ に対し，$g^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ とすれば，

$$\big(T_{\varepsilon,\rho}(g)f\big)(x)=\mathrm{sgn}(cx+d)^{\varepsilon}|cx+d|^{-1+i\rho}f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\quad(x\in\mathbb{R}). \tag{2.25}$$

これは，群 $SL(2,\mathbb{R})$ の**主系列表現**とよばれるユニタリ表現の系列であり，特別の $(\varepsilon,\rho)=(1,0)$ の場合には，2 つの同値でない既約表現の直和になるが，それ以外ではすべて既約である．$T_{\varepsilon,\rho}$ と $T_{\varepsilon,-\rho}$ とは**ユニタリ同値** (ユニタリな相関作用素による同値) であるが，それ以外には同値関係はない．

このユニタリ表現は，群 $SL(2,\mathbb{R})$ の「関数への作用」の典型的モデルとしてここに現れてきている．簡単な群でもその「作用」は結構複雑である．この群作用を X 上の関数の空間にまで拡張すると，作用される対象 X の多くの情報を吸い上げてくるのである．

この群 $SL(2,\mathbb{R})$ は，3 次元ローレンツ群 $SO_0(2,1)$ の 2 重の被覆群である．その被覆写像については，**5.4** 節を参照し，さらなるユニタリ表現等については，第 6 章を参照されたい．

注意 2.3. リー群 $SL(2,\mathbb{R})$ は $SU(1,1)$ と同型である (**6.4** 参照)．対応するリー環の方に移れば，同型 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\cong\mathfrak{su}(1,1)$ を得る．第 9 章 **9.2.2** では，リー環 $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現が論じられている．

問題 2.9. (2.24) 式による $h\cdot x$ の定義が，実際に群作用を与えることを示せ．

第3章
回転群の表現とその量子力学への応用

群の表現の応用については，第1章で有限群の，結晶学や化学への応用に触れ，情報処理への応用を示したが，ここでは，量子力学への応用を話の軸にして，回転群 $SO(3)$ の表現を詳しく調べる．

まず，素粒子に対するシュレーディンガーの方程式を導入し，その対称性の群について述べる．粒子およびポテンシャルが球対称であるときには，1粒子の運動を規定するシュレーディンガー方程式は，回転群で不変である．したがって，粒子の状態を記述する波動関数の空間には，回転群が自然に働き，その表現を与える．

そこで，回転群 $SO(3)$ とそのリー環 $\mathfrak{so}(3)$ の表現について詳しく調べる．そして，歴史的に見て，最初の成功例である水素原子の場合について，計算してみる．

3.1 古典力学から量子力学へ (量子化)

ニュートン (I. Newton, 1642–1727) はその主著『自然哲学における数学的原理』(ラテン語のタイトルから“プリンキピア”と通称) において，運動の3法則および万有引力の法則をうち立てた．ニュートン力学は，天体の運動とか，普通の物体の運動を精度良く記述する．これを古典力学とよぼう．

その後，20世紀初頭になって，分子，原子，原子核，素粒子などの微視的な対象の運動 (ミクロ現象) を取り扱うために，量子力学が創始された．その動機としては，まず19世紀末葉(まつよう)に，プランク (M. Plank, 1858–1947; ノーベル賞，1918) は，熱力学を古典的立場から説明しようとして成功せず，結局，熱輻射においてはある大きさのエネルギーが単位となって放出されるというエネルギー量子仮説を唱え，新しい輻射公式を導いた (1900)．このエネルギー単位 h をプランク定数という．さらに，アインシュタインは，光量子仮説を提唱した (1905)．ボーア (N. Bohr, 1885–1962; ノーベル賞，1922) もプランクに倣(なら)って，エネルギーなどの物理量が連続な値をとり得ず，不連続な値だけをもち得ると考えて，原子の中で電子がとり得る状態の説明に成功した (1913～)．

量子力学は，1925年にハイゼンベルグ (W.K. Heisenberg, 1901–1976; ノーベル賞，1932)，1926年にシュレーディンガー (E. Schrödinger, 1887–1961; ノーベル賞，1933) により，それぞれ違った形に定式化され，後にそれが同値であると分かった．これを形から見れば，「古典力

学の成果を基にして，いわゆる対応原理によってそれを書き換えていく」のである．そこには数学的厳密性の欠如や或る種の矛盾が存在するのであるが，それらを乗り越えて進もうとするのが物理学者の態度であり，その理論に対する数学的説明が後追いを強いられているという面もある．対応原理を簡単な場合に説明しよう．

1．古典力学の場合：

まず，古典力学では，ある粒子の状態は，その位置 (一般座標 $q = (q_j)_{j=1}^f$) と速度 ($\dot{q} = (\dot{q}_j)_{j=1}^f$，$q$ の時間に関する導関数) とによって表される．運動エネルギー T および位置エネルギー U を $q, \dot{q}$ の関数として書く．このとき，U は q だけの関数になっている．

$$\begin{aligned} p_j &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad (1 \le j \le f), \\ H &:= \sum_{1 \le j \le f} p_j \dot{q}_j - L, \qquad \text{ここに} \quad L = T - U, \end{aligned}$$

とおく．p_j を q_j に共役な一般運動量，q_j, p_j を正準変数，という．H を**ハミルトン関数**とよび，$q = (q_j), p = (p_j)$ の関数と捉える．ハミルトン (W.R. Hamilton, 1805–65) による正準方程式 (canonical equations) は次の形に書かれる：

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (1 \le j \le f). \tag{3.1}$$

物理量 $A = A(p, q)$ の時間的変化は，方程式 (3.1) によって，

$$\frac{dA}{dt} = (A, H) \tag{3.2}$$

と記述される．ここで (A, H) は**ポアッソン** (S.D. Poisson) **の括弧式**とよばれ，次式で定義される：

$$(A, H) := \sum_{1 \le j \le f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right).$$

2．量子力学の場合：

さて，量子力学においては，ある粒子の状態は，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を適当に選ぶと，長さ 1 のベクトル $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1$, によって表される．物理量 $\widetilde{A}$ は，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であり，状態 ψ で $\widetilde{A}$ を観測したとき $\widetilde{A}$ の固有値のどれかが観測されるが，その値の期待値は $\langle \widetilde{A} \rangle := \langle \widetilde{A}\psi, \psi \rangle$ である．この主張はいわゆる「観測の公理」の一部である．量子力学には次の 2 つの (互いに同値な) 書き表し方がある．

シュレーディンガーの描像．状態 $\psi = \psi(q, t)$ の時間変化は方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \widetilde{H}\,\psi \tag{3.3}$$

で与えられる．ここに，$\hbar = h/2\pi$ であり，$\widetilde{H}$ は**ハミルトン作用素**とよばれる $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 (エルミート作用素：$\widetilde{H}^* = \widetilde{H}$) である．したがって，物理量 $\widetilde{A}$ の ψ における

期待値 $\langle\widetilde{A}\rangle$ の時間変化は，次で与えられる：

$$\begin{aligned}\frac{d\,\langle\widetilde{A}\rangle}{dt} &= \langle\widetilde{A}\frac{\partial\psi}{\partial t},\psi\rangle + \langle\widetilde{A}\psi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\rangle \\ &= \langle\widetilde{A}\cdot\frac{1}{i\hbar}\widetilde{H}\psi,\psi\rangle + \langle\widetilde{A}\psi,\frac{1}{i\hbar}\widetilde{H}\psi\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle[\widetilde{H},\widetilde{A}]\psi,\psi\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\widetilde{H},\widetilde{A}]\rangle,\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここに，$[\widetilde{H},\widetilde{A}] := \widetilde{H}\widetilde{A}-\widetilde{A}\widetilde{H}$ は $\widetilde{H}$ と $\widetilde{A}$ の**交換子積**とよばれる．

ハイゼンベルグの描像．粒子の状態ベクトル ψ は時間変化せず，物理量 $\widetilde{A}$ が次の方程式 (ハイゼンベルグの運動方程式) に従って時間変化するとする：

$$\frac{d\widetilde{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,[\widetilde{H},\widetilde{A}]. \tag{3.5}$$

この描像においても，物理量 $\widetilde{A}$ の ψ における期待値 $\langle\widetilde{A}\rangle$ の時間変化は，上と同じ方程式 (3.4) に従う．

古典力学から量子力学への移行において，ハミルトン作用素 $\widetilde{H}$ および物理量を表す $\widetilde{A}$ の具体的な形を決めるのに用いられる**対応原理**とは,「古典力学が $\hbar\to 0$ の極限で成り立つことを要求し，物理量の期待値の時間変化が 2 つの力学の下で同じ形式である」とするものである．この原理を実現するのに，まず，正準変数 q_j, p_j に対応する作用素として，次の正準交換関係を満たす自己共役作用素 P_j, Q_j $(1\le j\le f)$ を一組選ぶ：

$$[P_j,Q_k] = i\hbar\delta_{jk}I_{\mathcal{H}} \quad (1\le j,k\le f) \tag{3.6}$$

ここに，$I_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素．そして，ハミルトン関数 H および物理量 A を正準変数 p, q で書いておいて，そこに $p_j\to P_j, q_j\to Q_j$ $(1\le j\le f)$ の置き換えをしたものを，ハミルトン作用素 $\widetilde{H}$ および物理量の作用素 $\widetilde{A}$ にとる．この手続きを**量子化**というのである．

注意 3.1. $P_j, Q_k, I_{\mathcal{H}}$ の張るベクトル空間には括弧積によって，ある代数構造が入る．これはリー環 (またはリー代数) とよばれるものの一種であり，ハイゼンベルグ代数とよばれる．第 II 部ではリー環の表現論を取り扱うが，とくに第 10 章においては，ハイゼンベルグ代数の表現をフォック表現といわれる形で実現し，それをより大きなリー環に拡張することによって，いろいろ利用している．

3.2 N 個の粒子の運動と対称性の群

古典力学における N 個の質点の運動方程式を思い出そう．i 番目の質点の質量を m_i，3 次元ユークリッド空間 $E^3\cong\mathbb{R}^3$ の中での位置座標を $q^i = {}^t(q^i_1, q^i_2, q^i_3)$ (縦ベクトル) とする．運動エネルギーは，

$$T = \sum_{1\le i\le N}\frac{1}{2}m_i|\dot{q}^i|^2 = \sum_{1\le i\le N}\sum_{1\le k\le 3}\frac{1}{2}m_i(\dot{q}^i_k)^2$$

であるから，q_k^i に共役な正準変数は $p_k^i = m_i\dot{q}_k^i$ (運動量成分) である．この場合のハミルトン関数は，次のように与えられる：

$$H = H(q,p) = \sum_{1\leq i\leq N}\sum_{1\leq k\leq 3}\frac{1}{2m_i}(p_k^i)^2 + U(q). \tag{3.7}$$

この方程式の量子化を与えよう．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ としては，3 次元ユークリッド空間 E^3 の N 個の直積 $\Omega := (E^3)^N \cong \mathbb{R}^{3N}$ の上の測度

$$d\mu(q) := \prod_{1\leq i\leq N}\prod_{1\leq k\leq 3} dq_k^i$$

をとり，それに関する L_2 空間をとる，すなわち，$\mathcal{H} := L_2(\Omega; d\mu)$. この上の自己共役作用素で交換関係 (3.6) を満たすものとして，

$$Q_k^i = q_k^i\cdot, \qquad P_k^i = i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k^i}, \tag{3.8}$$

をとる．ここに，$q_k^i\cdot$ は関数 q_k^i を掛ける掛け算作用素である．これらの作用素はいずれも $\mathcal{H}$ 上の非有界な作用素であるからその定義域をはっきり決めないといけないが，ここでは詳しい議論を避ける．ハミルトン作用素は

$$\begin{aligned}\widetilde{H} &= -\sum_{1\leq i\leq N}\sum_{1\leq k\leq 3}\frac{\hbar^2}{2m_i}\left(\frac{\partial}{\partial q_k^i}\right)^2 + U(q\cdot) \qquad (3.9)\\ &= -\sum_{1\leq i\leq N}\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta^{(i)} + U(q\cdot), \qquad \Delta^{(i)} := \sum_{1\leq k\leq 3}\left(\frac{\partial}{\partial q_k^i}\right)^2,\end{aligned}$$

となり，N 体の**シュレーディンガー作用素**とよばれる．ここに，$\Delta^{(i)}$ は i 番目のユークリッド空間上のいわゆるラプラス (P.S. Laplace, 1749–1827) の作用素である．また，$U(q\cdot)$ は関数 $U = U(q)$ を掛ける作用素 $U\cdot$ であると解される．

$\widetilde{H}$ の定義域 $\mathcal{D}(\widetilde{H})$ はもちろん位置エネルギー $U = U(q)$ にもよるが，ここでは U が次の条件を満たすとしよう：$U(q)$ は q に関して 2 回連続微分可能，すなわち，C^2 級で，2 階までの導関数を込めて有界である．このとき，

$$\mathcal{D}(\widetilde{H}) := \{\, f\ ;\ C^2 \text{ 級で, 2 階までの導関数は } L_2(\Omega; d\mu) \text{ に入る} \,\} \tag{3.10}$$

とおくと，$\mathcal{D}(\widetilde{H})$ は急減少関数のなす空間

$$\mathcal{S}(\Omega) := \{\, f = f(q)\ ;\ f \text{ は } C^\infty \text{ 級},\ \lim_{q\to\infty} a(q)f(q) = 0\ (\forall a(q):\ q \text{ の多項式}) \,\}$$

を含む．そして $\mathcal{S}(\Omega)$ は $\mathcal{H} = L_2(\Omega; d\mu)$ で稠密である．実は，(3.9) の微分作用素を $\mathcal{S}(\Omega)$ 上で考えたもの $(\widetilde{H}, \mathcal{S}(\Omega))$ の閉拡張が自己共役になる．この意味で $(\widetilde{H}, \mathcal{S}(\Omega))$ は**本質的に自己共役**であるといわれる ([Yosi, Chap.II] 参照)．

時間を含むシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widetilde{H}\psi \tag{3.11}$$

の解 ψ は波動関数とよばれるが，時間 t への依存が指数型である

$$\psi(q,t) = \exp(-iEt/\hbar)f(q) \tag{3.11$'$}$$

の形のものを考える．ここで，$E \in \mathbb{R}$ はひとつの定数であり，$f \in \mathcal{D}(\widetilde{H})$ とする．このとき，$\|\psi\|$ や物理量 $\widetilde{A}$ の期待値 $\langle\widetilde{A}\rangle$ は時間によらず一定であるので，**定常状態**であるという．上の方程式は

$$\widetilde{H}f = Ef \tag{3.12}$$

となる．これを**時間を含まないシュレーディンガー方程式**とよぶ．作用素 $\widetilde{H}$ は系のエネルギーを表すので，固有関数 $f \neq 0$ が存在すれば，そのときの固有値 E は系のとり得るエネルギーの値を与える．

一般に，定義域 $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ をもつ，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A に対して，方程式

$$Af = \lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{D}(A)) \tag{3.13}$$

が 0 でない解 f をもつとき，その λ を**固有値**といい，f を**固有関数**という．固有値 λ に対する固有関数の全体

$$V(A;\lambda) := \{ f \in \mathcal{D}(A)\ ;\ Af = \lambda f \} \tag{3.14}$$

は，**固有空間**とよばれ，$\mathcal{D}(A)$ の部分空間をなす．作用素 A が自己共役のときは，その固有値 (さらには連続固有値) と固有ベクトルを調べて，それらを積み重ねることによって A が再現できる ([Yosi, Chap.XI] 参照).

我々の $\widetilde{H}$ の場合には，目下は定義域を (3.10) で与えているので，対称ではあるが自己共役ではない．しかし，本質的に自己共役なので，固有値と固有空間を調べれば，$\widetilde{H}$ が解析できる．その際，固有空間

$$V(\widetilde{H};\lambda) = \{ f \in \mathcal{S}(\Omega)\ ;\ \widetilde{H}f = \lambda f \} \tag{3.15}$$

を調べるには，この物理系における対称性を利用すべきである．

その仕組みを説明しよう．$\mathcal{H}$ 上の可逆な線形作用素 C がハミルトン作用素 $\widetilde{H}$ を**不変にする**とは，$C\widetilde{H} = \widetilde{H}C$，すなわち，

$$C\big(\mathcal{D}(\widetilde{H})\big) = \mathcal{D}(\widetilde{H}), \qquad C\widetilde{H}f = \widetilde{H}Cf \quad (f \in \mathcal{D}(\widetilde{H})),$$

となることである．この C の全体 $G(\widetilde{H})$ は作用素の積に関して群をなす．この群は，N 粒子の系を支配するシュレーディンガー方程式を不変にするので，この物理系の**対称性の群**とよんでもよい．$\widetilde{H}$ の各固有空間はこの群 $G(\widetilde{H})$ によって不変である：

$$f \in V(\widetilde{H}, \lambda) \implies Cf,\ C^{-1}f \in V(\widetilde{H}, \lambda) \quad (\forall C \in G(\widetilde{H})).$$

実際，$\widetilde{H}(Cf) = C\widetilde{H}f = C(\lambda f) = \lambda(Cf)$.

$C_1, C_2 \in G(\widetilde{H})$ に対して，部分空間 $W = V(\widetilde{H}, \lambda)$ への制限を考えると $(C_1C_2)|_W = C_1|_W \cdot C_2|_W$ となるので，次の重要な命題を得る．

命題 3.1. 部分空間 $V(\widetilde{H}, \lambda)$ へ制限する対応 $G(\widetilde{H}) \ni C \mapsto C|_{V(\widetilde{H},\lambda)}$ は，群 $G(\widetilde{H})$ の $V(\widetilde{H}, \lambda)$ 上の線形表現を与える．

この表現の既約分解，既約表現の次元や重複度，さらに既約表現の行列要素などは，当然のこととして，この物理系の重要なデータを与える．次節では，群 $G(\widetilde{H})$ の分かりやすい部分群を見つけて，もっと具体的に見ていこう．

3.3 N 粒子系の対称性の群とその表現

原子・分子レベルでの対称性の群は，**1.6** 節で例をとって調べたが，ここでは，微分方程式

$$\widetilde{H}f = \lambda f \quad (f \in \mathcal{D}(\widetilde{H})) \tag{3.16}$$

の対称性の群を調べるのである．

回転群とアファイン変換群

2 階の微分作用素 $\Delta^{(i)}$ の部分と，掛け算作用素 $M_U := U\cdot$ の部分とに分けて考える．i 番目のユークリッド空間 E^3 でのアファイン変換

$$q^i \longmapsto q'^i = Bq^i + b, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

を $g = g(b, B)$ と書く．それから引き起こされる $\mathcal{H} = L_2(\Omega; d\mu)$ の変換

$$(R(g)f)(q) := f(g^{-1}q) \quad (q \in \Omega)$$

は，微分方程式 (3.16) をどう変換させるかを調べよう．

まず，この式の両辺に $R(g)$ を作用させて，$R(g) \cdot \widetilde{H}f = \lambda R(g)f$, つぎに f を $R(g)^{-1}f$ で置き換えてみると，

$$R(g) \cdot \widetilde{H} \cdot R(g)^{-1}f = \lambda f$$

を得る．そこで，1 階微分作用素 $\partial_{ik} := \partial/\partial q_k^i$ の変換を見る．(3.17) を変数変換と見ると，$\partial'_{ik} := \partial/\partial q'^i_k$ との関係は，$\partial_{ik} = \sum_{1\le\ell\le3} \partial_{ik} q'^i_\ell \cdot \partial'_{i\ell} = \sum_{1\le\ell\le3} b_{\ell k}\, \partial'_{i\ell}$, であり，これを行列の演算を用いて書くと，

$$(\partial_{i1}, \partial_{i2}, \partial_{i3}) = (\partial'_{i1}, \partial'_{i2}, \partial'_{i3})B. \tag{3.18}$$

他方，1 階の微分作用素 ∂_{ik} の変換 $R(g)\cdot\partial_{ik}\cdot R(g)^{-1}$ を求めてみよう．$(R(g)^{-1}f)(q) = f(gq) = f(q')$ であるから，$R(g)^{-1}$ を f に作用させるということは，f の中の変数 q を q' に置き換えることになる (これは f における変数変換 $q \mapsto q'$ とは双対の作用である)．この $f(q')$ に $\partial_{ik} = \sum_{1\le\ell\le3} b_{\ell k}\, \partial'_{i\ell}$ を作用した後，$R(g)$ を作用すると，今度は q' を q にもどすわけだから結果としては f に $\sum_{1\le\ell\le3} b_{\ell k}\, \partial_{i\ell}$ を作用したことになる．したがって，次の変換公式 (3.19) を得る．

命題 3.2. (i)　1 階の微分作用素 $\partial_{ik} = \partial/\partial q_k^i$ は，$g = g(b, B)$ に対する $R(g)$ によって，次のように変換される：

$$\bigl(R(g)\cdot\partial_{ik}\cdot R(g)^{-1}\bigr)_{1\le k\le3} = (\partial_{i1}, \partial_{i2}, \partial_{i3})B, \tag{3.19}$$

ここに左辺は作用素を要素とする 1×3 型行列である．

(ii)　変数 q^i に関するラプラシアンの変換は次で与えられる：

$$R(g)\cdot\Delta^{(i)}\cdot R(g)^{-1} = (\partial_{i1}, \partial_{i2}, \partial_{i3})(B\,{}^t\!B)\,{}^t(\partial_{i1}, \partial_{i2}, \partial_{i3}). \tag{3.20}$$

また，掛け算作用素 $M_U = U\cdot$ の変換は，次で与えられる：

$$R(g)\cdot M_U\cdot R(g)^{-1} = M_{U'}, \quad U'(q) = U(g^{-1}q) = (R(g)U)(q). \tag{3.21}$$

この命題の (ii) の証明は，問題 3.1 として読者に任せる．さて，3×3 型行列 B が $B\,{}^t\!B = E_3$ を満たすのは，$B \in O(3)$ のときなので，命題 3.1 により次の定理がほぼ得られる．定理後半の主張のユニタリ性の証明は問題 3.2 とする．

定理 3.3. i 番目のユークリッド空間上のアファイン変換 $g : q^i \to Bq^i + b$ が，$B \in O(3)$ かつ $U(gq) = U(q)$ を満たせば，微分作用素 $\widetilde{H}$ を不変にする：$R(g)\cdot\widetilde{H}\cdot R(g)^{-1} = \widetilde{H}$．そして固有方程式 (3.16) を不変にする．したがって，固有値 λ の固有空間

$$\mathcal{S}(\lambda) := \{\, f \in \mathcal{S}(\Omega)\,;\, \widetilde{H}f = \lambda f \,\}$$

は $R(g)$ で不変である．

とくに，U が (q^i 上の) 回転群 $SO(3)$ (または $O(3)$) で不変なときは，固有空間 $\mathcal{S}(\lambda)$ 上に，$B \mapsto R(B)$ によって，この群のユニタリ表現が与えられる．

問題 3.1. (i) 微分作用素の変換公式 (3.20) を証明せよ.
(ii) 掛け算作用素 M_U の変換公式 (3.21) を証明せよ.

問題 3.2. (i) $B = u \in O(3)$ として, 変換 $q^i \mapsto uq^i$ によって, 測度 $d\mu(q)$ は不変であることを示せ.
(ii) ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形変換 $R(u)$ はユニタリであることを示せ.

3 次元座標 q^i, $q^{i'}$ の交換

添字 i, i' をもつ 2 つの粒子に対して, $m_i = m_{i'}$ とする. さらに, 変数 q における q^i と $q^{i'}$ との交換 $\sigma_{ii'}$ に関して, 位置エネルギー $U(q)$ が不変であれば, 微分作用素 $\widetilde{H}$ も不変になる, すなわち, $(S_{ii'}f)(q) := f(\sigma_{ii'}q)$ とおくと,

$$S_{ii'} \cdot \widetilde{H} \cdot (S_{ii'})^{-1} = \widetilde{H}.$$

したがって, 固有空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ も $S_{ii'}$ で不変である. この不変性を, (3.3) の波動関数 ψ の性質にどう反映させるかは物理学的な解釈による. 例えば, $S_{ii'}\psi = \psi$ または $S_{ii'}\psi = -\psi$ はそれぞれに, ある物理学上の原理を表している.

3.4 中心力が働いている系の場合

水素の原子や分子の場合のように, 1 個の粒子が中心力が働く場において運動しているときを, より詳しく調べてみよう. これはまず, 水素原子の電子軌道の理論に, 注目すべき成功をおさめた.

上の議論の $N = 1$ の場合を応用する. この物理系の対称性の群については, **1.6** 節において詳述した. 1 粒子の静止質量を m_0, その座標 $q = {}^t(q_1, q_2, q_3)$ と運動量 $p = {}^t(p_1, p_2, p_3) = {}^t(m_0\dot{q}_1, m_0\dot{q}_2, m_0\dot{q}_3)$ を用いると,

$$\widetilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + U(q)\cdot$$

水素原子の場合に進む前に, ここでは, 中心力が働いている場合の一般論を述べる. すなわち, 位置エネルギー $U(q)$ に対して, q に関する回転群 $SO(3)$ で不変であると仮定する. このとき, U は, $r := |q| = ({q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2)^{1/2}$ のみの関数である. これを $V(r)$ と書く.

回転群 $SO(3)$ の表現としては, 例 2.3 で与えたものと本質的に同一であり, 単にそこでの変数 x が q に変わっているだけの差しかない. 3 次元ユークリッド空間における極座標表示 (r, θ, φ), $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi < \pi$,

$$q_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad q_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad q_3 = r\cos\theta, \tag{3.22}$$

をとる. この変数に関して, ラプラシアンを書く.

補題 3.4 (ラプラシアンの極座標表示と回転不変性).

(i)
$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial q_3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_S, \qquad (3.23)\\ \Delta_S &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

(ii) Δ_S は単位球面 $S^2 \subset E^3$ の上の回転群 $SO(3)$ で (さらに $O(3)$ で) 不変な微分作用素である．すなわち，$F(\omega), \omega \in S^2$, を球面上の微分可能な関数とし，例 2.3 に倣って，$(R''(u)F)(\omega) := F(u^{-1}\omega), u \in O(3)$, とすると，

$$R''(u) \cdot \Delta_S \cdot R''(u)^{-1} = \Delta_S \quad (u \in O(3)).$$

証明. (i) 極座標の変数変換の定義を用いて

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial q_1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial q_3}{\partial r}\frac{\partial}{\partial q_3}$$

を書き換えて，

$$B := r\frac{\partial}{\partial r} = q_1\frac{\partial}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial}{\partial q_2} + q_3\frac{\partial}{\partial q_3}$$

を得る．同様にして，

$$\begin{aligned}C &:= r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = q_3\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\right) - ({q_1}^2 + {q_2}^2)\frac{\partial}{\partial q_3}, \\ D &:= \frac{\partial}{\partial\varphi} = -q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial}{\partial q_2},\end{aligned}$$

を得る．他方，$r^2 = {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2$, $r^2\sin^2\theta = {q_1}^2 + {q_2}^2$,

$$(3.23)\ \text{の右辺} = \frac{1}{r^2}(B^2 + B) + \frac{1}{r^2 \cdot r^2\sin^2\theta}C^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}D^2$$

であるから，これに上の B, C, D の表示を代入して計算すればよい．

(ii) 例 2.3 におけると同様に，$f(q) = F_1(r)F_2(\omega), r \geq 0, \omega \in S^2$, と変数分離型の関数 f に Δ の表示 (3.23) を作用させてみればよい． □

注意 3.2. 公式 (3.23) を発見的に証明するには，Δ が，リーマン空間と見た3次元ユークリッド空間 E^3 のラプラス-ベルトラミ作用素であるから，それに関する (微分幾何における) 一般公式を援用すればよい．この公式を [Helg, p.92] から引用しておく．n 次元多様体 M の局所座標 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に関して，M のリーマン計量が $ds^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} g_{ij}\,dx_i\,dx_j$ $(g_{ij} = g_{ij}(x), g_{ij} = g_{ji})$ と表されているとし，行列 (g_{ij}) の逆行列を $(g^{k\ell})$, その行列式を $\overline{g}$ と書く．M 上の (局所的) 等距離変換に関して不変な作用素である**ラプラス-ベルトラミ作用素** Δ は，次の公式で与えられる：

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i g^{ik}\sqrt{\overline{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \qquad (3.25)$$

問題 3.3. 上の補題の主張 (i), (ii) の証明を完結せよ.

問題 3.4. 単位球面 S^2 上の局所座標 $(\theta,\varphi), 0<\theta<\pi, -\pi<\varphi<\pi$, はある大円の半分を除いた開部分集合 U 上での座標になっている. この開集合を適当に回転したもの U' をとれば, U, U' で S^2 を被覆できることを示せ. (**注意**：U' 上の局所座標を U 上のそれから誘導すれば C^∞ 級可微分多様体 S^2 のひとつの局所座標系を得る.)

ラプラシアン Δ の表示式 (3.23) を見ればすぐ思いつくように, 方程式

$$\widetilde{H}f=\lambda f, \quad \widetilde{H}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta+V(r)\cdot, \tag{3.26}$$

の一般解を求めるのに, まず, 変数分離型の解 $f(q)=F_1(r)F_2(\omega), r\geq 0, \omega\in S^2$, を具体的に求めて, 一般の解はその 1 次結合として表すことを目指す.

(3.23) を適用して方程式 (3.26) を書き換えれば次のようになる：$\kappa=\hbar^2/2m_0$ とおくと,

$$\frac{\left[-\kappa\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right)\right)+V(r)-\lambda\right]F_1(r)}{\kappa\dfrac{1}{r^2}F_1(r)}=\frac{(\Delta_S F_2)(\omega)}{F_2(\omega)}.$$

すると, この式の両辺は変数 ω にも r にもよらない定数になるので, これを ν とおくと, 次の 2 つの方程式に分かれる. 1 つは**動径方程式**とよばれる

$$\left[-\kappa\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{\nu}{r^2}\right)+V(r)-\lambda\right]F_1(r)=0 \quad (r>0) \tag{3.27}$$

であり, もう 1 つは球面 S^2 の上のラプラシアンの固有値問題の方程式

$$(\Delta_S F_2)(\omega)=\nu F_2(\omega) \quad (\omega\in S^2). \tag{3.28}$$

である. この Δ_S の固有値問題は, 回転群 $SO(3)$ の表現との関連において, 次節, 次々節で詳しく述べるが, 固有値は $\nu_\ell=-\ell(\ell+1), \ell=0,1,2,\ldots$, で与えられる.

ここでは, 動径方程式を考えよう. $F_1(r)=r^{-1}v(r)$ とおけば, v に関する方程式は次のようになる：

$$v''+\left(\frac{\nu_\ell}{r^2}+\frac{-V(r)+\lambda}{\kappa}\right)v=0. \tag{3.29}$$

v を動径関数とよぶ. Δ_S の固有値 ν_ℓ の固有関数の 1 つ $Y(\omega)$ をとって, $f(q)=r^{-1}v(r)Y(\omega)$ とおくとき, それが $L_2(E^3;d\mu(q))$ に入れば, そのときの λ が, シュレーディンガー作用素 $\widetilde{H}$ の固有値を与える. (実は, 我々は $\widetilde{H}$ の定義域を (3.10) にとっているのでもう少しチェックが必要である.) f の L_2-ノルムを計算するには, 例 2.3 における測度の分解を使う.

E^3 上の座標 $q={}^t(q_1,q_2,q_3)$ を $q=r\,\omega, r\geq 0, \omega\in S^2$ と表す. さらに, (3.22) の極座標 (r,θ,φ), $r\geq 0$, $0\leq\theta\leq\pi$, $-\pi\leq\varphi<\pi$, を導入し, $\omega\in S^2$ の座標として, (θ,φ) をとる. ルベーグ測度は次のように分解される：

$$d\mu(q)=dq_1dq_2dq_3=r^2dr\,d\mu_S(\omega), \quad d\mu_S(\omega)=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{3.30}$$

固有関数 Y は当然微分可能な関数なので，$Y \in \mathcal{H}_S := L^2(S^2; d\mu_S)$．そして，

$$\|f\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|Y\|^2_{\mathcal{H}_S}, \quad \|v\|^2 := \int_0^\infty |v(r)|^2 dr,$$

であるから，条件 $\|v\|^2 < \infty$ が，$f \in L_2(E^3; d\mu(q))$ となるための必要十分条件である．

3.5　球面調和関数と回転群 $SO(3)$ の準正則表現

この節と次節で，球面 S^2 の上のラプラシアン Δ_S の固有値問題

$$(\Delta_S F_2)(\omega) = \nu F_2(\omega) \quad (\omega \in S^2). \tag{3.31}$$

を詳しく調べよう．微分作用素 Δ_S は回転群 $SO(3)$ (さらに $O(3)$) に関して不変なので，固有空間 $V(\Delta_S, \nu)$ にはこれらの群の表現が誘導される．

結果として，これは，例 2.3 で与えた回転群 $G = SO(3)$ の無限次元ユニタリ表現 $(R'', \mathcal{H}_S)$，$\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$，の既約表現への分解 (**既約分解**) を与える．現在では，既約分解の証明の仕方はいろいろあるが，我々が取り扱うのは，空間全体のラプラシアン Δ との関連を利用するものである．

説明 3.1. S^2 の 1 点 $q^{(0)} = {}^t(1,0,0)$ をとると，その固定部分群 $H = \{ u \in SO(3) \,;\, uq^{(0)} = q^{(0)} \}$ は，$H = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) \,;\, w \in SO(2) \} \cong SO(2)$ であり，自然な対応 $G \ni u \mapsto q = uq^{(0)} \in S^2$ によって，均質空間 G/H と S^2 は同型となる．実際，この対応は全射であり，かつ，

$$uq^{(0)} = u'q^{(0)} \iff u^{-1}u' \in H \iff uH = u'H.$$

そして，表現 $(R'', \mathcal{H}_S)$ は誘導表現 $(\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{1}_H, L_2(G/H; d\mu_{G/H}))$ と同値になる．ここに，$\mathbf{1}_H$ は H の自明な表現，$d\mu_{G/H}$ は G/H 上の G-不変測度，を表す．この意味で表現 R'' は G の**準正則表現**とよばれる．

既約分解の結果を先に定理 3.5 として述べておこう．証明は次節 **3.6** と次々節 **3.7** で与える．主張 (ii) の直和分解の証明は **3.7** にある．S^2 上の微分作用素 Δ_S の定義域として S^2 上の 2 回連続微分可能 (C^2 級) 関数の全体 $\mathcal{H}'_S := C^2(S^2)$ をとる．作用素 $(\Delta_S, \mathcal{H}'_S)$ は対称作用素である (問題 3.6)，すなわち，

$$\langle \Delta_S f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \Delta_S f_2 \rangle \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{H}'_S). \tag{3.32}$$

これは，$(\Delta_S)^* \supset \Delta_S$ とも書ける．そして Δ_S の閉包は，$\mathcal{H}_S$ 上の自己共役作用素である ([Yosi, Chap.II], 参照)．変域 $0 \le \theta \le \pi$ に対して，$t = \cos\theta$ を θ に換えて新しい変数に採用すれば，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = -(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\therefore \quad \Delta_S = \frac{\partial}{\partial t}\left((1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{1}{1-t^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{3.33}$$

定理 3.5 (回転群の準正則表現の既約分解).

(i) 作用素 $(\Delta_S, \mathcal{H}'_S)$ の固有値は，$\nu_\ell := -\ell(\ell+1), \ell = 0, 1, 2, \ldots$, であり，その固有空間 $V(\Delta_S; \nu_\ell)$ は $(2\ell+1)$ 次元であって，球面調和関数よりなる次の正規直交系によって張られる：

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = c_{\ell m} P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \quad m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell; \tag{3.34}$$

ここに，

$$c_{\ell m} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)\cdot(\ell-m)!}{4\pi\cdot(\ell+m)!}}, \tag{3.35}$$

$$P_\ell^m(t) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}(t^2-1)^\ell}{dt^{\ell+m}}. \tag{3.36}$$

(ii) 回転群 $SO(3)$ のユニタリ表現 $(R'', \mathcal{H}_S)$ は固有空間 $V(\Delta_S; \nu_\ell)$ 上に既約表現 π_ℓ を誘導する（π_ℓ を最高ウェイト ℓ の既約表現とよぶ）．そして，R'' はこれらの既約表現の直和になっている：

$$R'' = \sum\nolimits_{\ell\geq 0}^{\oplus} \pi_\ell, \qquad \mathcal{H}_S = \sum\nolimits_{\ell\geq 0}^{\oplus} V(\Delta_S; \nu_\ell). \tag{3.37}$$

ここで，既約表現 $(\pi_\ell, V(\Delta_S; \nu_\ell)$ の直和については，注意 3.3 を参照せよ．

上に現れた P_ℓ^m のうち，$m = 0$ のもの $P_\ell(t) := P_\ell^0(t)$ はルジャンドル (A.M. Legendre, 1752–1833) の多項式，$m \neq 0$ のものはルジャンドルの陪(ばい)関数とよばれる特殊関数であり，次の 2 階変数係数線形微分方程式の解である：

$$\left\{\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)\right\} P = 0. \tag{3.38}$$

注意 3.3. (直和について)．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間の族 $\mathcal{H}_n, n = 1, 2, \ldots$, があって，$\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ $(n \neq m)$ を満たすとする．無限和

$$f = \sum\nolimits_{1\leq n<\infty} f_n, \quad f_n \in \mathcal{H}_n \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.39}$$

は，条件：$\|f\|^2 = \sum_{1\leq n<\infty} \|f_n\|^2 < \infty$, が満たされるとき，かつそのときに限り収束する．このように，和として得られる f の全体を，$\sum_{1\leq n<\infty}^{\oplus} \mathcal{H}_n$ と書くと，これは，$\mathcal{H}_n$ の**直和**とよばれる部分ヒルベルト空間をなす．$\mathcal{H} = \sum_{1\leq n<\infty}^{\oplus} \mathcal{H}_n$ となっている場合を考える．$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 T が各 $\mathcal{H}_n$ を不変にするとする：$T(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n$. このとき，$T$ の制限 $T_n := T|_{\mathcal{H}_n}$ は $\mathcal{H}_n$ 上の有界線形作用素である．そして，(3.39) の f に対して，

$$Tf = \sum\nolimits_{1\leq n<\infty} T_n f_n \tag{3.40}$$

となる．このとき，$T = \sum_{1\leq n<\infty}^{\oplus} T_n$ と書く．群 G の表現 $(\varpi, \mathcal{H})$ に対して，各 $\mathcal{H}_n$ が不変部分空間であれば，ϖ は $\mathcal{H}_n$ 上に部分表現 ϖ_n を誘導し，任意の $g \in G$ に対して，$\varpi(g) = \sum_{1\leq n<\infty}^{\oplus} \varpi_n(g)$ となる．このとき，表現 ϖ は ϖ_n たちの**直和**であるといい，$\varpi = \sum_{1\leq n<\infty}^{\oplus} \varpi_n$ と書く．

問題 3.5. ラプラシアン Δ をヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L_2(E^3; d\mu(q))$ 上で考える．その定義域を，急減少関数の空間 $\mathcal{S}(E^3)$ にとる．このとき，線形作用素 $(\Delta, \mathcal{S}(E^3))$ は，対称作用素であることを証明せよ． 〔ヒント：この作用素の対称性を示すには，$\mathcal{H}$ 上の内積を，$\langle F_1, F_2\rangle := \int_{E^3} F_1(q)\,\overline{F_2(q)}\,d\mu(q)$ とするとき，

$$\langle \Delta F_1, F_2\rangle = \langle F_1, \Delta F_2\rangle \quad (F_1, F_2 \in \mathcal{S}(E^3))$$

を示せばよい．それには部分積分を用いればよい.〕

問題 3.6. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$ 上の線形作用素 $(\Delta_S, \mathcal{H}'_S)$ は対称作用素であることを証明せよ．ここに，$\mathcal{H}'_S = C^2(S^2)$ である． 〔ヒント：関係式 (3.32) を示せばよい．そのために，例えば，作用素 $(\Delta, \mathcal{S}(E^3))$ の対称性を利用することもできる．それには，$q \in E^3$ に対する極座標 $(r, \omega), 0 \le r \le \infty, \omega \in S^2$, を用いて微分作用素 Δ を補題 3.4 (i) の形に書き，$F_j, j = 1, 2$, として，$F_j(q) = h_j(r) f_j(\omega)$ の形に書かれる関数を代入する．ここに，$h_j \in C_c^2(\mathbb{R}_+)$ は，$\mathbb{R}_+ := \{ r \in \mathbb{R}\,;\, r > 0 \}$ 上の台がコンパクトな2回連続微分可能関数である.〕

3.6 体球関数・球面調和関数と回転群の表現

3.6.1 体球関数・球面調和関数と回転群

3次元ユークリッド空間 E^3 での座標を，後との関係を考慮して，ここでは $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と書く．x_1, x_2, x_3 に関する複素係数の多項式の全体を $\mathcal{P}[x]$ と書くと，その上には，$(R(g)f)(x) := f(g^{-1}x)$ $(f \in \mathcal{P}[x])$ によって，群 $SO(3)$ が働く．その群作用と微分作用素としてのラプラシアン $\Delta = \sum_{1\le i\le 3} (\partial/\partial x_i)^2$ とは可換である (命題 3.2(ii)).

$$(\text{ラプラスの方程式}) \qquad \Delta f = 0 \tag{3.41}$$

の解 $f(x)$ で x_1, x_2, x_3 に関して ℓ 次同次関数になるものを ℓ 次の**体球関数** (または**調和多項式**) とよぶ．その全体 $\mathbb{P}_\ell$ はベクトル空間をなす．f を極座標 (r, θ, φ) で書くと，$r^\ell Y_\ell(\theta, \varphi)$ となる．球面上の関数 Y_ℓ を**球面調和関数**とよぶ.

補題 3.4 (i) の Δ の表示式を使うと，Y_ℓ は球面 S^2 上の関数で Δ_S の固有値 $\nu_\ell = -\ell(\ell+1)$ の固有関数であることが分かる：

$$\Delta_S Y_\ell \;=\; -\ell(\ell+1) Y_\ell. \tag{3.42}$$

この固有関数全体のなす空間 $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ は，写像

$$\mathcal{K} \;:\; \mathbb{P}_\ell \ni f \longmapsto f|_{S^2} = Y_\ell \in V(\Delta_S, \nu_\ell) \tag{3.43}$$

によって，$\mathbb{P}_\ell$ と同型であることがのちに分かる (定理 3.14).

定理 3.6. $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ とする．ℓ 次体球関数の空間 $\mathbb{P}_\ell$ は，$(2\ell+1)$ 次元であって，$(R(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ $(g \in SO(3), f \in \mathbb{P}_\ell)$ によって回転群 $SO(3)$ の既約表現を与える.

証明を進めるにあたって，回転 $g \in SO(3)$ のオイラー (L. Euler) 角表示を与えておく．まず，$i \neq j$ として，(x_i, x_j) 平面の角度 ψ の 2 次元的回転を表す行列 $r_{ij}(\psi)$ を与えると，

$$r_{12}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_{23}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix},$$

$$r_{31}(\psi) = r_{13}(-\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

となる．これらはいずれも，$r_{ij}(\psi_1)\, r_{ij}(\psi_2) = r_{ij}(\psi_1 + \psi_2)$ $(\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R})$ を満たす．加群の $\mathbb{R}$ から $SO(3)$ への準同型写像を**一径数部分群**とよぶが，これらはその典型的な例である．写像 $\mathbb{R} \to SO(3)$ として表すときには，$r_{ij}(\psi)$ の変数 ψ を消した形で単に r_{ij} と書くことが多い．

命題 3.7 (回転の‘オイラー角’).

(i) 回転を与える $g \in SO(3)$ は次の積の形に表せる：

$$g = r_{12}(\varphi)\, r_{23}(\theta)\, r_{12}(\varphi') \quad (0 \leq \varphi, \varphi' < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi). \tag{3.45}$$

ここで，g に対するパラメータ $(\varphi, \theta, \varphi')$ は上に与えた領域の内部においては一意的である．

(ii) $x^{(1)} = {}^t(1,0,0)$, $x^{(2)} = {}^t(0,1,0)$, $x^{(3)} = {}^t(0,0,1)$ に対し，$y^{(i)} = gx^{(i)}$ とおくと，

$$y^{(1)} = {}^t(*, *, \sin\theta\, \sin\varphi'),$$
$$y^{(2)} = {}^t(*, *, \sin\theta\, \cos\varphi'),$$
$$y^{(3)} = {}^t(\sin\varphi\, \sin\theta, -\cos\varphi\, \sin\theta, \cos\theta)$$

となり，$\sin\theta \neq 0$ の場合，これらから，$(\varphi, \theta, \varphi')$ が決定できる．

(注： 一般に言われているオイラー角 (φ, θ, ψ) は，$g = r_{21}(\psi) r_{13}(\theta) r_{21}(\varphi) = r_{12}(-\psi) r_{31}(-\theta) r_{12}(-\varphi)$ によって決まる.)

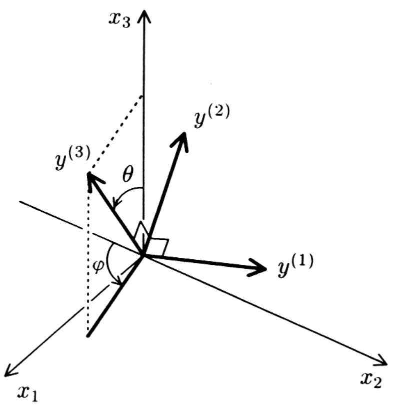


図 3.1. ‘オイラー角’の図：$y^{(i)} = gx^{(i)}$ $(1 \leq i \leq 3)$

命題 3.8. $g \in G = SO(3)$ の‘オイラー角’表示を上のように，$g = r_{12}(\varphi)\, r_{23}(\theta)\, r_{12}(\varphi')$ $(0 \leq \varphi, \varphi' < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，コンパクト群 G 上の正規化されたハール (A. Haar) 測度 $d\mu_G$ は次のように与えられる：

$$d\mu_G(g) = \frac{1}{8\pi^2} \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\varphi'. \tag{3.46}$$

問題 3.7. 命題 3.7 を証明せよ.　〔ヒント：参考文献 [平井, I, 第 7 章] を見よ.〕

問題 3.8. 命題 3.8 を証明せよ.　〔ヒント：参考文献 [平井, II, 第 21 章] を見よ.〕

さてここで，変数 x_1, x_2, x_3 から次の新変数 y_+, y_-, x_3 に移る：

$$\begin{aligned} y_+ &:= \frac{1}{2}(x_1 + i\,x_2) = \frac{r}{2}\sin\theta\, e^{i\varphi} \quad (i = \sqrt{-1}), \\ y_- &:= \frac{1}{2}(x_1 - i\,x_2) = \frac{r}{2}\sin\theta\, e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

すると，$x_1 = y_+ + y_-$，$x_2 = i^{-1}(y_+ - y_-)$, である．新しい 1 階の微分作用素を

$$\frac{\partial}{\partial y_+} := \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial y_-} := \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2},$$

とおくと，次を得る：

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_+} + \frac{\partial}{\partial y_-}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_+} - \frac{\partial}{\partial y_-}\right); \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_+} y_+ = 1,\ \frac{\partial}{\partial y_+} y_- = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial y_-} y_+ = 0,\ \frac{\partial}{\partial y_-} y_- = 1; \tag{3.48}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial y_+}\frac{\partial}{\partial y_-} + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2. \tag{3.49}$$

$\mathbb{P}_\ell$ の基底を求めるために，まず，x_1, x_2, x_3 の ℓ 次同次多項式の空間の基底を

$$Q^\ell_{a,b}(x) := \frac{y_+^a\, y_-^b\, x_3^{\ell-a-b}}{a!\; b!\; (\ell-a-b)!} \qquad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ 0 \leq a+b \leq \ell)$$

によって与える．上の Δ の表示を使うと，

$$\Delta\, Q^\ell_{a,b} = Q^{\ell-2}_{a-1,b-1} + Q^{\ell-2}_{a,b}$$

を得る．ただし右辺で，$a-1<0$, $b-1<0$ あるいは $\ell-2<0$ があれば，それに対応する項は 0 とする．そこで，$Q \in \mathbb{P}_\ell$ を，この基底を使って，$Q = \sum_{a,b} A^\ell_{a,b}\, Q^\ell_{a,b}$　$(A^\ell_{a,b} \in \mathbb{C})$ と書くと，

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \sum_{a,b} A^\ell_{a,b}\left(Q^{\ell-2}_{a-1,b-1} + Q^{\ell-2}_{a,b}\right) \\ &= \sum_{a,b}\left(A^\ell_{a+1,b+1} + A^\ell_{a,b}\right) Q^{\ell-2}_{a,b} = 0, \end{aligned}$$

ただし，最右辺における a, b は，$a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 \leq a+b \leq \ell-2$ を動く．したがって，$A^\ell_{a+1,b+1} = -A^\ell_{a,b}$ を得る．そこで，$a-b=m$ とおくと，その変域は $-\ell \leq m \leq \ell$ であって，

$$c_m := (-1)^a A^\ell_{a,a-m} \qquad \left(m \vee 0 \leq a \leq \left[\tfrac{\ell+m}{2}\right]\right)$$

は a によらない．ここに，$m \vee 0 = \max\{m, 0\}$，また，$[\cdot]$ はガウス記号．したがって，次の結論を得た．

命題 3.9. 空間 $\mathbb{P}_\ell$ の基底として次の関数系がとれる：

$$F_m^\ell(x) := c_m \sum_{m\vee 0 \le a \le [\frac{\ell+m}{2}]} (-1)^a Q_{a,a-m}^\ell(x) = c_m \sum_a \frac{(-1)^a y_+^a\, y_-^{a-m}\, x_3^{\ell+m-2a}}{a!\,(a-m)!\,(\ell+m-2a)!},$$

ここに，$-\ell \le m \le \ell$ である．したがって，$\dim \mathbb{P}_\ell = 2\ell + 1$.

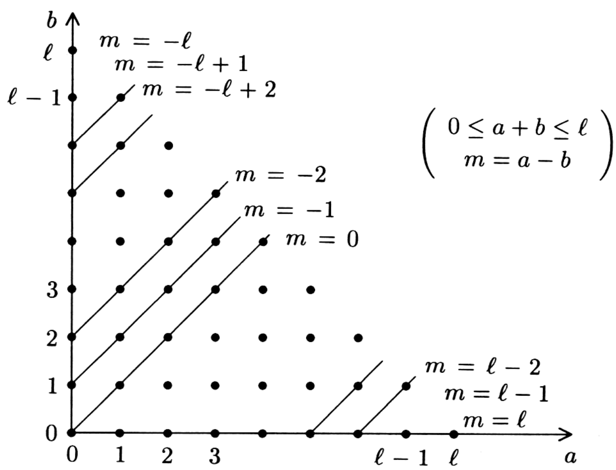


図 3.2. $Q_{a,b}^\ell$ に対する格子点 (a, b) の関連図

ここで極座標に移ると，

$$\begin{aligned} F_m^\ell(x) &= c_m r^\ell \mathcal{Y}_m^\ell(\theta,\varphi), \quad \mathcal{Y}_m^\ell(\theta,\varphi) = e^{mi\varphi}\mathcal{Z}_m^\ell(\cos\theta), \\ \mathcal{Z}_m^\ell(\cos\theta) &= \sum_{m\vee 0 \le a \le [\frac{\ell+m}{2}]} \frac{(-1)^a(\sin\theta)^{2a-m}(\cos\theta)^{\ell+m-2a}}{2^{2a-m}\, a!\,(a-m)!\,(\ell+m-2a)!}. \end{aligned}$$

いま，$\Delta F_m^\ell = 0$ であるから，Δ を極座標で書けば，次を得る：

$$\big(\Delta_S + \ell(\ell+1)\big)\mathcal{Y}_m^\ell(\theta,\varphi) = 0.$$

よって，$\mathcal{Z}_m^\ell(t)$, $t = \cos\theta$, $-1 < t < 1$, はルジャンドルの陪微分方程式 (3.38) を満たす．他方，この方程式は 2 階なので，解空間は 2 次元だが，そのうち $(1-t^2)$ を除いて，$t = \pm 1$ に特異点をもたないものは，1 次元であり，それはルジャンドルの陪関数 $P_\ell^m(t)$ (定理 3.5) の定数倍である [公式，§28, p.109]．その定数を決めるのは，ひとつには，$\|c_m \mathcal{Y}_m^\ell\|_{\mathcal{H}_S} = 1$, $\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$, である．さらには，回転群 $SO(3)$ の表現作用素ができるだけ標準的になるようにすることである．

3.6.2　$\mathbb{P}_\ell$ 上の表現と $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ 上の表現 π_ℓ

さて表現作用素 $R(g)|_{\mathbb{P}_\ell}$ を調べてみよう．極座標 (r, θ, φ) において，r には回転群は働かないので，同型写像 $\mathcal{K}: \mathbb{P}_\ell \to V(\Delta_S, \nu_\ell) \subset \mathcal{H}_S$ によって，固有空間 $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ 上の作用素 $R''(g)$ を調べることにもなっている．

まず，一径数部分群 r_{12} を考えよう．$x \in E^3$ が極座標 (r, θ, φ) を持つとする．S^2 の北極点 $x^{(3)} = {}^t(0,0,1)$ を基準にして表すと，

$$x = r_{12}(\varphi) r_{31}(\theta) x^{(3)} \tag{3.50}$$

と書ける．したがって，$R(r_{12}(\psi))f(x) = f(r_{12}(\psi)^{-1}x)$ においては，$r_{12}(\psi)^{-1}x = r_{12}(-\psi + \varphi) r_{31}(\theta) x^{(3)}$ であるから，その極座標は，$(r, \theta, -\psi + \varphi)$ である．よって，$R(r_{12}(\psi))$ の下では，

$$y_+ \;\to\; e^{-i\psi} y_+ \,, \quad y_- \;\to\; e^{i\psi} y_- \,, \quad x_3 \;\to\; x_3 \,.$$

ゆえに，$m = a - b$ とおけば，$Q^\ell_{a,b}(x) \;\to\; e^{-mi\psi} Q^\ell_{a,b}(x)$，したがって，$F^\ell_m \;\to\; e^{-mi\psi} F^\ell_m$ となるから，$R(r_{12}(\psi))$ は $\mathbb{P}_\ell$ の基底 $e_{-\ell}, e_{-\ell+1}, \ldots, e_\ell$ (ただし，$e_m := F^\ell_m$) に関して次の対角行列で表される：

$$\mathrm{diag}(e^{\ell i\psi}, e^{(\ell-1)i\psi}, \ldots, e^{i\psi}, 1, e^{-i\psi}, \ldots, e^{-(\ell-1)i\psi}, e^{-\ell i\psi}) \tag{3.51}$$

ここで現れる一径数部分群 r_{12} の 1 次元指標 $\chi_m(r_{12}(\psi)) := e^{mi\psi}$ の m を r_{12} に関する**ウェイト**とよぶ．m の大小で順序を付ければ，**最高ウェイト**は ℓ である．

補題 3.10. 表現 $R(g)|_{\mathbb{P}_\ell}$ の一径数部分群 r_{12} に関するウェイト m は，$-\ell \leq m \leq \ell$ で，その重複度は 1 である．

基底 $\{ e_m \,;\, -\ell \leq m \leq \ell \}$ に関して，r_{12} の作用は非常に分かりやすい．しかし，他の一径数部分群 r_{23}, r_{31} に対する作用を表す $(2\ell+1)$ 次の正方行列は簡単な形には書けない．そこで節をあらためてこれを論じよう．

問題 3.9. 行列 $r_{12}(\psi), r_{23}(\psi)$ の表示 (3.44) を用いて，計算によって (3.50) を示せ．

◆閑話休題 4 ◆

松本零士の漫画「銀河鉄道 9 9 9（スリーナイン）」では，主人公の鉄郎（てつろう）とメーテルが列車に乗って旅をする途中にいろいろの星を訪れるが，そのうちのひとつに「空洞惑星バレラー」がある．星の外郭（がいかく）球面のみが残り，中が空洞になっていて人々はこの球殻の内側を地面として住んでいる．球殻にあいた穴に落ちると外の宇宙空間に飛び出してしまう．2 人の言葉を借りれば，鉄郎「この惑星はまるでカボチャのようだよ !! 皮に穴のあいたカボチャのようだよ。」，メーテル「空中牧場のある空洞惑星バレラーは常識では考えられない妙な世界だわ。」，鉄「中へ入ったら上だか下だかわけのわからないおかしな星だなあ、ここは。」，メ「ところどころ外皮に穴があいていて、外部の空間から出入りできるけど …」，メ「中へはいると重力はなぜか外へ向かって働くの …　なぜだか誰にも分からない。」，メ「大きなボールの内側に立っていると思えばいいわ。」

もしこれがニュートンの発見した万有引力の支配する宇宙だったらどうだろうか？ニュートン自身が答えを出している．彼の書いた‘プリンキピア’ Book I, II, III (第3版，1726) の最新英訳 [Newt] から原文 (ラテン語) の英訳を引用してみよう．ある球面上に一様な密度で物質が分布していると仮定する．Book I, Section 12 より，

Proposition 70, Theorem 30. *If toward each of the separate points of a spherical surface there tend equal centripetal forces decreasing as the squares of the distances from the point, I say that a corpuscle placed inside the surface will not be attracted by these forces in any direction.*

Proposition 71, Theorem 31. *With the same conditions being supposed in prop. 70, I say that a corpuscle placed outside the surface is attracted to the center of the sphere by a force inversely proportional to the square of its distance from that same center.*

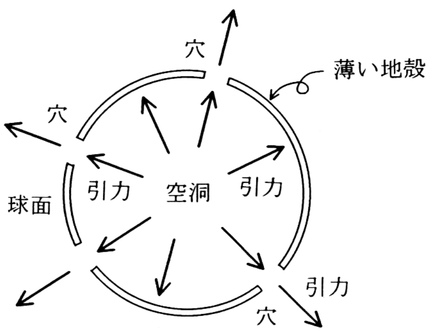


図 3.3a. 空洞惑星バレラー

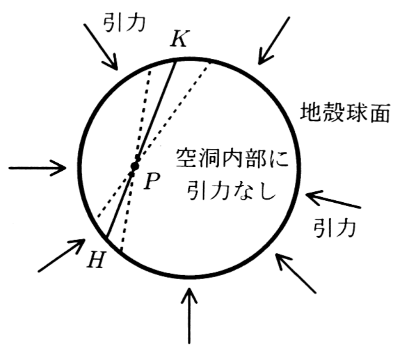


図 3.3b. 万有引力支配の宇宙

これらの証明は，現代ならば積分を使うわけだが，ニュートンは幾何学的に証明している．(**内部の点 P の場合のヒント**：図 3.3b の点 P に微少体 (corpuscle) があったとして，P を通る任意の直線 HK の周りに P を結節点とする錐を考えて，その底部である球面との切り口の面積の比を見ると，それは距離 $\overline{PH}, \overline{PK}$ の自乗の比に近い.)

したがって，球面 S 上に一様に分布した物質の作る重力場のポテンシャル $V(x)$ は，

$$V(x) = \text{定数}\ (x \text{ は } S \text{ の内部の点}), \qquad V(x) = -c_0 \frac{m_S}{r}\ (x \text{ は } S \text{ の外部の点}),$$

ここに，$c_0 > 0$ は物理定数，m_S は S 上の物質の全質量，$r = |x|$ は x と S の中心 (原点にとる) との距離である．万有引力が作り出すポテンシャルを**ニュートンポテンシャル**という．それは，特異点を除いて，方程式 $\Delta V(x) = 0$ を満たす．

3.7 群 $SO(3)$ に対するリー環 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathbb{P}_\ell$ における作用

3.7.1 リー環 $\mathfrak{so}(3)$ とその表現

一径数部分群 $r_{23}(\psi), r_{31}(\psi)$ の作用を，基底 $\{e_m\ ;\ -\ell \leq m \leq \ell\}$ に関して書こうとするとなかなか一筋縄ではいかない．そこで，ここでは，この作用の無限小形 (infinitesimal form) といわれるものを使う．これは，微分形とよんでもよいが，$\psi = 0$ における微分を取り扱うものである．

まず，一径数部分群 $r_{ij}(\psi)$ の**無限小生成元**として，この行列の $\psi=0$ における微分係数

$$X_{ij} := \frac{d}{d\psi} r_{ij}(\psi)\big|_{\psi=0} \quad (\text{行列の各成分を微分する})$$

を求めると，$X_{ij} = -E_{ij} + E_{ji}$，ここに，$E_{ij}$ は (i,j) 要素のみが 1 で他の要素は全部 0 である行列単位である：

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

一径数部分群 r_{12}, r_{23}, r_{31} が $SO(3)$ を生成することに対応して，この 3 元の張る実ベクトル空間

$$\mathfrak{so}(3) := \{\, X \in M(3,\mathbb{R})\,;\, X = \lambda_1 X_{12} + \lambda_2 X_{23} + \lambda_3 X_{31}\ ;\ \lambda_i \in \mathbb{R} \,\} \tag{3.52}$$

を，群 $SO(3)$ に対する**リー環**（または**リー代数**）であるという（一般の定義については，**8.1** 節参照）．リー環には，代数的構造として，双線形な括弧積（かっこせき）

$$[X,Y] := XY - YX \quad (X, Y \in \mathfrak{so}(3)\,)$$

が導入される．$X_{ij} \in \mathfrak{so}(3)$ 相互の括弧積は，$[E_{ij}, E_{pq}] = \delta_{jp}E_{iq} - \delta_{qi}E_{pj}$ であるから，

$$[X_{ij}, X_{pq}] = -\delta_{jp}X_{iq} + \delta_{jq}X_{ip} + \delta_{ip}X_{jq} - \delta_{iq}X_{jp}\,, \tag{3.53}$$

ここで，$X_{ij} = -X_{ji}$, $X_{pp} = 0$. したがって，

$$[X_{12}, X_{23}] = X_{31}\,, \quad [X_{23}, X_{31}] = X_{12}\,, \quad [X_{31}, X_{12}] = X_{23}\,. \tag{3.54}$$

ゆえに，$H_1 = iX_{23}, H_2 = iX_{31}, H_3 = iX_{12} \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) := \mathfrak{so}(3) + i\,\mathfrak{so}(3)$, とおくと，

$$[H_1, H_2] \;=\; iH_3\,, \quad [H_2, H_3] \;=\; iH_1\,, \quad [H_3, H_1] \;=\; iH_2\,. \tag{3.55}$$

一般に，体 $\mathbb{K}$ 上の n 次正方行列の全体 $M(n,\mathbb{K})$ に括弧積 $[X,Y] = XY - YX$ を導入した（$\mathbb{K}$ 上の）リー環を $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ と書く．その部分リー環として $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) := \{\, X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\,;\ \mathrm{tr}(X) = 0 \,\}$ がある（**7.2** 参照）．また，$\mathfrak{so}(3)$ は $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ の部分リー環である．リー環については次章でもっと詳しく説明するので少々お待ちあれ．

ここでは，$SO(3)$ の $\mathcal{P}[x]$ 上の表現 $R(g)$ の無限小形を次のように定義する：

$$X_{ij} = \frac{d}{d\psi} r_{ij}(\psi)\Big|_{\psi=0} \longmapsto R(X_{ij})f(x) := \left(\frac{d}{d\psi} R(r_{ij}(\psi))f(x)\right)\Big|_{\psi=0}$$

そこで右辺の微分作用素を計算しよう．$\frac{d}{d\psi}R(r_{ij}(\psi))f(x) = \frac{d}{d\psi}f(x')$, $x' = r_{ij}(\psi)^{-1}x$ であるから，(3.44) を用いて，「合成関数の微分」の公式で求めると，$\partial/\partial x_j$ を ∂_{x_j} と書いて，次を得る：

$$R(X_{12}) = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2},$$
$$R(X_{23}) = x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}, \quad R(X_{31}) = x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}. \tag{3.56}$$

(これらの微分作用素の物理的な意味については，**5.4** 節の量子力学における軌道角運動量の作用素 (5.53) を参照せよ．)

一般論によれば，上のように定義すれば，群 $SO(3)$ の表現 $R(g)$ から自然にリー環 $\mathfrak{so}(3)$ の表現 $R(X)$ が得られる．**リー環の表現**とは，実線形な写像であって，かつ括弧積が保存されるということ：

$$R(\lambda X + \mu Y) = \lambda R(X) + \mu R(Y),$$
$$R([X,Y]) = [R(X), R(Y)] \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ X, Y \in \mathfrak{so}(3)),$$

を意味する (**4.2.1** および **9.1** 参照)．我々の場合に，上に計算した $R(X_{ij})$ が確かに括弧積 (3.53) を保存していることを直接の計算で確かめてみるのは面白い演習問題であろう．

実数体 $\mathbb{R}$ 上のリー環 $\mathfrak{so}(3)$ の係数を複素数体 $\mathbb{C}$ に拡大して，複素リー環 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ を作ると，表現も自然に拡張される．$H = iX_{12}$, $Y_+ := -X_{31} + iX_{23}$, $Y_- := X_{31} + iX_{23}$, とおけば，関係式

$$[H, Y_+] = Y_+, \quad [H, Y_-] = -Y_-, \quad [Y_+, Y_-] = 2H, \tag{3.57}$$

を満たす．(**注：** 第 II 部 **7.2.2** におけるリー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の標準トリプル (X_+, H, X_-) の括弧積 (7.25) と比較すると，ここでの $(Y_+, 2H, Y_-)$ が同じ括弧積を持つので，リー環の同型 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ が具体的に分かる.)

さて，$R(Y_\pm)$ を変数 y_+, y_- を用いて書き直すと，

$$R(Y_+) = x_3\partial_{y_-} - 2y_+\partial_{x_3}, \quad R(Y_-) = -x_3\partial_{y_+} + 2y_-\partial_{x_3},$$

となる．したがって，この作用素を多項式 $Q^\ell_{a,b}$ に作用すると，

$$R(Y_+)Q^\ell_{a,b} = (\ell + 1 - a - b)Q^\ell_{a,b-1} - 2(a+1)Q^\ell_{a+1,b},$$
$$R(Y_-)Q^\ell_{a,b} = -(\ell + 1 - a - b)Q^\ell_{a-1,b} + 2(b+1)Q^\ell_{a,b+1},$$

となる．ここで，右辺の $Q^\ell_{a',b'}$ で添数の条件 $0 \le a'$, $0 \le b'$, $a' + b' \le \ell$ を満たさないものは 0 とする．$m = a - b$ として，基底の元 $e_m = F^\ell_m(x) = c_m \sum_{m\vee 0 \le a \le [\frac{\ell+m}{2}]}(-1)^a Q^\ell_{a,a-m}(x)$

への作用を計算すると,

$$
\begin{aligned}
R(Y_+)e_m &= d_{m+1}e_{m+1}, \quad d_{m+1} := \frac{c_m}{c_{m+1}}(\ell+1+m) \\
R(Y_-)e_m &= d'_m e_{m-1}, \quad d'_m := \frac{c_m}{c_{m-1}}(\ell+1-m).
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

基底 $\{e_m ; -\ell \leq m \leq \ell\}$ はウェイト m で番号を付けてあるが, $R(Y_+)$ はそのウェイトを 1 だけ上げるので, これを**昇 演算子**という. $R(Y_-)$ はウェイトを 1 だけ下げるので**降演算子**という. これらを $(2\ell+1)$ 次の正方行列で表すと, $R(Y_+)$ では, 対角線よりひとつ下の対角部分に d_m, $-\ell+1 \leq m \leq \ell$, が並んでおり, $R(Y_+)$ では, 対角線のひとつ上の対角部分に d'_m, $-\ell+1 \leq m \leq \ell$, が並んでいる.

$\mathcal{K}(\mathbb{P}_\ell) = V(\Delta_S, \nu_\ell) \subset \mathcal{H}_S$ 上の $SO(3)$ の表現 π_ℓ は, ユニタリだから, 作用素として, $R(g)^* = R(g)^{-1} = R(g^{-1})$, $g \in SO(3)$. 一径数部分群 $g(t) = r_{ij}(t)$ に対して, $t=0$ で $R(g(t))$ を微分して無限小形に移ると, $X = X_{ij} \in \mathfrak{so}(3)$ に対して, $R(X)^* = -R(X)$ である. いま, $c_m > 0$ を調整して, e_m の長さを 1 にすると, 正規直交基底を得る. そのときの行列表示を求めよう. その行列表示では, $R(X)$ は反エルミート行列. したがって, $R(Y_+)^* = R(Y_-)$, よって, $d_m = d'_m$ $(-\ell \leq m \leq \ell)$. ゆえに, $(c_m/c_{m+1})^2 = (\ell-m)/(\ell+1+m)$. これから, 定数倍を除いて, c_m が決まり, $d_m = \sqrt{(\ell+1-m)(\ell+m)}$ を得る. かくて,

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & & & & \\
d_\ell & 0 & 0 & \ddots & & & \\
0 & d_{\ell-1} & 0 & \ddots & & & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
& & & & & & \\
& & & \ddots & d_{-\ell+2} & 0 & 0 \\
& & & & 0 & d_{-\ell+1} & 0
\end{pmatrix},
\quad
\begin{pmatrix}
0 & d_\ell & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & d_{\ell-1} & 0 & \ddots & & \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & & & & \\
& & & & \ddots & d_{-\ell+2} & 0 \\
& & & & \ddots & 0 & d_{-\ell+1} \\
& & & & & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

図 3.4. 正規直交基底に関する行列 $R(Y_+)$, $R(Y_-)$ の形

リー環 $\mathfrak{so}(3)$ の有限次元の表現が**既約**であるとは, $\{0\}$ と全空間以外には不変部分空間が無いことを意味する.

命題 3.11. $(2\ell+1)$ 次元空間 $\mathbb{P}_\ell$ はリー環 $\mathfrak{so}(3)$ の表現 $R(X)$ のもとで既約である. この既約表現 π_ℓ は, その最高ウェイト ℓ で特徴づけられる. そして, 表現空間に適当な正規直交基底 $\{e_m ; -\ell \leq m \leq \ell\}$ をとれば, 次の形に表される: $d_m = d^\ell_m = \sqrt{(\ell+1-m)(\ell+m)}$ とおくと,

$$
\pi_\ell(H)e_m = me_m\,, \quad \pi_\ell(Y_+)e_m = d_{m+1}e_{m+1}\,, \quad \pi_\ell(Y_-)e_m = d_m e_{m-1}\,. \tag{3.59}
$$

上の行列表示 (3.59) を π_ℓ の**標準形**といい，そのときの基底を**標準基底**とよぶ.

注意 3.4. 第 II 部，定理 9.17 の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ の既約表現 $\boldsymbol{F}_{2\ell+1}$ はこのリー環相互の同型を通じて，π_ℓ に対応する.

命題 3.11 の証明. リー環 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ の表現として既約であることと同値であるから，$R(H)$, $R(Y_\pm)$ の下(もと)で既約であることを示せばよい．ウェイトベクトル e_m への作用を考えれば，昇降演算子 $R(Y_\pm)$ を使って証明できる. □

定理 3.6 の証明. 上の命題はリー環 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ の表現 π_ℓ の既約性を主張しているが，これはもとはと言えば，群 $SO(3)$ の表現の微分形であるから，その表現 $R(g)|_{\mathbb{P}_\ell}$ の既約性を意味する. □

注意 3.5. 空間 $\mathcal{P}[x]$ 上の作用素 $\Delta' := R(X_{12})^2 + R(X_{23})^2 + R(X_{31})^2 = R(Y_+)R(Y_-) + R(H)^2 + R(H)$ を考える (**4.5** 節，注意 4.4 参照). すると，部分空間 $\mathbb{P}_\ell$ の上では，スカラー倍 $-\ell(\ell+1)\cdot$ に等しい：

$$\Delta' f \;=\; -\ell(\ell+1)f \quad (f \in \mathbb{P}_\ell) \qquad (\ell = 0,1,2,\ldots). \tag{3.60}$$

これは，(3.58) 式から簡単な計算で分かる．他方，作用素 Δ' の固有値 $-\ell(\ell+1)$ はすべて相異なるので，上の固有方程式を (3.41) を満たす調和多項式の空間の上で考えれば，既約部分空間 $\mathbb{P}_\ell$ を決定する．ここで，非常に先走ったことをコメントすると，この固有方程式を多項式全体の空間 $\mathcal{P}[x]$ の上で考えれば，その解空間は，$\mathbb{P}_\ell \otimes$ ($\mathfrak{su}(1,1)$ の離散系列の表現 D_ℓ の表現空間) となるはず，である (注意 11.7 参照).

基底ベクトルの正規化 (定数 c_m の決定)

(3.43) の同型 $\mathcal{K} : f \mapsto f|_{S^2}$ によって，$\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$ の上に移ったとして，係数 $c_m > 0$ を調整して，$e_m|_{S^2}$ の長さを 1 に正規化する．$\mathcal{K}(\mathbb{P}_\ell) \subset V(\Delta_S, \nu_\ell)$ の上に R から導かれた既約ユニタリ表現 π_ℓ はこの基底に関してユニタリ行列で表される．先述のように，

$$\left(\frac{c_m}{c_{m+1}}\right)^2 = \frac{\ell - m}{\ell + 1 + m} \qquad \therefore\ (c_m)^2 = \frac{(\ell+m)!\,(\ell-m)!}{(2\ell)!}\,(c_\ell)^2.$$

他方，$F_\ell^\ell(x) = c_\ell(-1)^\ell\, Q_{\ell,0}^\ell(x) = c_\ell(-r/2)^\ell(\ell!)^{-1}(\sin\theta)^\ell e^{\ell i\varphi}$，$d\mu_S(\omega) = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ により，

$$1 \;=\; \|F_\ell^\ell\|^2 = \frac{(c_\ell)^2 \cdot 2\pi}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_0^\pi (\sin\theta)^{2\ell}\sin\theta\, d\theta = \frac{(c_\ell)^2\cdot 4\pi}{(2\ell+1)!}.$$

$$\text{ゆえに，}\qquad c_\ell = \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}},\quad c_m = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot(\ell+m)!\,(\ell-m)!}\,.$$

これにより，$\mathcal{K}(F_\ell^\ell) = F_\ell^\ell|_{S^2}$ が定理 3.5 の $Y_{\ell\ell}$ に等しいことが分かる．さらに，$\mathcal{K}(F_m^\ell) = Y_{\ell m}$ となることが示される．この等式は，ルジャンドルの陪関数 P_ℓ^m のひとつの表示式を与えている [公式，§32, p.131].

3.7.2. 完備性 (定理 3.5(ii)) および同型 $\mathbb{P}_\ell \cong V(\Delta_S, \nu_\ell)$

完備性 (定理 3.5(ii)) の証明. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_S$ において，固有空間 $V(\Delta_S, \nu_\ell)$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, は互いに直交しているが，それらの直交直和が全空間になることを示そう．それには次の定理 3.12 が示されればよい．実際，この定理により，$\mathcal{K}(\mathbb{P}_\ell) \subset V(\Delta_S, \nu_\ell)$ の代数和は連続関数の空間 $C(S^2)$ で稠密である．したがって，$\mathcal{H}_S$ で稠密である．これにより，すべての $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ に直交する部分空間は $\{0\}$ しかないことが分かる．これで完備性の証明が完了した． □

定理 3.12. E^3 での体球関数 (調和関数) の S^2 への制限全体，すなわち，$\mathcal{K}(\mathbb{P}_\ell), \ell \geq 0$, の代数的直和は，$S^2$ 上の連続関数の空間 $C(S^2)$ において (一様位相に関して) 稠密である．

証明. 調和関数に関する基本的な結果を援用する．

補題 3.13 (ポアッソン積分). E^3 の原点 O を中心とする半径 ρ の球面 $S(\rho)$ の上の任意の連続関数 f に対して，$S(\rho)$ の内部 $D(\rho)$ で調和で閉球 $D(\rho) \cup S(\rho)$ で連続な関数 F で $F|_{S(\rho)} = f$ となるものが一意的に存在する．それは次の積分公式で与えられる：

$$F(P) = \frac{\rho^2 - \overline{OP}^2}{4\pi\rho} \int_{S(\rho)} \frac{f(Q)}{\overline{PQ}^3}\, d\mu(Q) \quad (Q \in D(\rho)) \tag{3.61}$$

ここに，$d\mu$ は $S(\rho)$ の面積要素 ([井上，定理 36] 参照)．

S^2 上の任意の連続関数 f をとる．$\rho > 1$ に対して，$f^\rho(\rho\omega) := f(\omega)$ とおいて $S(\rho)$ 上の連続関数 f^ρ を作り，上の公式 (3.61) によって，内部 $D(\rho)$ で調和な関数 F^ρ に拡張する．$\rho \to 1 + 0$ のとき，$F^\rho|_{S^2}$ は f を一様に近似する．

調和関数の性質として，「$D(\rho)$ で調和な関数 F を冪級数に展開して同次項にまとめると，その級数は $D(\rho)$ で絶対かつ広義一様に収束する」[井上，3.12]．このとき，各同次項は体球関数であり，この級数は $D(\rho')$, $\rho' < \rho$, で一様収束する．F の代わりに上の F^ρ を考えると，$F^\rho|_{S^2}$ は体球関数よりなる級数の S^2 への制限によって一様近似される． □

また，定理 3.12 を用いて，次の同型定理が得られる．

定理 3.14. $SO(3)$ の表現について，写像 $\mathcal{K}f = f|_{S^2}$ は，$\mathbb{P}_\ell$ を $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ の上に同型に写す ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$)．

問題 3.10. 3次の実正方行列の全体を $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ と書いて，群 $GL(3, \mathbb{R})$ のリー環であるという．$\mathfrak{so}(3)$ は，$\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ の反対称行列全体よりなる部分リー環であることを示せ． 〔ヒント：部分リー環であることは，上の括弧積に関して $\mathfrak{so}(3)$ が閉じていること，すなわち，$X, Y \in \mathfrak{so}(3) \Longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{so}(3)$ を示せばよい.〕

問題 3.11. (i) 微分作用素 $R(X_{ij})$ の公式 (3.56) を証明せよ．
(ii) この R が交換関係 (3.53) を保存していることを証明せよ．

問題 3.12. 命題 3.11 の証明を丁寧に書き下して見よ．

◆閑話休題 5 ◆

リー環は，またリー代数ともよばれる．この２つの名前は現在は両立していて，時と場合によってどちらを使ってもよい．歴史的にはリー環という名前が先行している．日本数学会編集の数学辞典では，その第１版 (1954) ではリー環，第２版 (1968) 以降ではリー代数，が採用されている．

数学者個々人でも，あまり意識せずに両者を使う人が多い．その受け取り方はさまざまである．例えば，ある人によれば「リー代数を道具に使う立場の場合は『リー環』，リー代数そのものをテーマの中心に据える場合はやはり『リー代数』といった使い方がされているような印象を個人的には持っています」とのこと．

ところで，本書では２人の共著者がそれぞれの第１稿で自然に使った用語を無理に統一せずに完成稿までそのまま残しておいたので，第 I 部ではリー環，第 II 部ではリー代数，としてある．読者の御寛恕を乞いたい．

数学の術語は，英仏独露などの外国語でも歴史的に変遷している．それは，作用素環でも，ring of operators ⇒ operator algebra, と移り変わっているが，日本語では (元祖 J. von Neumann の用語に従って) 現在でも「作用素環」のままである．また，関数環 (function algebra) では，「関数代数」という日本語が音韻的にも全くこなれない言葉なので，術語として採用される望みは無いだろう．

3.8 水素原子の電子の軌道

１個の水素原子をとると，それは陽子１個よりなる原子核の回りに電子１個が回転している．その電子軌道の理論にとりかかろう．この物理系の対称性の群は，回転群 $SO(3)$ で表される．陽子の中心に原点をとり，電子の静止質量を m_e，その座標を $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とする．ここにはクーロン (Coulomb) ポテンシャル $V(r) = -e^2/r$ $(r = |x|)$ が存在している．e は電気素量を表す．時間を含むシュレーディンガー方程式 (3.11) の定常解 $\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x)$ を考えると，波動関数 $\psi(x)$ に対するシュレーディンガー方程式は，

$$\widetilde{H}\psi = E\,\psi, \quad \widetilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta - \frac{e^2}{r}, \tag{3.62}$$

である．極座標 (r,θ,φ) に関して変数分離型の解 $\psi(x) = u(r)Y(\theta,\varphi)$ を求めると，**3.4**～**3.5** 節における議論によって，

$$\Delta_S Y(\theta,\varphi) = -\ell(\ell+1)Y(\theta,\varphi) \qquad (\ell = 0,1,2,\dots) \tag{3.63}$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{2E}{a_0 e^2}\right]u(r) \ = \ 0, \tag{3.64}$$

ここに，$a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ はボーア (Bohr) 半径とよばれ，電子軌道の存在確率が最も高い軌道半径である．

$u(r) = r^{-1}v(r)$ とおいて，動径方程式を書き直すと，

$$v'' + \left(-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{2E}{a_0 e^2}\right)v = 0 \quad (r > 0). \tag{3.65}$$

動径関数 v に対して，(3.34)～(3.36) で与えた，Δ_S の固有値 $-\ell(\ell+1)$ の固有関数 $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, $-\ell \leq m \leq \ell$, をとって，$\psi(x) = r^{-1}v(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ とおくとき，それが $L_2(E^3; d\mu(x))$ に入れば，そのときの E が，シュレーディンガー作用素 $\widetilde{H}$ の固有値(系のエネルギー)を与える．波動関数 $\psi(x)$ が方位量子数 $\ell = 0,1,2,3,\ldots$ の角関数 $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ をもつとき，それの表す水素原子のスペクトルを分光学の名前でS波，P波，D波，F波，$\cdots$ とよぶ．$\mathcal{H}_S = L^2(S^2; d\mu_S)$ とおけば，$\|Y_{\ell m}\|^2_{\mathcal{H}_S} = 1$ であるから，$\|\psi\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|Y_{\ell m}\|^2_{\mathcal{H}_S} = \|v\|^2 = \int_0^\infty |v(r)|^2\,dr$ である．したがって，問題となるのは，動径方程式の解 $v(r)$ の $r \to +0$, $r \to +\infty$ の漸近挙動である．

$r = 0, +\infty$ は線形常微分方程式 (3.64) の確定特異点と言われるもので，解は $0 < r < +\infty$ において

$$u(r) = r^N \sum_{i=0}^{\infty} b_i r^i \quad (b_0 \neq 0)$$

の形に展開できる．この冪級数 ($N \geq 0$ のとき) またはローラン (Laurent) 級数 ($N < 0$ のとき) は項別微分できるから，方程式に代入して，最低次 $(N-2)$ 次の係数を調べると，

$$b_0 N(N+1) - b_0\ell(\ell+1) = 0 \qquad \therefore\ N = \ell \text{ または } -\ell-1,$$

となる．前者の場合が，$r=0$ の近くで L_2 になり，$\|v\| < \infty$ の要求に適合する．

$r = \infty$ の近くの状況も同時に知るために，$v(r)$ に関する方程式

$$v'' + \left(A + \frac{2B}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)v = 0, \qquad A = \frac{2E}{a_0 e^2},\ B = \frac{1}{a_0}, \tag{3.66}$$

を使う．量子力学の古典 [朝永 1] の §42 および付録 IX で述べられているように，確定特異点型線形微分方程式の理論によって，$A > 0$ の場合は，$\|v\| < \infty$ の要求に適合しないことが分かる．そこで $A < 0$ の場合を考える．変数を $s = 2\sqrt{-A}\,r$ に変換し，$v(r) = e^{-s/2}w(s)$ とおくと，方程式 (3.66) は下のようになる：

$$w'' - w' + \left(\frac{C}{s} - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2}\right)w \ = \ 0, \qquad C = \frac{e}{\sqrt{-2a_0 E}}. \tag{3.67}$$

そこであらためて，$w(s) = s^M \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i$ $(c_0 \neq 0)$ と展開して，項別微分を使えば，次の漸化式が得られる：

$$\begin{aligned} M(M-1)c_0 - \ell(\ell+1)c_0 \ &= \ 0, \\ \big((M+i+1)(M+i) - \ell(\ell+1)\big)c_{i+1} \ &= \ (M+i-C)c_i \quad (i \geq 0). \end{aligned}$$

この第1式から，$M = \ell+1, -\ell$ を得て，$M = \ell+1$ を採用し，第2式から，

$$c_i = c_0 \cdot \frac{1}{i!} \prod_{k=1}^{i} \frac{k+\ell-C}{k+2\ell+1} \tag{3.68}$$

を得る．(条件 $\|v\| < \infty$ のためだけならば，$\ell = 0$ の場合には，$M = -\ell = 0$ を採用する選択肢もありそうだが，実はこれはない.) さて，どれかの $k \geq 1$ に対して分子の $k+\ell-C=0$ となる場合は，$w(s)$ は多項式になる．そうでないときは，c_i を評価すれば，$s \to +\infty$ のとき，$w(s)$ は，任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対して，ある $K > 0$ が存在して，$Ke^{(1-\varepsilon)s}$ を超えて増大する．したがって，$C = k + \ell (= n$ とおく$)$ の場合だけが残る．この場合の固有値 (エネルギー) E は，

$$E = E_{(n)} = -\frac{e^2}{2a_0 n^2}, \quad n = \ell+1, \ell+2, \dots, \tag{3.69}$$

である．このとき $s = 2\sqrt{-A}\,r = (2/na_0)r$ であり，$w(s)$ はラゲール (Laguerre) 多項式を使って書ける．実際，$w(s) = s^{\ell+1}\, y(s)$ とおくと，方程式 (3.67) は次になる：

$$s\,y'' + (2\ell + 2 - s)\,y' + (n - \ell - 1)\,y \;=\; 0. \tag{3.70}$$

ここで，我々に必要な結果を，公式集 [公式，§26] から引用しよう．n, α を非負整数とする．次の公式で与えられる 1 変数多項式を**ラゲール多項式**という．

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) \;&:=\; \frac{e^x\,x^{-\alpha}}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}\,x^{n+\alpha}\right) \\ &=\; \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{pmatrix} \frac{(-x)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

補題 3.15. (i) $y(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ は次のラゲールの微分方程式の解である：

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny \;=\; 0. \tag{3.72}$$

(ii) ラゲール多項式は次の直交関係を満たす：

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\, L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ (n+\alpha)!/n! & (m = n) \end{cases} \tag{3.73}$$

さて，方程式 (3.72) の多項式解は定数倍を除いて一意的であることが分かるから，方程式 (3.70) の解として，$y(s) = d_{n\ell}\, L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s)$,

$$L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s) \;=\; \sum_{k=0}^{n-\ell-1} \begin{pmatrix} n+\ell \\ n-\ell-1-k \end{pmatrix} \frac{(-s)^k}{k!}, \tag{3.74}$$

となる．したがって，$\widetilde{H}$ の固有値 $E = E_{(n)}$ に対応する動径方程式 (3.65) の解は，

$$v_{n\ell}(r) = d_{n\ell}\, e^{-s/2}\, s^{\ell+1}\, L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s), \quad s = \frac{2r}{na_0}\;;\; n = \ell+1, \ell+2, \dots, \tag{3.75}$$

で与えられる．我々は，正規化条件 $\|v\| = 1$ を満たすように定数 $d_{n\ell}$ を決定し，**直交関係**，すなわち，相異なる固有値 E に対する固有関数 $\psi(x) = u(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \in L_2(E^3; d\mu(x))$ は直交する，を検証しよう．そのために，積分

$$I_{n,n'} := \int_0^\infty u_{n\ell}(r)\, u_{n'\ell}(r)\, r^2\, dr$$

を計算して $I_{n,n}$ を求め，また，$I_{n,n'} = 0\ (n \neq n')$ を示す．それには，積分

$$\begin{aligned} I'_{n,n'} \quad &:= \quad \int_0^\infty e^{-s/2}\, s^{\ell+1} L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s) \cdot e^{-s'/2}\, (s')^{\ell+1}\, L_{n'-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s')\, dr \\ &\text{ただし} \quad s = (2/na_0)r,\ s' = (2/n'a_0)r, \end{aligned}$$

を求めればよい．まず，$I'_{n,n}$ の計算では，$s' = s$ である．そこで，一方の $L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s)$ には (3.71) 式を使い，もう一方の $L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s)$ には (3.74) を代入して $ds = (2/na_0)dr$ に関する部分積分を $(n - \ell - 1)$ 回繰り返すことによって，

$$I'_{n,n} = \frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!} \cdot 2n$$

が得られる．他方，直交関係 $I'_{n,n'} = 0\ (n \neq n')$ は，$s \neq s'$ なので，部分積分の方法では簡単には計算できない．そこで，これを示すには，ヒルベルト空間 $L_2(\mathbb{R}_+; dr)$ における「形式的に自己共役な」微分作用素

$$\frac{d^2}{dr^2} + \left(-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{a_0 r} \right)$$

の固有値問題を考える．そして「各固有値は実数であって，相異なる固有値に対する固有関数は直交する」ことを具体的に書き下すと，$I'_{n,n'} = 0\ (n \neq n')$ が得られる (ラゲール関数の性質を使う必要がある)．

さて，$1 = \|v\|^2 = (d_{n\ell})^2\, I'_{n,n}\, na_0/2$ より，定数 $d_{n\ell}$ は次のようにとれる：

$$d_{n\ell} \ = \ \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{(n+\ell)!\, n^2\, a_0}}. \tag{3.76}$$

定理 3.16. 水素原子に対するシュレーディンガー方程式 (3.62) の定常解 $\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x)$ に対する固有値 $E \neq 0$ は，(3.69) の $E_{(n)} = -e^2/(2a_0 n^2), n = 1, 2, 3, \dots,$ によって与えられる．$E = E_{(n)}$ に対する固有関数 $\psi(x)$ は，

$$\begin{aligned} \psi(x) \ &= \ d_{n\ell}\, r^{-1} e^{s/2} s^{\ell+1}\, L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}(s) \cdot Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad s = (2/na_0)r\,; \\ &\qquad 0 \leq \ell \leq n-1, \quad -\ell \leq m \leq \ell, \end{aligned} \tag{3.77}$$

で与えられる．したがって，固有値 $E_{(n)}$ の重複度は n^2 である．

注意 3.6. シュレーディンガー作用素は対称であるから，一般論によって，その固有値は実数であり，そして，相異なる固有値に対応する固有関数は互いに直交する．また，上の補題 3.15 (ii) を書き直して，類似の積分の値

$$J_{n,n'} := \int_0^\infty e^{-s}\, s^{2\ell+1}\, L^{(2\ell+1)}_{n-\ell-1}(s) L^{(2\ell+1)}_{n'-\ell-1}(s)\, ds \;=\; \delta_{n,n'}\, \frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!}$$

を考えると，こちらも見事に直交関係を満たしている．[朝永 1] には，直交関係は主張されてはいるが，具体的な計算は示されていない．

注意 3.7. ラゲール多項式に対する記号は，物理書 [朝永 1] や数学辞典 [数学] の項目 **436** 量子力学，などでは，数学書での記号と異なっていて紛らわしいので注意を要する．

問題提起 3.1. 方程式 (3.66) において，$A=0$, すなわち，エネルギー $E=0$ の場合の解 $v(r)$ の $r\to+0$, $r\to+\infty$ の漸近挙動を調べて，有界条件 $\|v\|<+\infty$ を調べること．これは，物理学的な意味は別として，シュレーディンガー作用素 $\widetilde{H}$ のスペクトル分解を求めるためには必要である．

いとぐち : 方程式 (3.65) において，$s=2Br=2r/a_0$ とおくと，$w(s)=v(r)$ につき

$$s^2 w'' + \bigl(s-\ell(\ell+1)\bigr)w \;=\; 0$$

を得る．その冪級数解を求めると，$w(s)=s^{\ell+1}\,y(s)$ として

$$s\,y'' + 2(\ell+1)\,y' + y \;=\; 0, \tag{3.78}$$

$$y(s) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-s)^i}{(i+2\ell+1)!\; i!}. \tag{3.79}$$

そこで，問題は次の積分の収束である： $\int_0^\infty s^{2\ell+2}\,|y(s)|^2\,ds<\infty$?

収束すれば，それは固有値 $E=0$ に対する固有関数 $\psi(x)\in L_2(E^3; d\mu(x))$ を与える．さらには，固有値 $E\neq 0$ に対する固有関数との直交関係も検証してみたい．

◆閑話休題 6 ◆

クーロン (C.A. Coulomb, 1736–1806) は 1785–1787 に，電気，磁気に関するクーロンの法則を実験的に確立した．それは，電気力ならば,「2 個の点電荷の間には，引力または斥力が，万有引力の場合と同様に，電荷の積に比例し，かつ，距離の自乗に反比例する強さで 2 点を結ぶ方向に働く」ということである．上で取り扱ったクーロンポテンシャルは，この逆自乗法則に基づいている．電磁気力によるポテンシャルは，先の閑話休題 4 で述べたニュートンポテンシャルと同様の性質をもっている．とくに，特異点を除けば，空間のラプラシアン Δ の零解，すなわち，調和関数である．

電荷・磁荷や質量が，ある広がりをもって分布している場合のポテンシャルを研究するのが，(古典的な) ポテンシャル論である．これは，調和関数論における境界値問題にも密接に関連している．例えば，コンパクトな境界 S をもつ領域 D 上に与えられた境界値をとる D 内の調和関数を求める問題をディリクレ (Dirichlet) 問題といい，D が有界のときには内部問題，非有界のときには外部問題という．後者は，質量が S 上に分布している単一層ニュートンポテンシャルの場合などに対応する．このように，現代のポテンシャル論と調和関数論とは密接不可分につながっている．

ちなみに，補題 3.13 は球面 S^2 に対するディリクレの内部問題の解を与えている．

第4章 $SO(3)$, $SU(2)$ およびそのリー環の表現

コンパクト群 G の既約ユニタリ表現 π は有限次元であって，$L_2(G)$ 上の右正則表現 R_G の中にその次元 $\dim\pi$ の重複度をもって現れる．これはペーター - ワイル (Peter - Weyl) の定理とよばれるが，一般論として弱い意味での既約表現の分類を与えるものであり，その証明もそれほど難しくはない．

しかし，個別具体論となると話は別であって，取り扱う群の個性が強烈に現れる．この章では，一般論を避けて，回転群 $SO(3)$ およびその普遍被覆群であるユニタリ群 $SU(2)$ の表現について詳しく述べよう．そこには，量子力学との深い関係があると同時に，一般のコンパクト群に対する表現論の各種の問題の萌芽が現れているからである．

リー群 $SO(3), SU(2)$ とリー環 $\mathfrak{so}(3), \mathfrak{su}(2)$ との対応，リー環の普遍展開環を微分作用素で表現することなどなどを，一般論ではなくて，実践 (実戦？) を通じて体得することを目指す．具体的な計算では，その梗概(こうがい)を示した部分では読者自身で追跡できるように工夫してあるので，詳しい計算を実行されたい．実力が着くこと請け合いである．

4.1 パウリのスピン行列とパウリ方程式

この章では，**3.6**〜**3.8** に従って，空間 E^3 の座標を $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と書くが，この節だけでは，物理学との関係を述べるので，物理学の記号に合わせて，$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ と書く．

電子の角運動量や磁気能率の研究から，1925〜26 年には「電子は，単なる質点ではなくて自転している」ことが結論され，その**スピン角運動量** (s_x, s_y, s_z) の各成分の大きさが $\hbar$ を単位として $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ の 2 種類に限られることが分かった (作用素 s_z の固有値は $\pm\frac{1}{2}$ である)．パウリ (W. Pauli, 1900–58; ノーベル賞, 1945) は，従前の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は，$\psi(\boldsymbol{x}, t; s_z)$ で表されるべきだとして，$\psi(\boldsymbol{x}, t; \frac{1}{2}), \psi(\boldsymbol{x}, t; -\frac{1}{2})$ の 2 つの関数の組によって，これを 2 次元のベクトルの値をとる関数として捉えた [Paul]．縦ベクトルで書くと，

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_+(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_-(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix}, \quad \psi_\pm(\boldsymbol{x}, t) := \psi(\boldsymbol{x}, t; \pm\tfrac{1}{2}) \ (\text{複号同順}), \tag{4.1}$$

となる．そしてパウリは，スピン角運動量 (s_x, s_y, s_z) に対して，関係式

$$[s_x, s_y] = is_z, \quad [s_y, s_z] = is_x, \quad [s_z, s_x] = is_y, \tag{4.2}$$

を満たすべきだとした．ただし，$[A, B] = AB - BA$．そこで，**パウリ行列**とよばれる 2×2 型行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

を導入し，$s_x = \frac{1}{2}\sigma_x$, $s_y = \frac{1}{2}\sigma_y$, $s_z = \frac{1}{2}\sigma_z$, とおいて，行列とベクトルの積として，$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ (の値の空間) に働かせた．時間 t を隠して書くと，

$$s_x(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\psi_-(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{2}\psi_+(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad s_y(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\psi_-(\boldsymbol{x}) \\ \frac{i}{2}\psi_+(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad s_z(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\psi_+(\boldsymbol{x}) \\ -\frac{1}{2}\psi_-(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

そして，パウリは，スピンを考慮しなかったときのシュレーディンガー方程式 (3.3) のハミルトニアン $\widetilde{H}$ に，スピンのエネルギー H_1 を加え，さらにゼーマン効果を扱うために外磁場と電子間の相互作用のハミルトニアン H_2 を加えて，新しいハミルトニアン $\widetilde{H} + H_1 + H_2$ を作り，$\boldsymbol{\psi}$ の各成分がこのハミルトニアンに対する (3.3) 型の方程式 (**パウリ方程式**とよぶ) を満たすことを要求した．定常解 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) = \exp(-iEt/\hbar)\,\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ に対しては，

$$\big(\widetilde{H} + H_1 + H_2 - E\big)\boldsymbol{\psi} \;=\; 0 \tag{4.4}$$

となる．この方程式が x, y, z 軸回りの回転に対して不変 (もしくは，共変) であるためには，すなわち，うまく同じ形に変換されるためには，ベクトル値関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ がどのように変換されるべきかを調べた．波動関数が 2 成分であることになったので，シュレーディンガー方程式における固有値 $E_{(n)}$ に対する重複度 (固有関数の空間の次元) は，パウリ方程式においては 2 倍に増えることになった．これらの波動関数の重複の仕方についての「微細構造公式」も，実験と並んで理論的に研究された．

次節では，このスピンを含む波動関数の変換の理論を，回転群 $SO(3)$ の 2 重被覆である普遍被覆群 $SU(2)$ およびそのリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の表現論を用いて述べてみよう．

注意 4.1. 群の表現論と量子力学との関連についての初期の成書としては，次のものが挙(あ)げられる (発行年は初版) ：

H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928, S. Hirzel, Leipzig (英訳本：*The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, 1950).

E.P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, 1931 (英語増訂版：*Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, 1959; 和訳本，吉岡書店，1971).

4.2 特殊ユニタリ群 $SU(2)$ とそのリー環 $\mathfrak{su}(2)$

4.2.1 $SU(2)$ と $\mathfrak{su}(2)$

2次のユニタリ群 $U(2)$ と特殊ユニタリ群 $SU(2)$ は,

$$\begin{aligned} U(2) &:= \{u \in GL(2,\mathbb{C})\ ;\ uu^* = u^*u = E_2\}, \\ SU(2) &:= \{u \in U(2)\ ;\ \det u = 1\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

で定義される. $SU(2)$ の任意の元 u は,

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C},\ a\,\overline{a} + b\,\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{4.6}$$

と書ける. すぐあとで詳しく述べるが, $SU(2)$ のリー環は,

$$\mathfrak{su}(2) := \{X\ ;\ 2\text{ 次の複素行列},\ X^* = -X\ (\text{反エルミート型}),\ \mathrm{tr}\,X = 0\} \tag{4.7}$$

で与えられる. ここに, $\mathrm{tr}\,X$ は行列 X の対角要素の和で, **トレース** (trace) とよばれる. $\mathfrak{su}(2)$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の3次元ベクトル空間であって, 括弧積 $[X,Y] := XY - YX$ に関して閉じている.

パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は, そのトレースは零 ($\mathrm{tr}X = 0$) で, エルミート型 ($X^* = X$) である. そこで, $-is_x = -\frac{i}{2}\sigma_x$, $-is_y = -\frac{i}{2}\sigma_y$, $-is_z = -\frac{i}{2}\sigma_z$ ($i = \sqrt{-1}$), をとって,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

とおくと, これは, ベクトル空間としての $\mathfrak{su}(2)$ の基底を与える. そして, 関係式

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2, \tag{4.9}$$

を満たす. これは, リー環 $\mathfrak{su}(2)$ の構造を完全に決定する.

リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ のベクトル空間 V 上への**表現**とは, $\mathfrak{g}$ から V 上の線形写像全体 $\mathcal{L}(V)$ への実線形写像 Φ であって, 括弧積を保存する, すなわち,

$$\Phi\big([X,Y]\big) = [\Phi(X), \Phi(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすもののことである (**9.1** 節参照). ここでは, 特に断わらなければ, V は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のものをとる. V として数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ をとり, V 上の線形写像を標準基底に関する行列で表示すると, $\Phi(X)$ は $n \times n$ 型行列で表される. この場合には, Φ を n 次の**行列表現**という.

リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の2次元の行列表現として, 自然なものとして, $\Phi_0(X) = X$ ($X \in \mathfrak{g}$) が存在する. これを $\mathfrak{g}$ の**自然表現**とよぶ. パウリ行列が2成分の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ に作用す

るのは，ψ の点 x での値の空間 $\mathbb{C}^2$ に $\mathfrak{su}(2)$ の表現 Φ_0 に従って作用しているのである．パウリ行列自体は，リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ に属していないが，その複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ に入り，表現 Φ_0 は $\mathbb{C}$ 上線形に $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に拡張できる．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は自然に $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に同型であることを注意しておこう．

問題 4.1. V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．
(i) V 上の線形写像全体 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間をなすことを示せ．
(ii) $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ は括弧積 $[X, Y] := XY - YX$ に関して閉じていることを示せ．
(iii) 括弧積は，次のヤコービ (C.G.J. Jacobi) の恒等式を満たすことを示せ：

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(以上によって，$\mathcal{L}(\mathcal{V})$ は体 $\mathbb{K}$ 上のリー環になることが示された．それを $\mathfrak{gl}(V)$ と書く.)

4.2.2 $\mathfrak{su}(2)$ から $SU(2)$ への指数写像

体 $\mathbb{K}$ 上の $n \times n$ 型行列の全体は $\mathbb{K}$ 上 n^2 次元のベクトル空間をなすが，それを $M(n, \mathbb{K})$ と書く．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のときに，$X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して，

$$e^X = \exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = E_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots \tag{4.10}$$

によって**指数写像**を定義する．ただし，行列を要素とするこの無限和の収束は，各 (i, j) 要素の収束を意味する．

補題 4.1. (i) e^X を定義する上の無限和は絶対広義一様に収束する．
(ii) $X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ が互いに可換 ($XY = YX$) であれば，$e^{X+Y} = e^X e^Y$.
(iii) $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
(iv) $(e^X)^* = e^{X^*}$, $e^{gXg^{-1}} = g\, e^X g^{-1} \quad (X \in M(n, \mathbb{K}),\ g \in GL(n, \mathbb{K}))$.
(v) $\det(e^X) = \exp(\operatorname{tr} X)$.

証明. (i) ベクトル空間 $M(n, \mathbb{K})$ にノルムを入れて，不等式

$$\|XY\| \le \|X\|\,\|Y\| \quad (X, Y \in M(n, \mathbb{K})) \tag{4.11}$$

を満たすようにすると，右辺の部分和のノルムの評価は $\sum_{k=0}^{\infty} (\|X\|)^k / k! = e^{\|X\|} < \infty$ によって果たされる．これは，数列の絶対収束の話と同様である．このノルムの具体例については，下の問題 4.2 を参照せよ．

(ii) e^X, e^Y を定義するそれぞれの無限和を項別に掛けて X, Y の可換性を使って整理すると，実数 x, y に対して等式 $e^{x+y} = e^x e^y$ を証明するときと形式的には全く同じ冪級数の等式を得る：

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{Y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^q}{q!}.$$

ノルムによる収束の評価は実数の場合と全く同じにできるので，この冪級数の組み替えの演算が正しいことが分かる．

(iii) X と $Y = -X$ とは可換であるから，$e^X e^{-X} = e^{X+(-X)} = e^{0_n} = E_n$ である．ここに，0_n は n 次の零行列を表す．

(iv)，(v) の証明は問題として掲(かか)げて読者に任そう (問題 4.4, 4.5). □

リー環 $\mathfrak{su}(2)$ の元 X に対しては，$u = e^X \in SU(2)$ である．実際，$u^* = e^{X^*} = e^{-X} = u^{-1}$ であるから，$u \in U(2)$．さらに，$\det u = \exp(\operatorname{tr} X) = e^0 = 1$ だから，$u \in SU(2)$．

具体的に計算してみれば，$X = 2\varphi X_1 \in \mathfrak{su}(2) \subset M(2, \mathbb{C})$, $\varphi \in \mathbb{R}$, に対しては，

$$X^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k\varphi^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k\varphi^{2k} \end{pmatrix}, \quad X^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k i\varphi^{2k+1} \\ (-1)^k i\varphi^{2k+1} & 0 \end{pmatrix},$$

であるから，無限和 (4.10) の (1, 1), (1, 2) 要素はそれぞれ次のように収束する：

$$1 + 0 + \frac{(-1)\varphi^2}{2!} + 0 + \frac{(-1)^2\varphi^4}{4!} + 0 + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}}{(2p)!} = \cos\varphi,$$

$$0 + (i\varphi) + 0 + \frac{(-1)i\varphi^3}{3!} + 0 + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p i\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!} = i\sin\varphi.$$

他の (2, 1), (2, 2) 要素についても同様に計算して，次の結果を得る：

$$e^{2\varphi X_1} = \exp(2\varphi X_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ -i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

同じように計算して，X_2, X_3 についても次を得る：

$$e^{2\varphi X_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad e^{2\varphi X_3} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

問題 4.2. $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M(n, \mathbb{K})$ に対して，ノルムを，$\|X\|^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} |x_{ij}|^2$ によって定義する．このノルムに対して，不等式 (4.11) が成立することを示せ．

問題 4.3. 行列の指数写像 $e^{2\varphi X_2}, e^{2\varphi X_3}$ に関する上の結果を証明せよ．

問題 4.4. (i) 補題 4.1(iv) の等式 $\exp(gXg^{-1}) = g\exp(X)\,g^{-1}$ を証明せよ．

(ii) 任意の $u \in U(2)$ に対して，ある $g \in U(2)$ が存在して，$u' = gug^{-1}$ が対角行列になることを示せ．

(iii) 任意の対角行列 $u \in U(2)$ に対して，ある対角行列 X が存在して $u = e^X$ と書けることを示せ．そして，指数写像 exp が，$\mathfrak{su}(2)$ から $SU(2)$ の上への写像であることを示せ．(**注意**：一般に，指数写像の像については，話は簡単ではない.)

問題 4.5. 補題 4.1(v) を次の順序で証明せよ．

(i) 任意の $X \in M(n, \mathbb{C})$ に対して，ある $g \in GL(n, \mathbb{C})$ が存在して，$Y = gXg^{-1}$ が上(うえ)三角行列になる．そして，$\operatorname{tr} Y = \operatorname{tr} X$．

(ii) 上三角行列 $Y \in M(n, \mathbb{C})$ の対角要素を，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする．行列 e^Y は上三角行列であって，その対角要素は，$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ である．そして，$\det e^Y = \exp(\operatorname{tr} Y)$．

(iii) 任意の $X \in M(n, \mathbb{C})$ に対して，$\det e^X = \exp(\operatorname{tr} X)$．

4.2.3 $SU(2)$ から $\mathfrak{su}(2)$ への対数写像

群 $GL(n,\mathbb{K})$ の単位元 $e = E_n$ の近傍の元 g に対して,

$$\log g := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(g-e)^k}{k} \tag{4.12}$$

とおく．右辺の無限和のノルムを計算すると，$\sum_{k=0}^{\infty} \|g-e\|^k$ によって評価される．したがって，右辺の無限和は $\|g-e\| < 1$ において広義一様に絶対収束する．その証明は，複素数 z に対する対数関数 $\log z$ の $z=1$ を中心とする冪級数展開

$$\log z = \log\bigl(1+(z-1)\bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}$$

が $|z-1| < 1$ において広義一様に絶対収束することの証明と同様である．

補題 4.2.
$$(\log g)^* = \log(g^*),$$
$$\log g^{-1} = -\log g \qquad (\|g-e\| < 1,\ \|g^{-1}-e\| < 1),$$
$$\mathrm{tr}(\log g) = \log(\det g) \quad (\|g-e\| < 1).$$

補題 4.3. 写像 exp, log については次の関係式が成り立つ：

$$\exp(\log g) = g \quad (g \in GL(n,\mathbb{K}),\ \|g-e\| < 1); \tag{4.13}$$
$$\log(\exp X) = X \quad (X \in M(n,\mathbb{K}),\ \|X\| < \log 2). \tag{4.14}$$

問題 4.6. 補題 4.2 を証明せよ．〔ヒント： 第 3 式については，問題 4.5 参照.〕

問題 4.7. 補題 4.3 の (4.13) 式および (4.14) 式を証明せよ．

さて，対数写像 log を $SU(2)$ 上で考える．$g \in SU(2), \|g-e\| < 1$, に対して，$X = \log g$ は $\mathfrak{su}(2)$ の元である．実際，$X^* = \log g^* = \log g^{-1} = -X$, $\mathrm{tr}\, X = \log(\det g) = \log 1 = 0$. 群 $SU(2)$ とそのリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の関係を図示すると，

$$SU(2) \ni g \ \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} \ X \in \mathfrak{su}(2) \tag{4.15}$$

4.3 $SU(2)$ から $SO(3)$ への被覆写像と同型 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$

4.3.1 $SU(2)$ から $SO(3)$ への被覆写像

$M(2,\mathbb{C})$ の実部分空間 $\mathcal{Y} := \{\, Y \in M(2,\mathbb{C})\ ;\ Y^* = Y,\ \mathrm{tr}\, Y = 0 \,\}$ の上に群 $SU(2)$ が，次のように作用する： $u \in SU(2)$ に対して，

$$\mathcal{Y} \ni Y \longmapsto D'(u)Y := uYu^* \in \mathcal{Y}.$$

$\mathcal{Y}$ は実3次元であるが，そこに座標をパウリ行列を使った対応

$$\phi : \mathcal{Y} \ni Y = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} x_j \sigma_j \longmapsto x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

によって導入する (**5.4.1** のローレンツ群の被覆写像を参照). ϕ で写すと, $\phi\bigl(D'(u)Y\bigr) = D(u)\phi(Y)$ $= D(u)x$ によって，$\mathbb{R}^3$ 上の線形可逆写像 $D(u)$ が現れる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} \ni Y & \xrightarrow{\ u\ } & D'(u)Y \in \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \mathbb{R}^3 \ni x = \phi(Y) & \xrightarrow[u]{} & D(u)x = \phi(D'(u)Y) \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

ここで，$\det Y = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ であり，$\det(uYu^*) = \det Y$ であるから，$\mathbb{R}^3$ 上の線形変換 $D(u)$ は内積 $\langle x, x \rangle := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ を不変にする．したがって，$D'(u) \in O(3)$ である．他方，$SU(2)$ は連結であるから，D によるその像は $O(3)$ の単位元を含む連結成分 $SO(3)$ に含まれる．さらに，$SU(2)$ の一径数部分群 $e^{\varphi X_j}, j = 1, 2, 3,$ とそれらを D で写したものを，それぞれ上下に並べてみると，

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & -i\sin\varphi/2 \\ -i\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & -\sin\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

となる．下は **3.6** 節 (3.44) の回転 $r_{23}(\varphi), r_{31}(\varphi), r_{12}(\varphi)$, である，すなわち，$x_1$ 軸，x_2 軸，x_3 軸回りの角 φ の2次元的回転を表す．回転群 $SO(3)$ はこれらの一径数部分群によって生成されるので，準同型 D の像は $SO(3)$ 全体である．

また，D の核を求めると，$uYu^* = Y$ $(Y \in \mathcal{Y})$ より，$u^* = u^{-1}$ だから，$uY = Yu$, よって u はスカラー行列となり，$\det u = 1$ であるから，$u = \pm E_2$ となる．かくて，次の定理が示された．

定理 4.4. 上で与えた準同型 D は $SU(2)$ から $SO(3)$ の上への局所同型であり，その核は $\{\pm E_2\}$ である．

ここで，D が**局所同型**であるとは，$SU(2)$ と $SO(3)$ それぞれの単位元の近傍 U_1, U_2 が存在して，D が U_1 から U_2 の上への同相写像であって，かつ，

$$u, u', uu' \in U_1 \implies D(u)D(u') = D(uu')$$

を満たし，D^{-1} もまた同様の条件を満たすことである．局所同型を与える D をリー群 $SO(3)$ に対する**被覆写像**とよぶ．被覆群 $SU(2)$ は多様体としては，対応

$$SU(2) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \longmapsto (a, b) \in S^3 := \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$$

によって 3 次元球面と同相であるから，単連結である．したがって，さらなる $SU(2)$ の被覆群は存在せず，$SU(2)$ は $SO(3)$ の**普遍被覆群**である，と言われる．

注意 4.2. ここでは，遠慮しながらも (リー環という用語に引きずられて)，リー群という用語を使ったが，詳しく取り扱う余裕がないので，定義だけ述べておこう．線形群 $GL(n, \mathbb{K})$ の (通常の位相での) 閉部分群を**線形リー群**とよぶ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)．この章では，分かりやすさを旨(むね)として，一般論を避けて，$SU(2), SO(3)$ に対する個別の具体論を述べているが，一般論を勉強したい人は然るべきテキスト (例えば，[山内]，[佐武]) を参照してください．

問題 4.8. 群 $SU(2)$ の一般の元 $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ に対して，3×3 型行列 $D(u) \in SO(3)$ を，a, b を用いて書き下せ．

問題 4.9. 群 $G = SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の上には，**随伴表現** (adjoint representation) とよばれる G の線形表現が次のように与えられる：$\mathrm{Ad}(u)X := uXu^{-1}$ $(u \in G, X \in \mathfrak{g})$．このとき，$\mathrm{Ad}(u), u = e^{\varphi X_j}, j = 1, 2, 3,$ を $\mathfrak{g}$ の基底 $\{ X_1, X_2, X_3 \}$ に関して行列表示して，上の $D(u)$ と比較せよ．(結果として，随伴表現 Ad も $SU(2) \to SO(3)$ の普遍被覆を与える．)

4.3.2. リー環の同型 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$

$M(n, \mathbb{K})$ は，数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ 上の線形写像全体と同一視されるから，問題 4.1 によって，自然にリー環の構造が入るが，それを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．これは，一般線形群 $GL(n, \mathbb{K})$ のリー環である ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の差異についてはいまは触れない)．

リー群 $SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ は前節で与えたが，$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ の実の部分リー環である．リー群 $SO(3)$ のリー環 $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ は **3.7** 節で導入された．リー群の準同型 D に対応して，D の微分 (differential) ともいうべき，リー環の準同型 dD が自然に導かれる．D が局所同型であるから，dD は環同型となる．実際，まず，dD の定義は，次のように与える．$X \in \mathfrak{su}(2)$ に対して，それの生成する $SU(2)$ の一径数部分群 e^{tX}, $t \in \mathbb{R}$, をとる，そして，

$$(dD)(X) := \frac{d}{dt}\big(D(e^{tX})\big)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \big(D(e^{tX})\big)$$

とおく．ここに，$(d/dt)_0$ は点 $t = 0$ における導関数の値をとる作用素である．$D(e^{tX})$ は $SO(3)$ の一径数部分群であるから，それの生成元として，$Z = (dD)(X)$ が得られる，したがって，$D(e^{tX}) = e^{tZ}$ となっている．そこで，$dD(X)$ に対応する $dD'(X)$ を具体的に計算

してみよう. $(d/dt)_0 e^{tX} = X$ を用いると,

$$\begin{aligned} dD'(X)Y &= (d/dt)_0\big(D'(e^{tX})Y\big) = (d/dt)_0(e^{tX}\,Y\,e^{-tX}) \\ &= (d/dt)_0 e^{tX}\cdot Y + Y\cdot(d/dt)_0 e^{-tX} = XY - YX \quad (Y \in \mathcal{Y}) \end{aligned}$$

となる. これを用いて, $X_1 = is_x, X_2 = is_y, X_3 = is_z \in \mathfrak{su}(2)$ に対して計算すると, dD による像はそれぞれ X_{23}, X_{31}, X_{12} である. その検算として, **4.3.1** で与えた $D(e^{\varphi X_j})$ の具体形を φ で微分してみても同じ結果が得られる. かくて,

$$dD(X_1) = X_{23}\,,\quad dD(X_2) = X_{31}\,,\quad dD(X_3) = X_{12}\,. \tag{4.16}$$

4.4 パウリ方程式に対する $SU(2)$ 共変性

先の **4.1** 節におけるパウリの波動関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = {}^t(\psi_+(\boldsymbol{x}), \psi_-(\boldsymbol{x}))$ の値(あたい)の空間 $V = \mathbb{C}^2$ には, 実リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ が働いている. その作用の仕方は, ちょうど $\mathfrak{g}$ の自然表現である. このパウリのアイディアの革命性は,「電子はただ単に 3 次元ユークリッド空間に住んでいるのではなくて, さらにそれを超えたある場(ば)の空間に住んでいる」としたところである. これは, 場の理論に慣れた現代の方々には, むしろ当然のことと捉えられているだろうが.

パウリの考えを敷衍(ふえん)すれば, V にはリー群 $G = SU(2)$ がその自然表現 $\varpi(u) = u : v \mapsto uv$ $(v \in V, u \in G)$ を通じて働いていて, その微分形 (無限小形) が, このリー環 $\mathfrak{g}$ の作用である, と考えるのがよい. ここでは, 座標を表す記号として, $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ の代わりに, $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ を用いる.

値の空間 $V = V(\varpi)$ 上の作用の他に, 土台の空間 $E^3 \cong \mathbb{R}^3$ には回転群 $SO(3)$ が働いている. この作用の根源は $SU(2)$ であって, $u \in SU(2)$ が土台に働くときは, 被覆写像 $D : SU(2) \to SO(3)$ を通じて働く, と考えるのが正当である. そして, 2 つの作用は, 1 つにまとまったものだと捉えるのがよい. したがって, パウリの波動関数 $\boldsymbol{\psi}(x) = {}^t(\boldsymbol{\psi}_+(x), \boldsymbol{\psi}_-(x))$ への $SU(2)$ の作用は,

$$\big(T_\varpi(u)\boldsymbol{\psi}\big)(x) := \varpi(u)\big(\boldsymbol{\psi}(D(u)^{-1}x)\big) \quad (x \in \mathbb{R}^3) \tag{4.17}$$

である. これは, **2.1** 節 (2.3) の変換公式の一例である.

$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3; dx)$, $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, の上の $SO(3)$ の表現 $R(g)f(x) = f(g^{-1}x)$ $(g \in SO(3), f \in \mathcal{H}, x \in \mathbb{R}^3)$ は, 被覆写像 $D : SU(2) \to SO(3)$ を通して, $SU(2)$ の表現になる. これを R^D と書く.

注意 4.3. のちに **4.11** 節で, 2 つの表現のテンソル積を定義する (定義 4.2) が, それを先走って利用して説明すると, 上の表現 T_ϖ は, 表現空間 $V(\varpi) \otimes \mathcal{H} \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ の上に実現したテンソル積表

現 $\varpi \otimes R^D$ に他ならない．また，これにより，**4.11** 節 (4.35) のクレブシュ‐ゴルダンの係数 $C^{(m)}$ との密接な関連が生ずる．

時間を含まぬパウリ方程式 (4.4) において，ハミルトニアン $\widetilde{H}$ は回転不変であるから，後から加わった H_1, H_2 が回転で不変であれば，この方程式は $SU(2)$ で不変である．別の言葉で言えば，パウリ方程式で書かれる物理現象は，$SU(2)$ による対称性をもつ．

実際，$L := \widetilde{H} + H_1 + H_2$ とおくと，方程式は，

$$\widetilde{L}\psi \ = \ E\psi\,; \quad \widetilde{L} := \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \ \psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \in W := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\,. \tag{4.18}$$

よって，パウリ方程式は $SU(2)$ の下(もと)で共変 (不変ともいう) である，すなわち，$\widetilde{L} \cdot T_\varpi(u) = T_\varpi(u) \cdot \widetilde{L}$ ($u \in SU(2)$) となる．この共変性から，固有値 E の固有空間 $W(E) \subset W$ は作用素 $T_\varpi(u)$ で不変となる．なぜならば，$f \in W(E)$ に対して，$f' = T_\varpi(u)f$ とおけば，

$$\widetilde{L}f' = \widetilde{L}T_\varpi(u)f = T_\varpi(u)\widetilde{L}f = ET_\varpi(u)f = Ef'$$

であるから，$f' = T_\varpi(u)f \in W(E)$ となる．したがって，固有空間 $W(E)$ 上に群 $SU(2)$ の表現が導かれる．

これから分かるように，表現 T_ϖ の既約分解は，第 3 章におけると同様に，作用素 $\widetilde{L}$ の固有値問題と本質的に関連している．

4.5 群 $SU(2)$ の表現 T_ϖ とリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の表現

4.5.1 群 $SU(2)$ の表現 T_ϖ に随伴するリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の表現

$SU(2)$ の表現 $(T_\varpi, W), W = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, の既約分解を考えよう．$W$ は $\mathbb{R}^3$ 上の $V(\varpi) = \mathbb{C}^2$ の値をとる L_2 関数の空間である．既約分解のための道具としては，まず，表現作用素 $T_\varpi(u), u \in G = SU(2)$, と可換な線形作用素，すなわち，表現 T_ϖ の自分自身との間の相関作用素，を探すのが第一歩である．微分作用素でも積分作用素でも何でもよいが，もしそうした作用素 S が見つかれば，その S の固有空間分解をとる．すると各固有空間は T_ϖ の下で不変であるから，それを調べて，さらに分解できれば分解する．

作用素 S としてまず考えつくのは，$\mathcal{H}$ 上のラプラシアン Δ の直和 $\widetilde{\Delta} = \Delta \oplus \Delta$ である．その固有空間分解を考えると，第 1 成分，第 2 成分の $\mathcal{H}$ の上で定理 3.5 と同様の結果が得られる．$\widetilde{\Delta}$ の球面方向の成分 $\widetilde{\Delta_S} = \Delta_S \oplus \Delta_S$ の固有値 $\nu_\ell = -\ell(\ell+1)$ の固有空間は，次元が 2 倍の $2 \times (2\ell+1)$ である．群 $SO(3)$ のときと異なって，実は，この空間は，群 $SU(2)$ の下では，($\ell \geq 1$ のとき) 次元が $2\ell+2, 2\ell$ の 2 つの既約空間の直和に分かれる．これらは，最高ウェイトがそれぞれ半整数 $\ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}$ である ($\ell = 0$ の場合は最高ウェイト $\frac{1}{2}$ のみ)．こうしたより詳しい結果を証明するには，$S_1 = \widetilde{\Delta_S}$ だけでは十分でない．

そこで，S として微分作用素になっているもの S_2 を探す (S_1 も微分作用素である)．このときには，G の表現 T_ϖ を微分して無限小形に移る．これは G のリー環 $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の表現になる．ただし，W のように無限次元の空間上の表現からその無限小形に移るときには，$X \in \mathfrak{g}$ として，$T_\varpi(e^{tX})w$ が $t = 0$ で微分可能になるような $w \in W$ だけを拾ってくるべきだから，無限小形 dT_ϖ の表現空間は W よりうんと小さい (しかし稠密な) 部分空間にならざるを得ない．ここでは，W の部分空間

$$W^\infty := \{\, \boldsymbol{f} = {}^t(f_1, f_2)\ ;\ f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^3),\ f_j \text{ の各階の導関数が } \mathcal{H} \text{ に入る} \,\}$$

をとる．まずは素直にリー環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して表現 T_ϖ の無限小作用素 $T_\varpi(X) := (d/dt)_0 T_\varpi(e^{tX})$ を求める (記号の簡略化のために，dT_ϖ を T_ϖ と書く)．$\boldsymbol{f} \in W^\infty$ の微分可能性を使って，ヒルベルト空間 W での弱収束の意味で，

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)_0 \big(T_\varpi(e^{tX})\boldsymbol{f}\big)(x) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \left\{ e^{tX}\big(\boldsymbol{f}(D(e^{-tX})x)\big)\right\} \\ &= X\big(\boldsymbol{f}(x)\big) + \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \boldsymbol{f}(D(e^{-tX})x)\end{aligned}$$

である．前節における $D(e^{\varphi X_j}), j = 1, 2, 3,$ の計算を利用して，これを $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の基底 X_j に対して計算する．たとえば，$X = X_1$ に対しての上式第2項は，

$$(d/dt)_0\, \boldsymbol{f}(x_1,\ \cos t\, x_2 + \sin t\, x_3,\ -\sin t\, x_2 + \cos t\, x_3)$$

である．同様な計算をして，$T_\varpi(X_j)$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned}T_\varpi(X_1)\boldsymbol{f}(x) &= X_1\big(\boldsymbol{f}(x)\big) + (x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3})\,\boldsymbol{f}(x), \\ T_\varpi(X_2)\boldsymbol{f}(x) &= X_2\big(\boldsymbol{f}(x)\big) + (x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1})\,\boldsymbol{f}(x), \\ T_\varpi(X_3)\boldsymbol{f}(x) &= X_3\big(\boldsymbol{f}(x)\big) + (x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2})\,\boldsymbol{f}(x),\end{aligned}$$

となる．準同型対応 $dD : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ により，$X_1 \mapsto X_{23}, X_2 \mapsto X_{31}, X_3 \mapsto X_{12}$, であることに注意して，それぞれの第2項に注目すれば，これは，**3.7** 節の $\mathfrak{so}(3)$ の表現 $R(X_{23}), R(X_{31}), R(X_{12})$, に等しい (公式 (3.56) 参照)．そこで，空間 $\mathcal{H}$ に働く $R(X_{ij})$ の直和を $R(X_{ij})^\sim = R(X_{ij}) \oplus R(X_{ij})$ と書くと，$T_\varpi(X_1) = X_1 + R(X_{23})^\sim$ と書ける．これは，作用素を要素とする 2×2 型行列である ((4.18) を参照)．すなわち，I を $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上の恒等作用素とすると，$T_\varpi(X_1), T_\varpi(X_2), T_\varpi(X_3)$ はこの順番に次のように書ける：

$$\begin{pmatrix} R(X_{23}) & -\frac{i}{2}I \\ -\frac{i}{2}I & R(X_{23}) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} R(X_{31}) & -\frac{1}{2}I \\ \frac{1}{2}I & R(X_{31}) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}I + R(X_{12}) & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}I + R(X_{12}) \end{pmatrix}.$$

求める線形作用素 S を作るには，無限小作用素 $T_\varpi(X_j), j = 1, 2, 3,$ の多項式として作る手順が，以下のように一般論として用意されている．

4.5.2 リー環 $\mathfrak{g}$ の表現と普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の表現

そのアイディアを説明しよう．$T_\varpi(X), X \in \mathfrak{g}$, は 1 階の線形微分作用素であり，したがって，その 2 個の積 $T_\varpi(X)T_\varpi(X')$ は 2 階の微分作用素，3 個の積は 3 階のもの，$\cdots$ である．それに対応して，$\mathfrak{g}$ の非可換の積とその $\mathbb{C}$ 上の 1 次結合を考える．それは，複素化 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の n 次のテンソル積 $\bigotimes^n \mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_\mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}_\mathbb{C} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (n 回) の直和として得られるテンソル代数

$$\bigotimes \mathfrak{g}_\mathbb{C} := \sum_{n=0}^\infty \bigotimes^n \mathfrak{g}_\mathbb{C}, \qquad \bigotimes^0 \mathfrak{g}_\mathbb{C} := \mathbb{C}$$

となる．さらに，$T_\varpi(X)$ はリー環 $\mathfrak{g}$ の表現なので，

$$T_\varpi(X)\,T_\varpi(X') - T_\varpi(X')\,T_\varpi(X) \;=\; T_\varpi([X,X']) \quad (X, X' \in \mathfrak{g})$$

であるから，それに対応して $\bigotimes \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に，同値関係 $X \otimes X' - X' \otimes X \approx [X, X']$ $(X, X' \in \mathfrak{g})$ を導入した代数を考えるのがよい．それが，次のものである．

定義 4.1. リー環 (リー代数) $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の**普遍展開環** (または**普遍包絡代数**) とは，テンソル代数 $\bigotimes \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を，$X \otimes X' - X' \otimes X - [X, X']$ $(X, X' \in \mathfrak{g})$ が生成する両側イデアルで割った結合的代数 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ のことである．ここでの積 ($X \otimes X'$ の像) は単に XX' と書かれる．

すなわち，$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ は，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の非可換積の 1 次結合に括弧積の関係を入れたもの，である．そして，リー環 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の $\mathbb{C}$ 上の線形表現と，その普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の表現とは，1 対 1 に対応する．

我々のもとの問題にもどって，X に対応する微分作用素 $T_\varpi(X)$ から，普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の各元 a に対して $T_\varpi(a)$ が定義できる．ここでは，$a = (X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2$ に対して，$T_\varpi(a) = \sum_{j=1}^3 T_\varpi(X_j)^2$ を求めてみよう．

注意 4.4. ここでの積 $(X_1)^2 = X_1X_1$ は $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の中での積なので，2×2 型行列の積とは違う．むしろ，微分作用素 $T_\varpi(X_1)$ での積 $T_\varpi(X_1)^2$ と対応させて考えるのがよい．一般に，$z = XX' \cdots X'' \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ には $T_\varpi(z) := T_\varpi(X)T_\varpi(X') \cdots T_\varpi(X'')$ が対応する．したがって，$b \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ と $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ をとると，$T_\varpi(X)T_\varpi(b), T_\varpi(b)T_\varpi(X)$ それぞれには，$Xb, bX \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ が対応するので，b が $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の中心の元であれば，$Xb = bX$，ゆえに，$S = T_\varpi(b)$ が各 $T_\varpi(X)$ と可換となり，相関作用素を与える．

リー環の普遍展開環の中心についてはいろいろ詳しい研究がある．とくに，半単純リー環に対しては，**カシミール元**とよばれる 2 次の中心元の作り方が分かっている．上の $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の場合には，カシミール元は $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\{(X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2\}$ である．

4.5.3 相関作用素 $S = T_\varpi(a)$, $a = (X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2$

この相関作用素を使いやすい形で求めるには，出てくる微分作用素を極座標を用いて表すのがよい．

定理 4.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の基底 X_1, X_2, X_3 は同型 $dD : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ によってそれぞれ X_{23}, X_{31}, X_{12} に写るが，後者の $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上の作用 $R(X_{ij})$ は，$x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ の極座標を (r, θ, φ) とするとき，次のように与えられる：

$$\begin{aligned} R(X_{12}) &= -\partial_\varphi , \\ R(X_{23}) &= \sin\varphi\,\partial_\theta + \cot\theta\,\cos\varphi\,\partial_\varphi , \\ R(X_{31}) &= -\cos\varphi\,\partial_\theta + \cot\theta\,\sin\varphi\,\partial_\varphi . \end{aligned} \tag{4.19}$$

証明. $R(X_{23})$ の公式を示そう．極座標で書けば，$x = {}^t(x_1, x_2, x_3) = {}^t(r\sin\theta\,\cos\varphi, r\sin\theta\,\sin\varphi, r\cos\theta)$ であり，

$$r_{23}(t)^{-1}x = x', \quad x' = {}^t(r\sin\theta'\,\cos\varphi', r\sin\theta'\,\sin\varphi', r\cos\theta'),$$

と書ける．$t = 0$ における微係数 $A_0 = (d\theta'/dt)_0, B_0 = (d\varphi'/dt)_0$ が分かればよい．上式の両辺を $t = 0$ で微分してみると次式を得る：

$$-X_{23}\begin{pmatrix} r\sin\theta\,\cos\varphi \\ r\sin\theta\,\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\varphi\,A_0 - \sin\theta\,\sin\varphi\,B_0 \\ \cos\theta\,\sin\varphi\,A_0 + \sin\theta\,\cos\varphi\,B_0 \\ -\sin\theta\,A_0 \end{pmatrix},$$

ここで，**3.7** での X_{23} の具体形を代入して計算すると，$A_0 = \sin\varphi$，$B_0 = \cot\theta\,\cos\varphi$，を得る．すると，$R(X_{23})f(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 f(r_{23}(t)^{-1}x)$ から，$R(X_{23}) = A_0\,\partial_\theta + B_0\,\partial_\varphi$ として，上の公式が得られる． □

系 4.6. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, の元として，$b = dD(a) = {X_{23}}^2 + {X_{31}}^2 + {X_{12}}^2$ とおく．また，**3.7** 節のように，$Y_+ = -X_{31} + iX_{23}, Y_- = X_{31} + iX_{23}, H = iX_{12} \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$, とおく．これらの元を表現 R で写すと，

$$\begin{aligned} R(b) &= R(X_{23})^2 + R(X_{23})^2 + R(X_{23})^2 \\ &= {\partial_\theta}^2 + \cot\theta\,\partial_\theta + (1/\sin^2\theta){\partial_\varphi}^2 = \Delta_S, \\ R(Y_+) &= e^{i\varphi}\bigl(\partial_\theta - \cot\theta\,i^{-1}\partial_\varphi\bigr), \quad R(H) = i^{-1}\partial_\varphi , \\ R(Y_-) &= e^{-i\varphi}\bigl(-\partial_\theta - \cot\theta\,i^{-1}\partial_\varphi\bigr). \end{aligned}$$

さてそこで，$S_0 = T_\varpi(a) = T_\varpi(X_1)^2 + T_\varpi(X_2)^2 + T_\varpi(X_3)^2$ を計算しよう．それには，**4.5.1** の作用素を要素とする 2×2 型行列を使えばよい．まず上の $R(b)$ の計算と，

$${X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2 = -\tfrac{3}{4}E_2 \ \ (2 \times 2 \text{ 型行列の計算})$$

とから，$(-\frac{3}{4}I+\Delta_S)^{\sim}$ (対角型) を得る．次に残りを計算すると，行列要素として，$R(Y_\pm), R(H)$ が現れて，結局，

$$S_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}I+\Delta_S & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4}I+\Delta_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R(H) & -R(Y_-) \\ -R(Y_+) & R(H) \end{pmatrix}$$

となる．右辺第 1 項から $S_1 = \widetilde{\Delta_S} = \Delta_S \oplus \Delta_S$ をとり，第 2 項を S_2 とおく：

$$S_2 = \begin{pmatrix} -R(H) & -R(Y_-) \\ -R(Y_+) & R(H) \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

2 個の相関作用素 S_1, S_2 を用いて $\mathfrak{su}(2)$ の表現 T_ϖ の既約分解ができる．それにはまず，極座標表示によって動径方向を分離した後，$\widetilde{\mathcal{H}_S} := \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$ 上の表現を考える．そこで，S_1, S_2 のそれぞれの固有値 λ_1, λ_2 の同時固有空間を $V(S_1, \lambda_1; S_2, \lambda_2)$ とすると，次節で示すように，これらが既約表現を与える．したがって，S_1, S_2 の同時固有空間分解が既約分解を与えるわけである．

問題 4.10. (i) 定理 4.5 の公式 (4.19) を詳しく証明せよ．
(ii) 上の S_0 の行列表示を証明せよ．

4.6 群 $SU(2)$ の表現 $(T_\varpi, \mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ の既約分解

4.6.1 $\mathfrak{su}(2)$ の表現作用素 $T_\varpi(H), T_\varpi(Y_+), T_\varpi(Y_-)$

前章 **3.7** 節において，最高ウェイト ℓ の既約表現 π_ℓ の標準形を与えた．π_ℓ は $SO(3)$ の $\mathcal{H}_S$ 上の表現 R を固有空間 $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ に制限して得られる．それを対応する $\mathfrak{so}(3)$ の表現として書くと，標準基底 $e_m, -\ell \le m \le \ell$, に関して，

$$\pi_\ell(H)e_m = me_m\,,\quad \pi_\ell(Y_+)e_m = d^\ell_{m+1}e_{m+1}\,,\quad \pi_\ell(Y_-)e_m = d^\ell_m e_{m-1}\,, \tag{4.21}$$

ここに，$d^\ell_m = d_m = \sqrt{(\ell+1-m)(\ell+m)}$.

これと同様に，T_ϖ を同時固有空間 $V(S_1, \lambda_1; S_2, \lambda_2)$ に制限したときに表現作用素 $T_\varpi(H)$, $T_\varpi(Y_\pm)$ が標準形になるように，基底をとりたい．そのための準備として，これらを 2×2 型行列として書くと，作用素 $T_\varpi(H), T_\varpi(Y_+), T_\varpi(Y_-)$ はこの順番で以下のように書ける：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I+R(H) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I+R(H) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} R(Y_+) & I \\ 0 & R(Y_+) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} R(Y_-) & 0 \\ I & R(Y_-) \end{pmatrix}.$$

4.6.2 同時固有空間 $V(S_1, \nu_\ell; S_2, \lambda)$

変数 $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ の極座標 $(r, \omega), \omega \in S^2$, を用いると，群 $SU(2)$ は ω のみに作用する．したがって，リー環 $\mathfrak{su}(2)$ も同様である．測度の分解 $d\mu(x) = dx_1dx_2dx_3 = r^2 dr d\mu_S(\omega)$

に従って，ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(E^3; d\mu)$ のテンソル積分解 $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_{\mathbb{R}_+} = L_2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$, $\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$, があるので，直和空間 $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ にも類似のテンソル積分解

$$\widetilde{\mathcal{H}} \cong (\mathcal{H}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{H}_S) \oplus (\mathcal{H}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{H}_S) \cong \mathcal{H}_{\mathbb{R}_+} \otimes (\mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S)$$

がある．そして $SU(2)$ は $\widetilde{\mathcal{H}_S} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$ にのみ働く．その上の表現を T^S_ϖ と書き，微分作用素 S_0, S_1, S_2 を $\widetilde{\mathcal{H}_S}$ に制限したものも (記号の氾濫(はんらん)を避けるため) 同じ記号で書くことにしよう.

いま我々は，パウリ方程式 (4.4) から出てくる $r > 0$ に関する動径方程式を横に置いておき，その対称性の群 $SU(2)$ にのみ注目するわけである．第3章での結果を踏まえて考えればそれほど難しい作業ではない.

まず，作用素 $S_1 = \widetilde{\Delta_S}$ による $\widetilde{\mathcal{H}_S}$ の固有空間分解を考えると，固有値は $\nu_\ell = -\ell(\ell+1)$, $\ell = 0, 1, 2, \cdots$, であり，その固有空間は, $V(\Delta_S, \nu_\ell)^\sim = V(\Delta_S, \nu_\ell) \oplus V(\Delta_S, \nu_\ell)$ である．S_1 が相関作用素，すなわち，$T^S_\varpi(u), u \in SU(2)$, と可換であるから，各固有空間は不変部分空間である．これを S_2 を用いて ($\ell \geq 1$ のとき) 2つの既約部分空間に分解する.

そのために，第1成分，第2成分の $V(\Delta_S, \nu_\ell)$ それぞれの上の $\mathfrak{so}(3)$ の表現 R を，標準形 (4.21) に書いておく．すると，$V(\Delta_S, \nu_\ell)^\sim$ の基底として,

$$e^{(1)}_m = {}^t(e_m, 0), \quad e^{(2)}_{m'} = {}^t(0, e_{m'}), \quad (-\ell \leq m, m' \leq \ell)$$

がとれる．これらに対する S_2 の作用は，(4.21) により，次のように与えられる：

$$S_2 e^{(1)}_m = \begin{pmatrix} -R(H)e_m \\ -R(Y_+)e_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -me_m \\ -d_{m+1}e_{m+1} \end{pmatrix} = -me^{(1)}_m - d_{m+1}e^{(2)}_{m+1},$$

同様にして，$S_2 e^{(2)}_m = -d_m e^{(1)}_{m-1} - me^{(2)}_m$ を得る．そこで，S_2 の固有値 λ に対する固有ベクトルを $v = \sum_m (a_m e^{(1)}_m + b_m e^{(2)}_m)$ とすると，$S_2 v = \sum_m (a_m S_2 e^{(1)}_m + b_m S_2 e^{(2)}_m)$ に上式を代入して計算すれば，方程式 $S_2 v = \lambda v$ は次のように書かれる：

$$\sum_m \{(-m-\lambda)a_m - d_{m+1}b_{m+1}\} e^{(1)}_m + \sum_m \{-d_m a_{m-1} + (m-\lambda)b_m\} e^{(2)}_m = 0.$$

したがって，これは次の連立方程式になる：

$$\begin{pmatrix} -m-\lambda & -d_{m+1} \\ -d_{m+1} & m+1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (-\ell \leq m \leq \ell).$$

そこで，λ に関する固有方程式は

$$(-m-\lambda)(m+1-\lambda) - d^2_{m+1} = 0 \qquad \therefore \ (\lambda+\ell)(-\lambda+\ell+1) = 0.$$

これから，S_2 の 2 つの固有値 $\lambda=-\ell, \ell+1$ を得る．そこで，S_2 の固有空間 $V(S_1,\nu_\ell;S_2,\lambda)$ を，それぞれの場合に求めよう．

(I) 固有値 $\lambda=-\ell$ の場合

固有ベクトル v の係数 a_m, b_{m+1} の比は，$a_m : b_{m+1} = d_{m+1} : (-m-\lambda) = \sqrt{\ell+m+1} : \sqrt{\ell-m}$ であるから，固有空間 $V(S_1,\nu_\ell;S_2,-\ell)$ は，

$$^{\ell}f^{\ell+1/2}_{m+1/2} := \sqrt{2\ell+1}\left(\sqrt{\ell+m+1}\,e^{(1)}_m + \sqrt{\ell-m}\,e^{(2)}_{m+1}\right)$$

(ただし，$-\ell-1\le m\le\ell$) で張られる．したがって，次元は $2\ell+2=2(\ell+1/2)+1$ である．ここでしばしば必要なので，記号として $\ell^*=\ell+1/2, m^*=m+1/2$ を導入する．すると，$\ell^*=1/2,3/2,\cdots$ (半整数) であり，$^{\ell}f^{\ell+1/2}_{m+1/2} = {}^{\ell}f^{\ell^*}_{m^*}$, 次元 $=2\ell^*+1$, などと書ける．相関作用素 $S_0=T^S_\varpi(a) = -\frac{3}{4}+S_1+S_2$ の固有値は，$-\frac{3}{4}+\nu_\ell+\lambda = -\frac{3}{4}-\ell(\ell+1)-\ell = -\ell^*(\ell^*+1)$ である．

実は，後述するように，この固有空間上に実現されている $SU(2)$ の表現は既約で，最高ウェイト $\ell+1/2=\ell^*$ をもち，$\pi_{\ell+1/2}=\pi_{\ell^*}$ と書かれる．

(II) 固有値 $\lambda=\ell+1$ の場合

固有ベクトル v の係数 a_m, b_{m+1} の比は，$a_m : b_{m+1} = d_{m+1} : (-m-\lambda) = \sqrt{\ell-m} : -\sqrt{\ell+1+m}$ であるから，固有空間 $V(S_1,\nu_\ell;S_2,\ell+1)$ は，$^{\ell}f^{\ell-1/2}_{m+1/2} = {}^{\ell}f^{\ell^*-1}_{m^*}$ $(-\ell\le m\le \ell-1)$, ただし，

$$^{\ell}f^{\ell^*-1}_{m^*} := \sqrt{2\ell+1}\left(\sqrt{\ell-m}\,e^{(1)}_m - \sqrt{\ell+1+m}\,e^{(2)}_{m+1}\right)$$

で張られる ($\ell=0$ のときには固有空間無し)．したがって，次元は $2\ell=2(\ell^*-1)+1$ であり，$-(\ell^*-1)\le m^*\le \ell^*-1$ となる．相関作用素 S_0 の固有値は，$-\frac{3}{4}+\nu_\ell+\lambda = -(\ell^*-1)\ell^* = -(\ell^*-1)[(\ell^*-1)+1]$ である．すぐあとに見るように，ここに実現されている表現は既約で，最高ウェイト $\ell-1/2=\ell^*-1$ をもち，$\pi_{\ell-1/2}=\pi_{\ell^*-1}$ と書かれる．

4.6.3 $SU(2)$, $\mathfrak{su}(2)$ の表現 T_ϖ (T^S_ϖ) の既約分解

固有空間 $V(S_1,\nu_\ell;S_2,\lambda)$ 上の $\mathfrak{su}(2)$ の表現を調べる．上で与えた固有ベクトル $^{\ell}f^{\ell^*}_{m^*}$ に対する作用を計算すればよい．

命題 4.7. (I) 固有空間 $V(S_1,\nu_\ell;S_2,-\ell)$ の基底 $v_{m^*} := {}^{\ell}f^{\ell^*}_{m^*}$ に対して，$d^{\ell^*}_{m^*} = \sqrt{(\ell^*+1-m^*)(\ell^*+m^*)}$ とおくと，

$$\begin{aligned} T^S_\varpi(H)v_{m^*} &= m^*\,v_{m^*}, \\ T^S_\varpi(Y_+)v_{m^*} &= d^{\ell^*}_{m^*+1}v_{m^*+1},\ \ T^S_\varpi(Y_-)v_{m^*} = d^{\ell^*}_{m^*}v_{m^*-1}. \end{aligned}$$

(II)　固有空間 $V(S_1, \nu_\ell; S_2, \ell+1)$ の基底 $v'_{m^*} := {}^\ell f_{m^*}^{\ell^*-1}$ に対して，

$$\begin{aligned} T_\varpi^S(H)v'_{m^*} &= m^* v'_{m^*}, \\ T_\varpi^S(Y_+)v'_{m^*} &= d_{m^*+1}^{\ell^*-1} v'_{m^*+1}, \quad T_\varpi^S(Y_-)v'_{m^*} = d_{m^*}^{\ell^*-1} v'_{m^*-1}. \end{aligned}$$

証明． 4.6.1 の $T_\varpi^S(H)$ などの 2×2 型行列での表示を使う．$T_\varpi^S(H)v'_{m^*}$ では，$(\frac{1}{2} + R(H))e_m^{(1)} = (\frac{1}{2}+m)e_m^{(1)}$, $(-\frac{1}{2}+R(H))e_{m+1}^{(2)} = (-\frac{1}{2}+m+1)e_m^{(2)}$, を使えばよい．また，$T_\varpi^S(Y_+)v'_{m^*}$ は次になる：

$$\sqrt{2\ell+1}\left\{\left(\sqrt{\ell+m+1}\,R(Y_+)e_m^{(1)} + \sqrt{\ell-m}\;e_{m+1}^{(1)}\right) + \sqrt{\ell-m}\,R(Y_+)e_{m+1}^{(2)}\right\}.$$

そして (4.21) により，$R(Y_+)e_m^{(i)} = d_{m+1}^\ell e_{m+1}^{(i)}$ $(i=1,2)$ であるから，あとはこれらを代入して整理すればよい．

その他の公式もすべて計算により証明される．　□

$H = iX_{12}$ の作用に対する固有値を H に関する**ウェイト**というが，(I) の場合のウェイト m^* は，重複度無しで $-\ell^* \le m^* \le \ell^*$ であり，最高ウェイトは ℓ^* である．基底 v_{m^*} に対する具体的な作用の仕方が与えられているが，これは $\mathfrak{so}(3)$ の最高ウェイト ℓ の表現 π_ℓ の公式 (4.21) と形式的には同じ形である (ただ，ℓ, m を ℓ^*, m^* に置き換えればよい)．これが既約であることも同様にして分かる．この最高ウェイト ℓ^* の既約表現を π_{ℓ^*} と書く．

(II) の場合は，最高ウェイト ℓ^*-1 の既約表現 π_{ℓ^*-1} を与える ($\ell \ge 1$ のとき)．

以上によって，表現 T_ϖ^S の既約分解が具体的に実現できた．

定理 4.8. 表現空間 $\widetilde{\mathcal{H}_S} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$, の上の $SU(2)$ (および $\mathfrak{su}(2)$) の表現 T_ϖ^S は，次のように既約分解される：

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{H}_S} &= \bigoplus\nolimits_{\ell\in\{0\}\cup\mathbb{N}} V(\Delta_S, \nu_\ell)^\sim, \\ V(\Delta_S, 0)^\sim &= V(S_1, \nu_\ell; S_2, 0) \qquad (\ell = 0 \text{ のとき}), \\ V(\Delta_S, \nu_\ell)^\sim &= V(S_1, \nu_\ell; S_2, -\ell) \oplus V(S_1, \nu_\ell; S_2, \ell+1) \quad (\ell \ge 1 \text{ のとき}), \\ T_\varpi^S &\cong \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \left\{\bigoplus\nolimits_{\ell^*\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (\pi_{\ell^*} \oplus \pi_{\ell^*-1})\right\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

T_ϖ^S は既約表現 $\pi_\ell, \ell = 1/2, 3/2, \cdots$ (半整数 >0), の重複度 2 の直和に同型である．各 π_ℓ は，$\pi_\ell(-u) = -\pi_\ell(u), u \in SU(2)$, を満たし，回転群 $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm E_2\}$ の表現としては 2 価である．それがパウリのスピンを生ぜしめる．

4.7　リー群の表現と対応するリー環の表現 (線形群の場合)

コンパクト群 $G = SU(2)$ の線形表現 T は，$G \ni g \mapsto T(g)$ の連続性が仮定されている．T が既約であればその表現空間 $V(T)$ の次元は有限次元である．T が有限次元のときは，

$V(T)$ に適当に内積を入れてユニタリ表現にできる．これらのことは G 上の不変積分を用いて，それほど難しくなく証明できるが，紙数の関係から厳密な証明を省かせて頂く．しかし，ここでリー群の表現とそのリー環の表現の対応についてあらためて述べておきたいことがある．

リー群 $G = SU(2)$ の既約表現の分類のために，そのリー環 $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ のそれを分類するのだが，それには次の事実が基礎になっている．まず，位相群 H のなかでの**一径数部分群**とは，加群 $\mathbb{R}$ から H への連続な準同型写像 $\mathbb{R} \ni t \mapsto h(t) \in H$ のことである．したがって，$h(s+t) = h(s)h(t), h(0) = e$ (単位元)，を満たす．

補題 4.9. 一般線形群 $H = GL(n, \mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のなかでの一径数部分群 $h(t)$ をとると，これは t に関して微分可能 (C^∞ 級) であり，$t = 0$ での微係数 $Y = (d/dt)_0 h(t) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ をとると，$h(t) = e^{tY}$ と表される．

証明. t についての連続性から微分可能性が出ることを示そう．$\psi(s) \geq 0$ を s につき C^∞ 級で，$s = 0$ の小さな近傍 U の外では零になる関数とする．$h(s+t) = h(s)h(t)$ の両辺に $\psi(s)$ を乗じて (行列要素ごとに) 積分すると，$\int_U h(s+t)\psi(s)ds = B\,h(t)$, $B = \int_U h(s)\psi(s)ds$, となる．$h(0) = E_n$ なので，近傍 U を十分小さくとれば，行列 B は可逆である．左辺で変数変換をして，

$$h(t) = B^{-1}\left(\int h(s)\psi(s-t)ds\right).$$

右辺の括弧内の行列値関数は，$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ であるから，t につき C^∞ である．

$t = 0$ での微係数 $Y = (t/dt)_0 h(t)$ の (i,j) 要素は，$h(t)$ の (i,j) 要素を微分したものである (要素ごとに微分する)．$h(s+t) = h(s)h(t)$ の両辺を s で微分すると，行列の積として，$(d/ds)h(s+t) = (d/ds)h(s) \cdot h(t)$ を得る．ここで $s = 0$ とおけば，$h(t) = (h_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ の n^2 個の行列要素 $h_{ij}(t)$ に対する 1 階連立線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}h(t) = Y\,h(t), \qquad h(0) = E_n \ \text{(初期条件)},$$

が得られる．この定数係数常微分方程式には「解の一意性」が成立する．解の存在については，$h(t) = e^{tY}$ とおいて，冪級数展開 $e^{tY} = \sum_{k=0}^\infty t^k Y^k/k!$ の右辺を t で項別微分してみれば，Ye^{tY} を得るので，これが解である． □

線形リー群 $G \subset GL(k, \mathbb{K})$ の有限次元表現 T をとる (例えば，$G = SU(2) \subset GL(2, \mathbb{C})$ の場合)．G 内の一径数部分群 $g(t)$ をとると，上の補題により，$g(t) = e^{tX}$ と書ける．$X = (d/dt)_0 g(t)$ の全体が G のリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ をなす．(各 X は G の単位元 e における接ベクトル，と捉えられるので，$\mathfrak{g}$ は，ベクトル空間としては G の e における接平面であると思える.) $G = SU(2)$ の場合，$X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ は実は $\mathfrak{su}(2)$ に属することが分かり，$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{su}(2)$ であった．

さて，$T(g(t))$ は $V(T)$ 上の可逆な線形変換のなす群 $GL(V(T)) \cong GL(n,\mathbb{C}), n = \dim V(T)$, の一径数部分群だから，補題によって，$Y = (d/dt)_0 T(g(t))$ とおくと，$T(g(t)) = e^{tY}$ である．$dT(X) := Y$ として，写像 $dT : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ が与えられる（さきには，dT を簡略化して T とも書いている）．この写像がリー環の表現を与えることを我々は認めてきたが，そのうち，括弧積を括弧積に写すこと，すなわち，$dT([X,X']) = [dT(X), dT(X')]$ は次の定理を用いれば厳密に証明できる（問題 4.11(ii)）．

定理 4.10. 線形リー群 $G \subset GL(k,\mathbb{K})$ の一径数部分群 $g_X(t) = e^{tX}$, $g_{X'}(t) = e^{tX'}$, に対し，その交換子をとると，それはリー環 $\mathfrak{g}$ の括弧積 $[X,X'] = XX' - X'X$ に対応している，すなわち，

$$g_X(t) g_{X'}(t) g_X(t)^{-1} g_{X'}(t)^{-1} = E_n + [X,X']\,t^2 + O(t^3), \tag{4.23}$$

ここで，$O(t^3)$ は各 (i,j) 要素が $O(t^3)$ であるような行列を表す．t を $\sqrt{t}, t \geq 0$, に置き換えて，$t = 0$ で微分すれば，

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 \left(g_X(\sqrt{t}) g_{X'}(\sqrt{t}) g_X(\sqrt{t})^{-1} g_{X'}(\sqrt{t})^{-1}\right) = [X,X']. \tag{4.24}$$

証明の方針. $g_X(t), g_{X'}(t)$ の冪級数展開は（ノルム $\|\cdot\|$ に関して）絶対収束するので，複素数の場合の絶対収束級数2つの積と同様に取り扱ってもよい．(4.23) の左辺は t の冪級数4個の積だが，それをばらして，t の冪級数に組み直す．そして，$\mathrm{mod}\ t^3$ で3次以上の項を消して考えれば，積

$$\left(E_n + tX + \frac{t^2X^2}{2}\right)\left(E_n + tX' + \frac{t^2X'^2}{2}\right)\left(E_n - tX + \frac{t^2X^2}{2}\right)\left(E_n - tX' + \frac{t^2X'^2}{2}\right)$$

について，t の1次の項は，$t(X + X' - X - X') = 0$. t の2次の項は，$t^2(XX' - X'X) = t^2[X,X']$, を得る．

さらに，$dT(\lambda X) = \lambda\, dT(X)$ $(\lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{g})$ はすぐ分かるが，和が和に写ること，すなわち，$dT(X+Y) = dT(X) + dT(Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ を示すには指数写像に関する次の形の命題が必要である．

命題 4.11. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ から $GL(n,\mathbb{R})$ への指数写像 exp において，

$$\lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{X}{m}\ \exp\frac{Y}{m}\right)^m = \exp(X+Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})).$$

ここでは，これ以上深入りするのは避けて，この命題の証明は割愛しよう．興味ある読者は適当な専門書で学習してもらいたい．さて，以上の説明によって，次の結果が成り立つことが納得できるであろう．

定理 4.12. 線形リー群 G の有限次元表現 $(T, V(T))$ をとる．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$T(g(t))$ は $GL(V(T))$ 内の一径数部分群として，t につき微分可能で，

$$dT(X) := \big(d/dt\big)_0 T(g(t)) \tag{4.25}$$

とおくと，dT はリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の $\mathfrak{gl}(V(T))$ への表現である．

問題 4.11. (i) 定理 4.10 の証明を完結せよ．

(ii) 定理 4.10 を用いて，括弧積に関する関係式 $[dT(X), dT(X')] = dT([X, X'])$ を証明せよ．

4.8 $SU(2)$, $SO(3)$ および $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ の既約表現の分類

リー群 $SU(2)$, $SO(3)$ の有限次元表現 T が対応するリー環 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ の表現 dT を導くことを，前節で見た．その逆はどうか？ 実は，リー環の表現は，普遍被覆群である $SU(2)$ の表現を与えるが，$SO(3)$ から見ると 2 価の表現になることもある．これに関する一般的な議論は割愛して，ここでは，リー環 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(3)$ の既約表現を分類しよう．それらの同値類の代表系が，$d\pi_\ell$, $\ell = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$, で与えられることを示そう．

話を代数的に進めよう．いま，(π, V) を $\mathfrak{g}$ の体 $\mathbb{C}$ 上の既約表現だとする．π を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})\ ;\ X + {}^tX = 0\}$ まで $\mathbb{C}$-線形になるように拡張できる．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の基底をなす 3 つ組 (H, Y_+, Y_-) をとる．例えば，$H := iX_{12}$, $Y_+ := -X_{31} + iX_{23}$, $Y_- := X_{31} + iX_{23}$. すると，関係式

$$[H, Y_+] = Y_+, \quad [H, Y_-] = -Y_-, \quad [Y_+, Y_-] = 2H, \tag{4.26}$$

の π による表現として，次を得る：

$$[\pi(H), \pi(Y_+)] = \pi(Y_+),\ \ [\pi(H), \pi(Y_-)] = -\pi(Y_-),\ \ [\pi(Y_+), \pi(Y_-)] = 2\pi(H).$$

補題 4.13. (i) V 上の線形変換 $\pi(H)$ には，少なくとも 1 つの固有値がある．

(ii) λ を $\pi(H)$ の固有値とし，v_0 をその固有ベクトルとする．$v_1 := \pi(Y_+)v_0$ とおくと，$v_1 \neq 0$ ならば，それは，$\pi(H)$ の固有値 $\lambda + 1$ の固有ベクトルである．

証明. (i) $n = \dim V$ とすると，$\pi(H)$ の行列表示をとると，$n \times n$ 型複素行列の話になる．$\pi(H)$ を行列と思ったとき，その固有方程式 $\det(\pi(H) - tE_n) = 0$ の根はすべて固有値である．(ここで，ジョルダン標準形を知っていれば十分以上.)

(ii) $\big(\pi(H)\pi(Y_+) - \pi(Y_+)\pi(H)\big) = [\pi(H), \pi(Y_+)] = \pi([H, Y_+]) = \pi(Y_+)$, だから，$\pi(H)\pi(Y_+) = \pi(Y_+)\big(\pi(H) + I\big)$. ゆえに，

$$\pi(H)v_1 = \pi(H)\big(\pi(Y_+)v_0\big) = \pi(Y_+)\big(\pi(H) + I\big)v_0 = (\lambda + 1)v_1. \qquad \square$$

さて，$\pi(H)$ の固有値のひとつを λ，その固有ベクトルのひとつを v_0 とする．$\pi(Y_+)v_0$, $\pi(Y_+)^2 v_0, \cdots$，の列では固有値が全部違うので，$\neq 0$ となるものはすべて 1 次独立である．したがって，いつかは 0 になる．そのうちで，最後の 0 でない元を w_0 とし，その固有値を Λ とすると，

$$\pi(Y_+)w_0 = 0, \quad \pi(H)w_0 = \Lambda w_0.$$

そこで，$w_k = \pi(Y_-)^k w_0$, $k = 1, 2, \ldots$，とおく．このうち最後の 0 でない元を w_L とする．上の議論で，Y_+ を Y_- に置き換えれば分かるように，

$$\pi(H)w_k = (\Lambda - k)w_k \quad (0 \leq k \leq L), \quad \pi(Y_-)w_L = 0.$$

そこで，$w_0, w_1, \ldots, w_L$ で張られた V の部分空間を V' とする．V' は明らかに，Y_-, H では不変である．そこで，Y_+ でも不変であることを示すと，$V = V'$ が分かる．$\pi(Y_+)w_k = \pi(Y_+)\pi(Y_-)^k w_0$ であるから，次の補題を使う．

補題 4.14. $\pi(Y_+)\pi(Y_-)^k = \pi(Y_-)^k\pi(Y_+) + \pi(Y_-)^{k-1}\big(2k\pi(H) - k(k-1)\big)$.

この補題の証明には k に関する数学的帰納法を用いるとよい．

さて，上式の右辺を代入すると，$\pi(Y_+)w_0 = 0$ であるから，

$$\pi(Y_+)w_k = \pi(Y_+)\pi(Y_-)^k w_0 = 2k\left(\Lambda - \frac{k-1}{2}\right) w_{k-1} \quad (0 \leq k \leq L).$$

そこで，(4.26) の関係式を調べると，$[\pi(Y_+), \pi(Y_-)] = 2\pi(H)$ だけがまだ使わないで残っている．各 w_k にこの両辺を作用して調べると，$0 \leq k < L$ では OK である．$k = L$ では，$\pi(Y_-)w_L = 0$ を使うと，左辺では

$$[\pi(Y_+), \pi(Y_-)]w_L = -\pi(Y_-)\pi(Y_+)w_L = -\big(2L\Lambda - L(L-1)\big)w_L,$$

したがって，

$$-\big(2L\Lambda - L(L-1)\big) = 2(\Lambda - L) \qquad \therefore\ \Lambda = L/2.$$

ここで，$\ell = L/2$ とおくと，これは非負整数または正の半整数であり，$\pi(H)$ の固有値をウェイトというが，それは重複度なし (すなわち，重複度 1) で $\ell, \ell-1, \ldots, -(\ell-1), -\ell$，の $2\ell+1$ 個であり，ℓ が最高ウェイトである．ウェイトに従って基底ベクトルの名前を付け替えて，$e'_m = w_{\ell-m}$ $(-\ell \leq m \leq \ell)$ とおくと，作用が見やすくなる．かくて次の定理に至る．

定理 4.15. 3 次元のリー環 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ の $\mathbb{C}$ 上の有限次元既約表現は，最高ウェイト $\ell \in \{0\} \cup \frac{1}{2}\mathbb{N} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots, \}$ で決まり，その次元は $2\ell+1$ である．それを Π_ℓ と書く．$\mathfrak{su}(2)$ の複素化の中に (4.26) を満たす 3 つ組 (H, Y_+, Y_-) をひとつとると，表現空間の適当な基底ベクトル e'_m $(-\ell \leq m \leq \ell)$ に関して，Π_ℓ による作用が次の形に書ける：

$$\begin{aligned} \Pi_\ell(H)e'_m &= me'_m, \\ \Pi_\ell(Y_+)e'_m &= (\ell-m)(\ell+m+1)e'_{m+1}, \quad \Pi_\ell(Y_-)e'_m = e'_{m-1}. \end{aligned}$$

注意 4.5. (4.26) を満たす3つ組 (H, Y_+, Y_-) に対して，$(Y_+, 2H, Y_-)$ は第 II 部 **7.2.2** における $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の標準トリプルである．**9.2**〜**9.4** では，標準トリプルを使って，リー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の無限次元表現が論じられている．

3.7 節の命題 3.11 には ℓ が整数の場合が公式 (3.59) と共に現れており，**4.6** 節の定理 4.8 には ℓ が半整数の場合が現れている．そこでの $Y_\pm$ の作用の公式に使われている係数 $d^\ell_m = \sqrt{(\ell+1-m)(\ell+1)}$ を使うと，$\Pi_\ell(H)e'_m = (d^\ell_{m+1})^2 e'_{m+1}$ である．したがって，定数 $c'_m > 0$ を適当に選んで新しい基底を $e_m := c'_m e'_m$ $(-\ell \le m \le \ell)$ として与えて，これに関する $Y_\pm$ の作用が，**3.7** や **4.6** と同じ形にすることができる．この形は，$\{e_m\}$ を正規直交基底にするような内積を V に入れたとき，$X \in \mathfrak{su}(2)$ に対する作用素 $\Pi_\ell(X)$ が反エルミート型になるようなものである．そして，対応する群の表現があったときそれがユニタリになる (命題 3.11 の直前の議論を参照せよ)．

上の定理は，純代数的な既約表現の分類であったが，そこで得られたリー環 $\mathfrak{su}(2)$ のすべての表現には，リー群 $SU(2)$ の既約表現が対応している．実際，ℓ が整数のときは，**3.7** で表現 R の既約成分として得られ，ℓ が半整数のときは，**4.6** で表現 T^S_ϖ の既約成分として (重複度 2 で) 得られている．群 $SO(3)$ から見ると，後者は2価の表現である．

定理 4.16 (既約表現の分類)．群 $SU(2)$ の既約表現はユニタリ表現に同値であり，それは最高ウェイト $\ell \in \{0\} \cup \frac{1}{2}\mathbb{N}$ で決まり，次元は $2\ell+1$ である．それを π_ℓ と書く．表現空間に適当に正規直交基底 $\{e_m\,;\, m \in M_\ell\}$, $M_\ell := \{m\,;\, -\ell \le m \le \ell\}$, をとると，対応するリー環 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ の表現 (やはり π_ℓ と書く) は次の標準形になる：$H = iX_{12}, Y_+ = -X_{31} + iX_{23}, Y_- = X_{31} + iX_{23}$, $d^\ell_m = \sqrt{(\ell+1-m)(\ell+1)}$, とおくと，

$$\pi_\ell(H)e_m = me_m\,,\ \ \pi_\ell(Y_+)e_m = d^\ell_{m+1}e_{m+1}\,,\ \ \pi_\ell(Y_-)e_m = d^\ell_m e_{m-1}. \tag{4.27}$$

◆閑話休題 7 ◆

補題 4.13, 4.14 およびそのための計算においては，V の元 w に $Z \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を作用するときに，$Z = Y_1Y_2\cdots Y_m$ ならば，$\pi(Z) := \pi(Y_1)\pi(Y_2)\cdots\pi(Y_m)$ とおいて，$\pi(Z)w$ を与える．このようなときに，頻繁に現れる記号 π を省略して，その代わりに単に $Zw = Y_1Y_2\cdots Y_m w$ と書くことができる．これは，「$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ が π を通じて V に作用する」というときの π を V の属性と捉えて，V の係数が $\mathbb{C}$ から $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ まで拡張されている，と考える立場であり，このとき (V,π) を $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$**-モジュール** (module) とよぶ．$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ が係数体 $\mathbb{C}$ の如く左から V の元 w に掛かるわけである．それは，非可換な，結合律を満たす $\mathbb{C}$ 上の代数 (associative algebra) を係数にもつ，という概念である．

この概念は，今日(こんにち)の数学科の授業で教えられており，何の抵抗もなく受け入れられるであろうが，私 (平井) が研究の現場でこのやり方に出会ったときには衝撃的な (むしろ革命的な) ものであった．一般ローレンツ群の表現論を研究していた三十数年前の若き学徒にとっては，ゲルファントたちのソ連学派の論文を読んでようやく研究の端緒についていたが，そこでは，つねに表現は $T(g), T(Z)$ などと書かれており，T が省かれることはなかった．リー環の表現を取り扱うとき，T や π を省略する，もしくは最初から T や π がない，という立場は微分幾何学を専攻する人たちにとってはむしろ自然であったろう．私よりも一世代若い日本の研究者たちが，表現論の研究に参入してきたときに，

彼らは微分幾何学・代数学の素養をしっかり積んでいたので，T や π なしで計算して，新しい結果をいろいろ出した．

私の方はむしろ解析学の積もりで表現論をやっていたが,「表現論」は数学界の新参者で，難しいことを言っているわりには，講演などで例として持ち出してくるのはいつも $SL(2,\mathbb{R})$ や $SL(2,\mathbb{C})$ であって，鵺(ぬえ)のように分かりにくく，解析でも幾何でも代数でもない，というふうに思われていた．現在ではその特徴を生かして，融通無碍(ゆうずうむげ)に数理物理学を含むいろんなところに入り込んで貢献している．

4.9 既約表現の行列要素と特殊関数

本章では，パウリの貢献から出発しながら，その後は，回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群 $SU(2)$ を具体的な題材にして，リー群 G とそのリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ との対応，そしてそれらの表現の間の対応，などを詳しく見てきた．これは一般論を述べるよりも，体感的，体験的に表現論を理解してもらおう，ということであった．しかしやさしく述べるのにかなりのスペースを使ったので，当初予定していた他の興味ある話題には残念ながらゆっくりとどまっている余裕がない．そこで簡単ではあるが，これからの3節で一覧しておこう．

定理 4.16 では，リー環での π_ℓ の作用ははっきりしているが，群の表現の行列要素はどうなるか？ ここでは回転群 $G = SO(3)$ をもとにして，2価の表現まで込めて考える形にする．

既約表現 π_ℓ の基底 $\{\, e_m \,\}$ に関する**行列要素**とは，

$$\pi_\ell(g)e_n = \textstyle\sum_{m\in M_\ell} t^\ell_{mn}(g)e_m \quad (n \in M_\ell;\ g \in G)$$

で定義される G 上の関数 t^ℓ_{mn} である．変換 $\pi_\ell(g)$ は行列 $\big(t^\ell_{mn}(g)\big)_{m,n\in M_\ell}$ で表される．任意の $g \in G$ は一径数部分群の元 $r_{12}(\varphi)$, $r_{23}(\theta)$ の積として，

$$g = r_{12}(\varphi_1)r_{23}(\theta)r_{12}(\varphi_2) \quad (0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi)$$

と表される (命題 3.7)．そこで，まず，$\pi_\ell\big(r_{12}(\varphi)\big)$ を考えてみる．これは行列群の中の一径数部分群で，その無限小生成作用素は，

$$\big(d/d\varphi\big)_0\pi_\ell\big(r_{12}(\varphi)\big) = \pi_\ell(X_{12}) = -i\pi_\ell(H) \qquad \therefore\ \ \pi_\ell(X_{12})e_m = -ime_m,$$

である．これを積分すれば，$\pi_\ell\big(r_{12}(\varphi)\big)e_m = e^{-im\varphi}e_m$ を得る．

他方，$t^\ell_{mn}(r_{23}(\theta))$ については，$\big(d/d\theta\big)_0\pi_\ell\big(r_{23}(\theta)\big) = \pi_\ell(X_{23}) = (2i)^{-1}\pi_\ell(Y_+ + Y_-)$ となって同じようにはいかない．そこで仕方がないので，系 4.6 に現れるような微分作用素を使っていくつかの微分方程式を立てて，それらを解いて次の結果を得る．詳細は割愛する．

定理 4.17. 回転群 $SO(3)$ の既約表現 π_ℓ の標準基底 $\{e_m\}$ に関する行列要素 $t^\ell_{mn}(g)$ は，次の公式で与えられる：

$$t^\ell_{mn}\big(r_{12}(\varphi_1)r_{23}(\theta)r_{12}(\varphi_2)\big) = e^{-im\varphi_1}P^\ell_{mn}(\cos\theta)e^{-in\varphi_2}, \tag{4.28}$$

$$P^\ell_{mn}(x) = A^\ell_{mn}(1-x)^{\frac{-n+m}{2}}(1+x)^{\frac{-n-m}{2}}\frac{d^{\ell-n}}{dx^{\ell-n}}\left[(1-x)^{\ell-m}(1+x)^{\ell+m}\right],$$

$$A^\ell_{mn} = \frac{(-1)^{\ell-m}\,i^{n-m}}{2^\ell(\ell-m)!}\sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell+n)!}{(\ell+m)!(\ell-n)!}}. \tag{4.29}$$

この結果は，想像以上に多くのものを含んでいる．$\pi_\ell(g)^* = \pi_\ell(g)^{-1} = \pi_\ell(g^{-1})$ から，$P^\ell_{mn}(x) = P^\ell_{nm}(x)$ を得る．例として，$\ell = 1$ の場合を示そう．$\pi_1\big(r_{12}(\varphi)\big)$, $\pi_1\big(r_{23}(\theta)\big)$ の標準基底に関する行列表示は，それぞれ次になる：

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos\theta+1) & \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(\cos\theta-1) \\ \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(\cos\theta-1) & \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(\cos\theta+1) \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

ルジャンドル関数の加法定理

$SO(3)$ の 1 価の表現 (ℓ 整数) のときを考えると，第 0 次の行 ($m = 0$ の行) の，$t^\ell_{0n}(g)$, $g = r_{12}(\varphi_1)r_{23}(\theta)r_{12}(\varphi_2)$, は定理 3.5 (i) の球面調和関数 $Y^{-n}_\ell(\theta,\varphi_2) = P^{-n}_\ell(\cos\theta)e^{in\varphi_2}$ の定数倍である ($-\ell \le n \le \ell$)．また，第 (0,0) 要素 $t_{00}(\cdot)$ はルジャンドル多項式 $P_\ell(\cos\theta)$ である．すると，関係式

$$\pi_\ell\big(r_{23}(\theta+\theta')\big) = \pi_\ell\big(r_{23}(\theta)\big)\pi_\ell\big(r_{23}(\theta')\big)$$

を行列要素で書くと，これらの特殊関数に対する加法定理として

$$P^\ell_{mn}\big(\cos(\theta+\theta')\big) = \textstyle\sum_{-\ell\le p\le\ell} P^\ell_{mp}(\cos\theta)P^\ell_{pn}(\cos\theta'). \tag{4.31}$$

を得る．とくに (0, 0) 要素に注目すると，ルジャンドル多項式の加法定理が出る：

$$P_\ell\big(\cos(\theta+\theta')\big) = \textstyle\sum_{-\ell\le p\le\ell} P^\ell_{0p}(\cos\theta)P^\ell_{0p}(\cos\theta'). \tag{4.32}$$

ここでは一例を示しただけだが，こうした結果が得られるのは偶然ではない．群 $SO(3)$ は球面 (もしくはユークリッド空間) の対称性を記述している．その線形表現にも当然その「対称性」が遺伝している．球面調和関数などの特殊関数は，こうした対称性が存在するところでその‘切り口’として現れているので，この群の表現によって支配される．

前章と本章では，ある系や対象の対称性を記述するのに群が現れることを，ハイゼンベルグ方程式，パウリ方程式などを物理的な話を基にして述べた．数学においては，先人が積み重ねてきた各種の特殊関数を，整理しそこに現れる加法定理をはじめとする多くの公式を導

くのに，群の表現論が使われる．適当な群とその線形表現を選んで，そのいろいろの性質から自然に導くように統一的にやろうというものである．さらに新しい特殊関数を発見することもできる．この主題に関する多くの専門書が刊行されている．

ここでは，実数 $\mathbb{R}$ を取り扱っているが，有限体 $\mathbb{F}_q$ や p 進体 $\mathbb{Q}_p$ を変数とする特殊関数を取り扱うときには，特殊関数を定義するためにも，はじめからこうした群の表現論を使ったアプローチが不可欠である．

4.10　表現の指標とその性質，既約指標

群 G の有限次元の線形表現 $T(g)$ があったとき，その**指標**とは，$\chi_T(g) := \mathrm{tr}(T(g))$ で与えられる G 上の関数である．ここに，正方行列 $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{K})$ の**トレース** (trace) とは，その対角線要素の和 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ であり，固有方程式

$$\det(A - tE_n) = \det A + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}\, A)t^{n-1} + (-1)^n t^n$$

の未知数 t の $(n-1)$ 次の項の係数に現れる．$\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}\, A$ $(B \in GL(n, \mathbb{K}))$ であるから，指標 χ_T は内部自己同型の下で**不変**である，すなわち，$\chi_T(hgh^{-1}) = \chi_T(g)$ $(g, h \in G)$. 実際，$\chi_T(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}\big(T(hgh^{-1})\big) = \mathrm{tr}\big(T(h)T(g)T(h)^{-1}\big) = \mathrm{tr}(T(g)) = \chi_T(g)$. 既約表現の指標を**既約指標**とよぶ．

2つの表現 T, T' が同値とすると，$\chi_T = \chi_{T'}$ である．実際，同値を与える可逆変換 U が存在して，$UT(g)U^{-1} = T'(g)$ であるから，そのトレースは等しい．

指標 (Charaktere(独), character(英)) という用語はガウスに始まるというが，その概念を有限群の場合に拡張して研究したのは，フロベニウスである．彼はまず，G 上の不変関数の特別のものとして，**指標**を定義して研究し，その途中で群の**表現** (Darstellung(独), representation(英)) という概念を発明して，上に述べた指標と表現との関係 (もしくは定義) に到達したのである．これは，数学の発展が，論理的な順序とは逆になったひとつの例である．指標の主な性質をまとめておこう．

定理 4.18. (i)　G の線形表現 T の指標 χ_T は，G 上の不変な連続関数であって，$\chi_T(e) = \dim T$ (ここに e は単位元).

(ii)　G を有限群もしくはコンパクト群とする．χ_T は，表現 T の同値類を決定する，すなわち，表現 T, T' に対し，それらが同値である必要十分条件はその指標が一致すること，$\chi_T = \chi_{T'}$，である．

(iii)　G を上の通りとする．G 上の正規化された不変測度を $d\mu_G$ と書く．ヒルベルト空間 $L_2(G; d\mu_G)$ において，既約指標は長さ 1 であり，互いに直交する: $\|\chi_T\| = 1$, $\chi_T \perp \chi_{T'}$ $(T \not\cong T')$. さらに，$f \in L_2(G; d\mu_G)$ で内部自己同型で不変，すなわち，$f(g_0 g g_0{}^{-1}) = f(g)$ (for a.a. g, $\forall g_0 \in G$) となるもの全体のなす部分空間において，既約指標の全体は，正規直交基底をなす．

(iv) T をユニタリ表現とする．このとき χ_T は G 上の正定値連続関数を与える．

注意 4.6. 上の定理に述べた基本結果を証明つきで述べてある本は数多いが，ここでは，翻訳書 [Pont] の第 5 章を挙げておこう．

さらに，(iv) についてコメントする．G 上の関数 $f(g)$ が**正定値**であるとは，任意有限個の $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ と $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} f(g_j^{-1} g_i)\, \lambda_i \overline{\lambda_j} \ \geq\ 0$$

となることである．T をユニタリとすると，$T(g_j^{-1} g_i) = T(g_j)^* T(g_i)$ だから，

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \chi_T(g_j^{-1} g_i)\, \lambda_i \overline{\lambda_j} = \mathrm{tr}(A^* A) \geq 0, \quad \text{ここに，} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(g_i).$$

そこで，群 $SO(3)$ の既約表現 π_ℓ の指標を考えよう．$a = e^{i\varphi}$ とおくと，

$$\chi_{\pi_\ell}\big(r_{12}(\varphi)\big) = a^{\ell} + a^{\ell-1} + \cdots + a^{-\ell+1} + a^{-\ell} = \frac{a^{\ell+1/2} - a^{-\ell-1/2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} \tag{4.33}$$

である．一般元 $g = r_{12}(\varphi_1) r_{23}(\theta) r_{12}(\varphi_2)$ に対しては，前節の記号を使って，$\chi_{\pi_\ell}(g) = \sum_{m \in M_\ell} t^{\ell}_{mm}(g)$ であるが，この和は簡単な形に書けない．そこで我々は，χ_{π_ℓ} の不変性を踏まえて，次のように考えるとよい．任意の元 g はある h と $r_{12}(\varphi)$ によって，$hgh^{-1} = r_{12}(\varphi)$ と表される．このとき，$\chi_{\pi_\ell}(g) = \chi_{\pi_\ell}\big(r_{12}(\varphi)\big)$ である．さらにこのときの，$a = e^{i\varphi}, a^{-1} = e^{-i\varphi}$ (および 1) はもとの g の固有値である．

定理 4.19. 群 $SO(3)$ (または $SU(2)$) の既約表現 π_ℓ の指標は，次のように与えられる．$g \in SO(3)$ (または $SU(2)$) の固有値を，$a = e^{i\varphi}, a^{-1} = e^{-i\varphi}$ とすると，

$$\chi_{\pi_\ell}(g) = \frac{a^{\ell+1/2} - a^{-\ell-1/2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} = \frac{\sin\big((\ell + 1/2)\varphi\big)}{\sin\big((1/2)\varphi\big)}.$$

4.11 テンソル積表現とクレブシュ-ゴルダンの係数

有限次元のベクトル空間 V_1, V_2 の**テンソル積**は，それらの基底を使えば，簡単に述べられる．$V_k, k = 1, 2,$ の基底をそれぞれ $\{ f_i^k \ ;\ 1 \leq i \leq n_k = \dim V_k \}$ とする．記号として $f_i^1 \otimes f_j^2$ $(1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2)$ を作り，これらを基底とするベクトル空間を $V_1 \otimes V_2$ とする．$V_1 \times V_2$ から $V_1 \otimes V_2$ への双 1 次写像 $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ は自然に与えられる．$v_1 \otimes v_2$ の形の元を分解可能な元という．

V_k 上の線形写像 A_k があったとき，$V_1 \otimes V_2$ 上の線形写像 $A_1 \otimes A_2$ を，$(A_1 \otimes A_2)(v_1 \otimes v_2) := (A_1 v_1) \otimes (A_2 v_2)$ によって定義する．

定義 4.2. 群 G の線形表現 $(T_k, V_k), k = 1, 2,$ に対して，**表現のテンソル積** $T_1 \otimes T_2$ は，テンソル積空間 $V_1 \otimes V_2$ 上に働く線形表現として，分解可能な元に対して次のように定義す

れば決まる：

$$(T_1 \otimes T_2)(g)(v_1 \otimes v_2) := (T_1(g)v_1) \otimes (T_2(g)v_2) \quad (g \in G).$$

前節で定義した「表現の指標」がここで役に立つ．まず，

$$\chi_{T_1 \otimes T_2}(g) = \chi_{T_1}(g) \cdot \chi_{T_2}(g) \quad (g \in G). \tag{4.34}$$

そこで，群 $G = SU(2)$ の場合に応用しよう．既約表現 $\pi_{\ell_1}, \pi_{\ell_2}$ のテンソル積の既約分解を求めるのに，指標を用いる．$g \in G$ の行列としての固有値を a, a^{-1} とすると，

$$\begin{aligned} \chi_{\pi_{\ell_1} \otimes \pi_{\ell_2}}(g) &= \chi_{\pi_{\ell_1}}(g) \cdot \pi_{\ell_2}(g) = \sum_{-\ell_1 \le m \le \ell_1} a^m \cdot \frac{a^{\ell_2+1/2} - a^{-\ell_2-1/2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} \\ &= \sum_{|\ell_1-\ell_2| \le \ell \le \ell_1+\ell_2} \frac{a^{\ell+1/2} - a^{-\ell-1/2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} = \sum_{\ell} \chi_{\pi_\ell}(g). \end{aligned}$$

定理 4.18(iii) により，指標 χ_{π_ℓ} は互いに線形独立であるから，上式は，テンソル積表現の既約分解を与えている．

定理 4.20. $SU(2)$ の既約表現のテンソル積 $\pi_{\ell_1} \otimes \pi_{\ell_2}$ は，最高ウェイト $\ell = |\ell_1 - \ell_2|$, $|\ell_1 - \ell_2| + 1, \ldots, \ell_1 + \ell_2 - 1, \ell_1 + \ell_2$, の既約表現 π_ℓ の直和に分解される：

$$\pi_{\ell_1} \otimes \pi_{\ell_2} \cong \bigoplus_{|\ell_1-\ell_2| \le \ell \le \ell_1+\ell_2} \pi_\ell .$$

この既約分解を求める別法としては，テンソル積の空間のなかでの最高ウェイトベクトルを求めるという方法もある．(**注：** 第11章で，ヴェイユ (Weil) 表現を制限したときの既約分解を得るには，最低ウェイトベクトルを求めている.)

上の定理 4.20 は既約分解を与えているが，それぞれの表現空間の標準基底の間の関係を与えているわけではない．

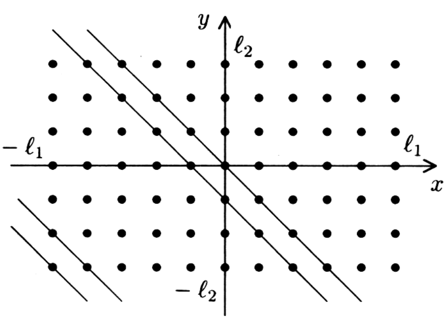


図 4.1. テンソル空間 $V(\pi_{\ell_1}) \otimes V(\pi_{\ell_2})$ のウェイトベクトルの分布

表現 $\pi_{\ell_k}, k = 1, 2,$ の空間 $V(\pi_{\ell_k})$ の標準基底を $e^k_m, -\ell_k \le m \le \ell_k$, とすると，$\mathcal{E}_m := \{ e^1_{m_1} \otimes e^2_{m_2} \,;\, m_1 + m_2 = m \}$ が $V(\pi_{\ell_1}) \otimes V(\pi_{\ell_2})$ のウェイト m のベクトルの空間を張る．

他方，既約成分 π_ℓ の空間の標準基底を $f^\ell_m, -\ell \le m \le \ell$, とすると，ウェイト m の空間は，$\mathcal{F}_m := \{ f^\ell_m \,;\, |\ell_1 - \ell_2| \vee |m| \le \ell \le \ell_1 + \ell_2 \}$ で張られるから，$\mathcal{E}_m$ と $\mathcal{F}_m$ とは，互いに他を1次結合で書くことができる．$\mathcal{F}_m$ の元を $\mathcal{E}_m$ の1次結合で書くときの係数を**クレブシュ-ゴルダンの係数**とよぶ．

簡単な例を与えよう．$\ell_1 = 1/2$ ととると，$\ell = \ell_2 - 1/2, \ell_2 + 1/2,$ となるから，

$$\begin{aligned} f_m^{\ell_2+1/2} &= c_{11}^m e_{1/2}^1 \otimes e_{m-1/2}^2 + c_{21}^m e_{-1/2}^1 \otimes e_{m+1/2}^2, \\ f_m^{\ell_2-1/2} &= c_{12}^m e_{1/2}^1 \otimes e_{m-1/2}^2 + c_{22}^m e_{-1/2}^1 \otimes e_{m+1/2}^2. \end{aligned}$$

この係数の行列 $C^{(m)} := \left(c_{ij}^m\right)_{i,j=1}^2$ は，$c_{11}^{\ell_2+1/2} = c_{22}^{-\ell_2-1/2} = 1$ とおくと決まる．計算すると，次の結果を得る．

命題 4.21 (クレブシュ-ゴルダンの係数)．$SU(2)$ の既約表現 $\pi_{1/2}$ と π_{ℓ_2} とのテンソル積の既約分解に関するクレブシュ-ゴルダンの係数は次式で与えられる：

$$C^{(m)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell_2+m+1/2}{2\ell_2+1}} & -\sqrt{\frac{\ell_2-m+1/2}{2\ell_2+1}} \\ \sqrt{\frac{\ell_2-m+1/2}{2\ell_2+1}} & \sqrt{\frac{\ell_2+m+1/2}{2\ell_2+1}} \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

注意 4.7. 先の注意 4.3 を受けて，上のクレブシュ-ゴルダンの係数 $C^{(m)}$ と，$SU(2)$ の表現 T_ϖ との関連をさらに説明する．**3.4～3.7** では，$SO(3)$ の表現として，$(R, L_2(\mathbb{R}^3; dx))$ を調べて，その本質的部分として，$\mathcal{H}_S$ 上の表現 R'' の既約分解を与えた (定理 3.5)．R, R'' を被覆写像 $D : SU(2) \to SO(3)$ を通して，$SU(2)$ の表現と捉えたものをそれぞれ R^D, R''^D と書く．

他方，**4.4** では $SU(2)$ の表現として，$\varpi \cong \pi_{1/2}$ であり，**4.4～4.6** において取り扱った表現 T_ϖ は，$\pi_{1/2} \otimes R^D$ と同値である．T_ϖ を $\widetilde{\mathcal{H}_S} \cong \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S$ の上で捉えたものは，テンソル積表現 $\pi_{1/2} \otimes R''^D$ を $V(\pi_{1/2}) \otimes \mathcal{H}_S \cong \widetilde{\mathcal{H}_S}$ の上で考えたものである．

定理 3.5 での R'' の既約成分 π_ℓ を $SU(2)$ の表現と考えたとき，$\pi_{1/2} \otimes R''^D$ の部分表現 $\pi_{1/2} \otimes \pi_\ell$ と 1 対 1 に対応する．後者は，$\ell \geq 1$ のとき，さらに 2 つの既約表現 $\pi_{\ell+1/2}, \pi_{\ell-1/2}$ に分解する (定理 4.8 参照)．そのときに，係数 $C^{(m)}$ が現れる．その事情を **4.6.2** における計算が表しているはずである．

クレブシュ(R.F. Clebsch) とゴルダン (P.A. Gordan) は，$\pi_{\ell_1} \otimes \pi_{\ell_2}$ の既約分解に関するこの係数を量子力学系の角運動量の合成に関して利用した．また，素粒子論においては，適当な群 (それは系の対称性の群であろう) の既約表現またはその行列要素によって粒子を代表させ，2 つの既約表現のテンソル積を「それらの粒子の相互作用 (衝突)」と解釈して，テンソル積の既約分解を衝突の際にいろいろの粒子に分裂することを表している，と解釈するやり方もある．群としては，$SO(3), SU(2)$ の他に，$SU(3), SU(4), SU(6)$ などが用いられている．

第5章 有限次元表現から無限次元表現へ

古典力学において物体の運動を記述するのは，ニュートンの運動方程式であり，その方程式を込めてニュートンの運動の3法則が成り立っている座標系を，慣性系という．ひとつの慣性系を他の慣性系に移す変換の全体は，ユークリッド運動群をなし，それは座標系の回転と平行移動とから生成される．「平行移動では，慣性系は慣性系に移る」という原理を，ガリレイの相対性原理とよぶ．

アインシュタインは，光速に近い運動や素粒子の運動を記述するのに，特殊相対性理論をうち立てたが，そのよって立つ「相対性」は，ニュートン力学における空間の「平行移動」を，時間軸を込めた「平行移動」に置き換えたものである．この相対論的平行移動は(純)ローレンツ変換とよばれるものであり，それらは，固有ローレンツ群を生成する．すべての物理現象を記述する方程式は，このローレンツ群の変換に対して共変的でなければならない，とされる．したがって，共変的でない記述は，中間的な段階のものである．

ローレンツ群とそのリー環の構造とを調べたのち，ローレンツ群およびその普遍被覆群である $SL(2,\mathbb{C})$ の表現について述べる．

パウリの方程式はスピンの導入には成功したが，相対論的共変性をもたない．そこで，ディラックはスピンの導入と相対論的共変性の2つの要求を同時に満たす彼の方程式を導入した．この方程式の共変性について調べる．そして，この方程式が必然的にローレンツ群の無限次元ユニタリ表現を要求することを説明する．無限次元ユニタリ表現への導入をもってこの章を締める．

5.1 ニュートンの運動方程式とユークリッド運動群

第3章および第4章では，それぞれ量子力学におけるシュレーディンガー方程式，パウリ方程式の不変性について論じた．ここでは，ひるがえってニュートンの運動方程式の不変性について考えたい．

5.1.1 運動の3法則と慣性系

ニュートン(1642–1727)の偉大なる著作 “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*”『自然哲学の数学的原理』は，1687年に初版，1713年に第2版，1726年(死の前年)に第3版が出ている．それは，Book 1, Book 2, Book 3 からなるが，それら全体の最初に，質量(quantity of matter)や運動量(quantity of motion)，力(force)等の定義があり，それを踏ま

えて，運動の 3 法則 (AXIOMS, OR THE LAWS OF MOTION) が与えられている．‘プリンキピア’はラテン語で書かれているが，その第 3 版の最新の英訳 [Newt] から引用して，ニュートンの原文の雰囲気に触れよう．

Law 1. *Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by forces impressed.*

Law 2. *A change in motion is proportional to the motive force impressed and takes place along the straight line in which that force is impressed.*

Law 3. *To any action there is always an opposite and equal reaction; in other words, the actions of two bodies upon each other are always equal and always opposite in direction.*

(訳者注：“body” = quantity of matter or mass, “motion” = quantity of motion or momentum)

この 3 法則をまとめて **ニュートンの運動法則** とよぶ．法則 1 を**慣性の法則**，法則 2 を**ニュートンの運動方程式**，法則 3 を**作用・反作用の法則**とよぶ．

プリンキピアでは，法則 2 は文章で表されていて，方程式の形には書かれていないが，ライプニッツの発明した微分の記号を用いて書けば，次のよく知っている形になる．問題の質点の質量を m とする．3 次元ユークリッド空間 E^3 におけるその座標を縦ベクトルで $\boldsymbol{x}(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$(転置) とする．ここに $\boldsymbol{x}(t)$ における変数 t は時間を表す．質点の速度，加速度は，

$$\boldsymbol{v}(t) := \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = {}^t\left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt}\right), \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{a}(t) := {}^t\left(\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}, \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}, \frac{d^2x_3(t)}{dt^2}\right), \tag{5.2}$$

であり，その運動量は定義によって，ベクトル $\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}(t)$ である．外力は，何種類もあるかもしれないがそれらを合成したものをベクトル $\boldsymbol{f}(t) = {}^t(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ で表す．**ニュートンの運動方程式**は

$$\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t), \qquad \text{または,} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f} \tag{5.3}$$

である．質量が時間変化しない場合を取り扱っているので次のようにも書ける：

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}. \tag{5.4}$$

ニュートンは，この運動方程式と万有引力の法則を用いて，Book 3: THE SYSTEM OF THE WORLD で，月や惑星・彗星の運動を解明し，「月はなぜ地球に向かって落ちてこないか，またなぜ宇宙の彼方に飛び去って行かないか」という彼の年来の疑問に明確に答えた．地上のリンゴの落下も天空の惑星の運動も同じ原理で律されているという神の摂理を数学的に立証した．この「ニュートンの運動法則」を発展させたものを**ニュートン力学**または**古典**

力学とよぶ．それは現代になって，ごく微小な原子，分子，素粒子の世界に働く法則を取り扱う量子力学や，光速に近い速度を取り扱うアインシュタインの相対性理論が現れた後も，通常の力学の世界を支配している．

さて，ニュートンの運動方程式はどんな座標系で有効なのであろうか？ 例えば，走っている電車の中でも鞠つきやお手玉をちゃんとやれるかどうか？ 車内でリンゴを落としたらまっすぐ下に落ちるだろうか？ 我々は経験的に漠然とは答えを知っている．電車が等速で直線的に走っているときには，すべて問題はない．リンゴは車内で見るとまっすぐ下に落ちる (しかし車外の地上から見ると進行方向に向かって斜めに落ちている)．電車が加速中とか，カーブを曲がっているときには，そうはいかない．しかしながら，こうしたことは方程式を用いて数理的に記述されねばならない．このときは，地上に固定した座標系と電車に固定した座標系の相互関係が問題になっている．

また，宇宙船地球号の上ではどうだろうか．地球は自転や公転をしながら太陽系とともに宇宙を旅している．自転速度は赤道表面で 465 m/s，日本付近で約 360 m/s, 公転速度は 29.8 km/s であるから，地球規模や惑星規模の運動を考えるときには，どんな座標系をとるかが大事な問題になる．

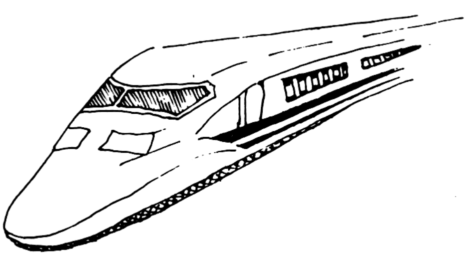
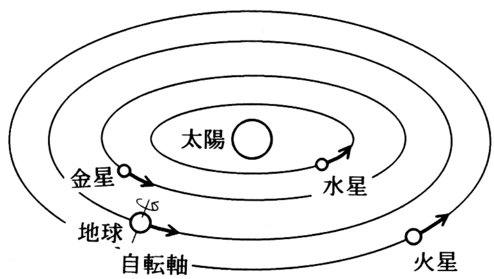


図 5.1. 時速 300 km で走る新幹線



太陽が銀河系を 1 回転するのに約 2 億年．太陽系はヘルクルス座の 1 点に向かって 動いている．地球の自転は公転方向と同じ方向．自転軸と公転軌道面との角度は約 66.5°.

図 5.2. 自転・公転しながら旅する地球

ニュートン力学では,「ニュートンの運動の 3 法則が成立するような座標系」を**慣性系**とよぶ．そして，慣性系の存在は大前提として認める．ニュートン自身はこの点について，Book 3 で次のように述べている (訳書，p.816)：

Proposition 11, Theorem 11. *The common center of the gravity of the earth, the sun and all the planets is at rest.*

運動方程式 (5.3) が使えるためには，ある座標系が慣性系であるかどうかを判定しなければならないが，それには，法則 1 (慣性の法則) が使える．すなわち，その座標系で慣性の法則が成り立っていればよい．

地球上での局所的な小範囲での運動では地上に固定した座標系は近似的には慣性系である．しかし，地球の自転を局所的な現象から証明した最初の人は，**フーコーの振り子**で知られるフーコー (J.B.L. Foucault, 1819–68) である．彼は 1851 年にパリのパンテオンで 67 m の紐(ひも)に 28 kg の重りを付けた振り子を約半日間振らせて公開実験を行った．振り子の振動面は慣性の法則によって慣性系に関しては不変であるが，実験室は地球に固定されて自転に伴って動いていくので見かけ上振動面が動く．パリは北半球であるから上から見て時計回りに回る．

◆閑話休題 8 ◆

慣性系に比して回転している座標系に見かけ上発生する慣性力を**コリオリの力**という．これは，1828 年にコリオリ (G. Gustave de Coriolis, 1792–1843) が理論的に解明した．質量 m の質点の (回転中心を座標原点としての) 回転面での位置ベクトルを ${}^t(x, y)$ とすると，角速度 ω で回転しているときのコリオリの力は，

$$\boldsymbol{f} = {}^t\left(2m\omega\frac{dy}{dt}, -2m\omega\frac{dx}{dt}\right)$$

である．これは回転軸と進行方向に直交し，進行左側から右側に働く．

大気や海水は流れが地球表面にそっているために，コリオリの力の水平成分のみが重要である．それは角速度 ω の鉛直方向の成分で決まる．地球の自転軸の方向は現在は北極星に向いているので，角速度ベクトルもそうである．したがって，地球中心から地球上の緯度 λ (北極 $\lambda = 90°$, 南極 $\lambda = -90°$) の地点では，角速度ベクトルの鉛直方向の成分は，$\omega \sin\lambda$ である．気象学では $2\omega\sin\lambda$ をコリオリ因子とよぶ．台風などの熱帯低気圧が北半球では左巻き，南半球では右巻きであるのはこの影響による．コリオリの力の効果は広域気象学，長距離飛行，大陸間弾道弾，などにとって重要である．

5.1.2 ガリレイの相対性およびユークリッド運動群

古典力学における慣性系は無数にある．それら相互はどのようにつながっているのであろうか？ 慣性系 A における座標 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ をもつ点が慣性系 B では座標 $\boldsymbol{x}' = {}^t(x'_1, x'_2, x'_3)$ をもっているとする．各慣性系は 3 次元ユークリッド空間 E^3 の構造をもっていて，E^3 の点をその座標で代表させれば，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視される．上の変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ を写像と捉えて $\boldsymbol{x}' = g(\boldsymbol{x})$ と書く．時間は絶対時間であって，慣性系 A, B で使われる時間 t, t' には初期値の取り方の差があるだけである，すなわち，$t' = t + t_0$ (t_0 は定数)．

運動の 3 法則，とくに運動方程式を見ると，この変換は任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の距離を不変にすることが要請される．2 点の距離は，$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ として，ベクトルの記号を用いて，

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

と表されるので，‘距離不変’ は次と同値である：

$$|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E^3 \cong \mathbb{R}^3). \tag{5.5}$$

このとき，他の 1 点 $\boldsymbol{z}$ とで挟(はさ)む角度 $\angle \boldsymbol{xzy}$ も不変に保たれる．

変換 $g(\boldsymbol{x})$ が時間 t による場合は，運動方程式 (5.4) が加速度 $\boldsymbol{a}$ を用いて書かれているので，$g(\boldsymbol{x})$ は t の 1 次式でなければならない．その代表的なものが等速の平行移動である．慣性系 B が慣性系 A から等速 $\boldsymbol{w}$ で遠ざかっているとすれば，$g = G_{\boldsymbol{w}}$,

$$G_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) \ := \ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}t \quad (\boldsymbol{x} \in E^3, t \in \mathbb{R}) \tag{5.6}$$

である．この変換 g を**ガリレイ変換**という．ひとつの慣性系をこの変換で写すとまた慣性系になることを，古典力学における**ガリレイの相対性**という．例えば，地上に固定された座標系が近似的に慣性系であるから，等速で運行している電車に固定された座標系もそうである．

古典力学が想定している時空の空間は，空間部分 E^3 と時間部分 $\mathbb{R}$ との直積空間 $\Omega^4 := E^3 \times \mathbb{R}$ である．一般に 2 つの慣性系 A, B はそれぞれの慣性系内での座標変換を考慮に入れれば，ガリレイ変換で結ばれている．ガリレイ変換全体のなす群 $\mathcal{G}(\Omega^4)$ は，$G_{\boldsymbol{w}} \mapsto \boldsymbol{w}$ により，加群 $\mathbb{R}^3$ と同型である．そこで，今度は 1 つの慣性系における許される座標変換を考えてみよう．変換 $g(\boldsymbol{x})$ が時間 t によらない場合である．ユークリッド空間 E^3 の上の等距離変換の全体は群をなすが，それを $\mathrm{Iso}(E^3)$ と書く．等距離変換 g で原点 O を不変にするもの (すなわち，$g(O) = O$) 全体のなす部分群を $\mathrm{Iso}(E^3, O)$ と書く．E^3 上の平行移動 $T_{\boldsymbol{x}^{(0)}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{(0)}$ $(\boldsymbol{x} \in E^3)$ の全体のなす群を $\mathcal{T}(E^3)$ と書く．E^3 の等距離変換 g で直交座標の右手系を右手系に写すものを E^3 上の**運動**といい，その全体のなす群 $\mathcal{M}(E^3)$ を**ユークリッド運動群**とよぶ．この定義は，例 1.6 での定義と実質上同じであり，次の定理の内容は，例 1.6 の内容を詳しく述べたものである．証明については，[平井 II, 第 18 章] 参照．

定理 5.1. (i) 群 $\mathrm{Iso}(E^3, O)$ の元 g に対して $u \in O(3)$ が存在して，$g(\boldsymbol{x}) = u\boldsymbol{x}$ となる．この対応によって，$\mathrm{Iso}(E^3, O)$ は 3 次元直交群 $O(3)$ と同型である．

(ii) 部分群 $\mathcal{M}(E^3, O) := \mathrm{Iso}(E^3, O) \cap \mathcal{M}(E^3)$ は上の同型の下で特殊直交群 (3 次元回転群) $SO(3)$ に同型である．

(iii) 群 $\mathrm{Iso}(E^3)$ は正規部分群 $\mathcal{T}(E^3)$ と部分群 $\mathrm{Iso}(E^3, O)$ との半直積に同型である．同型対応 $\mathrm{Iso}(E^3, O) \ni g \mapsto (\boldsymbol{x}^{(0)}, u) \in \mathcal{T}(E^3) \rtimes O(3)$ は，$g(\boldsymbol{x}) = u\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{(0)}$ $(\boldsymbol{x} \in E^3)$ によって与えられる．

(iv) ユークリッド運動群 $\mathcal{M}(E^3)$ は上の同型対応によって，正規部分群 $\mathcal{T}(E^3) \cong \mathbb{R}^3$ と回転群 $\mathcal{M}(E^3, O) \cong SO(3)$ との半直積に同型である．

時空の空間 Ω^4 における運動の 3 法則とくに運動方程式を不変にする変換は，ガリレイ変換の群 $\mathcal{G}(\Omega^4)$ と時間軸での平行移動 $t \mapsto t + t_0$ (時間原点の移動，t_0 は定数) および $\mathrm{Iso}(E^3)$ とからきている．右手系を保存するものは $\mathrm{Iso}(E^3)$ の代わりにユークリッド運動群 $\mathcal{M}(E^3)$ に制限される．空間 Ω^4 での平行移動 $T_{\boldsymbol{x}^{(0)}, t_0} : (\boldsymbol{x}, t) \mapsto (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{(0)}, t + t_0)$, の全体を $\mathcal{T}(\Omega^4)$ と書く．$t_0 \neq 0$ のとき，$T_{\boldsymbol{x}^{(0)}, t_0}$ は $\mathcal{G}(\Omega^4)$ を正規化しない．ゆえに，以上が生成する群は，

次の形の半直積になることが分かる (問題 5.2) :

$$\mathcal{N}(\Omega^4) := \mathcal{T}(\Omega^4) \rtimes \big(\mathcal{G}(\Omega^4) \rtimes \mathrm{Iso}(E^3, O)\big). \tag{5.7}$$

この群が，質点に関するニュートンの運動方程式の‘対称性’を記述している．したがって，そのユニタリ表現が物理的な現象の解明にも役立つはずであるが，この群はもはやコンパクトではないので，さきに取り扱った回転群 $SO(3)$ やユニタリ群 $SU(2)$ のように有限次元の既約表現だけでは事が済まない．群 $\mathcal{N}(\Omega^4)$ を**ニュートン力学の群**とよぼう．

問題 5.1. 定理 5.1 の主張 (i)～(iv) を証明せよ．(参照：[平井，I, 第 7 章])

問題 5.2. $\mathrm{Iso}(E^3)$, $\mathcal{G}(\Omega^4), \mathcal{T}(\Omega^4)$ の生成する群が上に与えた半直積群 $\mathcal{N}(\Omega^4)$ になることを示し，その半直積における積を具体的に書き下せ．

5.2 アインシュタインの特殊相対性理論とローレンツ群

5.2.1 電磁場と静止エーテル仮説

磁石や静電気の発見はずいぶん昔であるが，電気と磁気は静止しているときには相互に独立である．1800 年にボルタが電池を発明して電流が人工的に得られるようになり，1820 年にエルステッド (H.C. Örsted, 1777–1851) が電流が流れる導線の回りに磁気が発生することを発見した．ファラデー (M. Faraday, 1791–1867) は逆に磁力が電流を発生させることを予想して 1824 年に実験を開始したが，ようやく 7 年後の 1831 年に至って，コイルの中に棒磁石を出入りさせると電流が生じることを確認，**電磁誘導**を発見した．電磁誘導とは「磁界の中で (磁束を切るように) コイルを動かすと電流が生ずる」というものである．こうして電気と磁気を統一的に取り扱う電磁気学が誕生することとなり，数多くの研究が行われた．1864 年にマクスウェル (J.C. Maxwell, 1831–79) が電磁場の基礎方程式を提出，1873 年出版の『電気磁気論』でマクスウェル方程式の帰結として「電界，磁界は組になって電磁波として空間を光速度で伝播(でんぱ)し，光は電磁波の一種である」と予言した．電磁波の存在は 1888 年ヘルツ (H.R. Hertz, 1857–94) の実験によって確認された．

光の伝播を説明するために，デカルト以来のエーテル理論が「非力学的な電磁エーテル」の理論に変貌して存続した．ニュートン以来の力学では，前節で示したように慣性系はガリレイ変換によってまた慣性系に移るので，無限個の慣性系が存在する．ところが，電磁気学ではそうではない．

例えば，素朴に電磁誘導を考えてみて，一様な磁界とその中のコイルとを想定する．ある (力学的) 慣性系 K で見て静止しているコイルも他の (力学的) 慣性系 K′ では動いている．他方，磁界の方は一様であるから K でも K′ でも同一に見える (磁力線は人工的に考えたものだからこの際は無視される)．したがって，座標系 K で考えた場合，コイルが静止してい

るので電磁誘導は起きていない，しかし座標系 K′ から見れば電磁誘導は起きているはずである．

この矛盾を避けるためには，力学の慣性系のうち電磁気学の法則をも成り立たせているものはただ1個である，ということになる．その唯一の絶対静止系を担っているのがエーテルである．

また，数理的にもマクスウェル方程式がガリレイ変換によって不変ではないことが証明される (文献 [平井, II, 第24章] 参照).

5.2.2 ローレンツ収縮とローレンツ変換

かくて，光の伝播を担(にな)っているはずのエーテルの静止系に対する地球の相対運動の検出が重大な課題となり，いろいろの実験が行われた．その中で，1887年に行われたマイケルソン-モーリー (Michelson-Morley) の実験が最も有名であるが，人々はことごとくエーテルの存在の証明に失敗した．マイケルソン-モーリーの実験装置の要点は，まず，入力した光を点 O で2つに分岐させてそれぞれを直角方向に送り等距離地点 M, N においた鏡で反射させて O に帰ってきた2つの光を干渉させて，時間差 (光波の位相の遅れ) を検出する．例えば，OM, ON の長さがともに ℓ であり，OM が地球公転の進行方向に向いているとする．入力光が OM, ON を往復する時間をそれぞれ t_1, t_2 とすれば，エーテル静止系に対する公転速度 v, 光速度 c を用いると，

$$t_1 = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v},\ t_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad \therefore\ ct_1 : ct_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} : 1, \tag{5.8}$$

であり，光の位相差は $c(t_1 - t_2) \fallingdotseq \ell(v/c)^2$ となる．この位相差は OM と公転方向との角度 θ によって連続的に変動するので，全装置を回転させながら干渉縞の移動を観測すると v の検出ができるはずである (閑話休題9参照).

エーテルの存在を示すための多くの実験が失敗した後，その理由についていろいろの説が提起された．その中で，のちの相対論や量子論登場の基礎になったのは，1892年にフィッツジェラルド (G.F. Fitzgerald, 1851–1901) とローレンツ (H.A. Lorentz, 1853–1928; ノーベル賞, 1902) が独立に提唱した「速度 v で等速運動している物体はすべて，運動方向に $\sqrt{1-(v/c)^2}$ の割合だけ短縮する」という仮説で，**(フィッツジェラルド-) ローレンツ収縮**とよばれる．上で計算した (5.8) を見れば分かるように，これでマイケルソン-モーリーの実験がなぜ失敗に終わったかを説明できそうだが，その説明を完成するには，時間についても「静止系から見て $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ に遅れる」という局所時間の仮説を付加する必要があった．

さらにローレンツはマクスウェル方程式の変換性を調べることによって，等速運動する2つの座標系 K, K′ について次のような変換式を提唱した．まず，K, K′ における座標系を座標軸が互いに平行になるようにとり，それぞれにおける空間座標を $(x,y,z), (x',y',z')$ と

し，x, x' の方向に v の速度で相対運動しているとする．また時間座標をそれぞれ t, t' とすると，2 つの座標の間の変換は，

$$x' = \frac{x - (v/c)t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{5.9}$$

となる．これを **(純) ローレンツ変換**とよび，L'_v と書く．

さらに，K$'$ に対し同じ方向に速度 v' で等速運動している座標系 K$''$ を考えると，K, K$''$ の間の座標変換は，積 $L'_{v'} \cdot L'_v$ であるが，次の公式が成り立つ：

$$L'_{v'} \cdot L'_v = L'_{v''}, \qquad \frac{v/c + v'/c}{1 + v/c \cdot v'/c} = v''/c \ (\text{速度の加法公式}). \tag{5.10}$$

さて，座標に新たに名前を付け変えて，$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ct$, とおき，

$$\frac{-(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \sinh\tau, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \cosh\tau, \tag{5.11}$$

とおけば，問題 1.14 に現れた 2 次元の双曲的回転 $v_2(\tau)$ が現れる：

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\tau & \sinh\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

これを (x_1, x_4) における**双曲的回転**といい，その変換行列を $v_{14}(\tau)$ と書く．これは固有ローレンツ群 $SO_0(3,1)$ の一径数部分群 $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto v_{14}(\tau)$ を与える (例 1.8 とその直後の問題 1.14 参照)．

このローレンツ変換は相対性理論の基本となる変換式である．

◆閑話休題 9 ◆

マイケルソン-モーリーの実験装置において，入力した光の分岐点 O を原点にとり，地球公転の進行方向に x-軸，それを $\pi/2\ (= 90°)$ 回した軸を y-軸にとる．x-軸上に O から距離 ℓ_1 の点 M まで腕を伸ばしそこに反射鏡をおく．y-軸上では距離 ℓ_2 の点 N に反射鏡をおく．ℓ_1, ℓ_2 はできるだけ等しくするが，工作上ではやはり限界があるので平均値を $\ell = (\ell_1 + \ell_2)/2$ とおいておく．この実験に関する説明を，一般向けの解説書まで込めて 6 冊ほど読んでみたがあまりよく分からなかった．中には著者が誤解しているのではないかと疑わせる説明もあった．

いずれにせよ，この 6 冊のいずれでも，$\ell_1 = \ell_2 = \ell$ の理想的な場合のみを論じている．現実には腕の長さは 22 m にしたようであるが，ℓ_1, ℓ_2 の工作精度はミクロン単位 (μm $= 10^{-3}$ mm) でもまだ不十分であり，実現不可能である．また，温度等の環境によっても ℓ_1, ℓ_2 は別々に伸縮する．したがって，$\ell_1 \neq \ell_2$ の場合を論じねばならない．そしてこの工作上の誤差等の影響を実験結果から取り除くには細心の注意と非常なる観測精度が要求される．これを説明しよう．

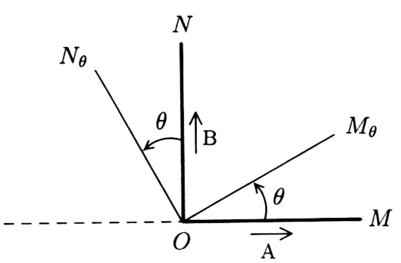


図 5.3. 実験装置 MON と $M_\theta O N_\theta$

実験装置 MON では，O に入力した光はここで A, B 2 つに分けられ，一方の A は M にある鏡で 反射して O にもどり，他方の B は N で反射して O にも

どり，ひとつに合わされるが，ここで位相のずれがあれば干渉計で感知される．エーテル静止系に対し光はどの方向にでも等速度 $c = 29.98 \times 10^4\,\mathrm{km}$ で進む．地球は公転速度 $v = 29.8\,\mathrm{km/s}$ をもって x-軸方向に進んでいる．彼らが実験で使用した光は，Na の炎色反応で見える D 線で波長はナノメートル単位 ($\mathrm{nm} = 10^{-6}\,\mathrm{mm}$) で 598.0 nm, 598.6 nm，鮮やかな黄色である．この装置全体を O を中心として角度 θ だけ回転したものを，$M_\theta O N_\theta$ とする (図 5.3 参照).

原点 O を出発した光が $M_\theta = (\ell_1 \cos\theta, \ell_1 \sin\theta)$ に到達するに要する時間 t は，方程式

$$ct = \mathrm{dist}(O, M_\theta + (vt, 0))$$

(ただし，$\mathrm{dist}(P,Q)$ は2点 P,Q 間の距離) を解いて，

$$t = \frac{\ell_1\left(v\cos\theta + \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta}\right)}{c^2 - v^2} = \frac{\ell_1}{c}\cdot\frac{(v/c)\cos\theta + \sqrt{1-(v/c)^2\sin^2\theta}}{1-(v/c)^2}.$$

同様にして，M_θ からの反射光が O にもどる時間を計算すると，上の式で $\cos\theta$ を $-\cos\theta$ で置き換えればよい．したがって，光が往復に要する時間はこれらの和として，

$$t_1 = \frac{2\ell_1}{c}\cdot\frac{\sqrt{1-(v/c)^2\sin^2\theta}}{1-(v/c)^2} \fallingdotseq \frac{2\ell_1}{c}\left(1 + (v/c)^2\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right).$$

ここでは，$(1-x)^\alpha$ の $x=0$ におけるテーラーの公式から出る近似式：$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + O(x^2)$ を，$\alpha = 1/2, \alpha = -1$, に対して用いた．

原点 O を出た光が N_θ までを往復する時間 t_2 も同様に計算できる．答えは，上式で ℓ_1 を ℓ_2 に，$\sin\theta$ を $\cos\theta$ に，$\cos\theta$ を $\sin\theta$ に置き換えたものである．そこで，A, B 2つの光の往復の時間差 $t_1 - t_2$ を求め，これを c 倍して遅延の長さを出すと，

$$c(t_1 - t_2) \fallingdotseq \Delta_1 + \Delta_2, \qquad \Delta_1 := 2(\ell_1 - \ell_2),\ \Delta_2 := \ell\,(v/c)^2\cos 2\theta,$$

と書ける．第1項 Δ_1 は2本の腕の長さの差からくるので，その変化は測定時の温度環境や腕のひずみ等による．第2項 Δ_2 の大きさを評価してみると，$\ell = 22\,\mathrm{m}$ として，$v/c = 0.994 \times 10^{-4}$ であるから，$\ell\,(v/c)^2 \fallingdotseq 217\,\mathrm{nm}$．したがって，装置を $\theta = 0$ からゆっくりと $\theta = \pi/2$ まで回転させれば，Δ_2 は $\pm 217\,\mathrm{nm}$ の間を連続的に動く．変動幅は D 線の1波長の約 3/4 なので (Δ_1 の影響をうまく除去できれば) その動きは干渉縞の変化として観測可能である．

先に注意したように，私の見た本6冊全部にはこの第1項の Δ_1 に全く言及がなかった．しかし，装置の回転移動中の Δ_1 の変化の大きさがミクロンのオーダーであったとしても Δ_2 に比して1桁上である.「現代の名工」というテレビ番組に，金属板を加工して絶対平面を研ぎ出す名工が登場したが，工程としては最初機械で平面を削りそれ以後は人の手でさらに平滑にしていくが,「あまり夢中になって金属板に被(かぶ)さって磨いていると自分の体温で金属板がひずんでくる」とのことであった．

一書には，装置を単に 90° 回して測れば (2回の観測で) v が検出できる，かの如く書いてあったがこれは無理である．なぜならば，装置を実際に動かせば，腕の長さ ℓ_1, ℓ_2 に不可避的にミクロン以上のひずみが出るので Δ_1 が変わる．そこで，装置を物理的に動かさずに原点 O で分光する A, B を光学的に鏡を使って入れ替えるとすれば，ℓ_1, ℓ_2 の役割が入れ替わり，2つの光の遅延差は，$-(\Delta_1 + \Delta_2)$ となる．いずれの場合も Δ_1 の影響を分離できず，したがって $\Delta_2 = \ell\,(v/c)^2$ だけを検出することは不可能である．

以上の説明で，(1) 回転角 θ の動きに伴っての干渉計の連続観測が必要なこと，(2) 干渉縞の移動が起こったときにその原因が Δ_1 によるのかそれとも Δ_2 によるのかを判別せねばならぬこと，を読者に説得できたであろうか？

D.C. ミラーは 1925–26 年に同種の実験を行い，太陽系の絶対速度が 200 km/s であることを示す結果を得たと発表した．上記のマイケルソン (A.A. Michelson, 1852–1931; ノーベル賞，1907) らも追試したが，彼の結果は再確認されなかった，とのことである．

問題 5.3. 上の「閑話休題 9」における計算を詳しく実行してみよ．

5.2.3 特殊相対性理論とローレンツ群

これら先行の研究を踏まえて，ニュートン力学と電磁気学を統一し，その間の矛盾を統一したのが，1905 年に発表されたアインシュタインの**特殊相対性理論**である．文献 [Eins] の中の彼自身の説明に従えば，それは 2 つの原理から出発している．まず，力学の法則，さらに一般に物理学の法則が，最も簡単な形に書かれるようなデカルト座標系，いわゆる**慣性系**の存在を認める．第 1 の原理は，**特殊相対性の原理**であり,「もし K がひとつの慣性系であれば，K に対して一様に，回転することなく運動している他のすべての座標系 K′ もまたひとつの慣性系である．自然法則はすべての慣性系に対して一致する」．第 2 の原理は，**光速度不変の原理**であり,「いかなる慣性系においても，真空中で光は一定速度 c で伝播する」．これはマクウェル方程式からの結果を上の特殊相対性原理に従って一般の慣性系に対して述べたものである．

この相対性理論には，例 1.8 に述べたミンコフスキー空間 M^{n+1} のうち，$n=3$ の場合が使われる．空間座標 $\tilde{\boldsymbol{x}} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in E^3$, 時間座標としては $x_4 = ct \in \mathbb{R}$ をとり，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$ に対する不定値内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_L = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 \qquad (5.13)$$

を導入する．この時空の空間 $M^4 \cong \mathbb{R}^4$ において，$V := \{\, \boldsymbol{x} \,;\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_L = 0\}$ は光錐とよばれるが，V の上部下部をそれぞれ V_+, V_- とすると，それらは，原点 O から光がとどく時空の点の集合と O に向かって光が送れる点の集合である (図 5.4 参照).

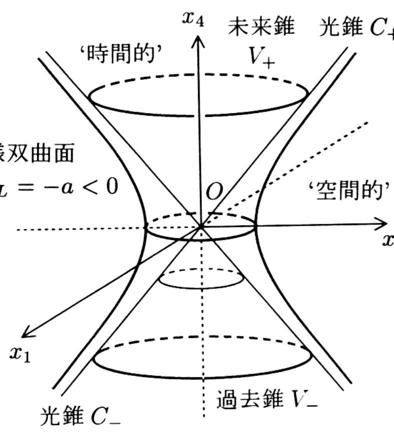


図 5.4. 時空の空間 $M^4 \cong \mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}^3$ での断面

慣性系 K における 2 点 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$ をとり，その差 $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)} = {}^t(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4)$ について，

$$s^2 := \langle \Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x} \rangle_L = -(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2 \qquad (5.14)$$

を考えると，$s=0$ は 2 点間で光が行ったりもしくは来たりできることを意味する．したがって相対性理論では，この関係はどの慣性系でも成立するので，慣性系 K を慣性系 K′ に取り替える変換 T においては関係 '$\mathrm{s}=0$' は保存される，すなわち，K′ での座標にプライ

ム (′) を付けて表示すれば，

$$-(\Delta x_1')^2 - (\Delta x_2')^2 - (\Delta x_3')^2 + (\Delta x_4')^2 = 0.$$

さらに，(5.14) の量 s^2 自体も T の下で不変であることが相対性原理によって結論される [Eins]．($s^2 > 0$ ならば，点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 間を光速以下で移動できる．値 $s > 0$ は 2 点間の固有時間とよばれる.)

逆に，ひとつの変換 $T : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ が (5.14) の右辺を不変にしているときに，それを一般ローレンツ変換という．とくに $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ となっているときには**斉次ローレンツ変換**という．上の **5.2.2** で述べたローレンツ変換 (5.12) はその一例である．

T の一般形を決定しよう．まず，定ベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)} = {}^t(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}) \in \mathbb{R}^4$ による平行移動

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^{(0)}) : \ \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{(0)}$$

は非斉次ローレンツ変換である．問題の T に対して，$\boldsymbol{x}^{(0)} = T(\boldsymbol{0})$ とおいて，$T' = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}^{(0)})^{-1} \cdot T$ とおけば，$T'(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．

斉次ローレンツ変換 T' は，(5.14) の右辺を不変にすることから，$\langle T'(\boldsymbol{x}), T'(\boldsymbol{y})\rangle_L = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle_L$ となり，不定値内積を不変にする．したがって，$\mathbb{R}^4$ 上の変換と見たとき線形変換となり，$T'(\boldsymbol{x}) = g\boldsymbol{x}, \exists g \in O(3,1)$, となることが示される ([平井, II, 第 15 章] 参照)．よって，もとの T は次の形をしていることが分かる：

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' = g\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{(0)} \quad (g \in O(3,1), \boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^4). \tag{5.15}$$

平行移動全体の群 $\mathcal{T}(M^4) := \{\mathcal{T}(\boldsymbol{y})\ ;\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4\}$ を正規部分群とする半直積群 $\mathcal{T}(M^4) \rtimes O(3,1)$ を**全非斉次ローレンツ群**，あるいは，ポアンカレ (J.A. Poincaré, 1854–1912) の名前をとって**全ポアンカレ群**とよび，$\mathcal{P}$ と書く．その単位元の連結成分は，$\mathcal{T}(M^4) \rtimes SO_0(3,1)$ であり，$\mathcal{P}_+^\uparrow$ と書く．これらが，特殊相対性理論における対称性の群である．

電磁場の方程式はこの変換群に対して共変である．力学の方程式も共変になるように修正されたが，それは質点の運動速度 v が光速 c に比して小さいときには近似的にニュートン力学の法則にもどるものである．

問題 5.4. 一般ローレンツ変換の全体が，全非斉次ローレンツ群 $\mathcal{P}$ になることを示せ．そしてその半直積の積を具体的に書き下せ．

5.3 ローレンツ群とそのリー環の構造

5.3.1 相対性原理とローレンツ変換について

アインシュタインは，その特殊相対性理論において，2 つの慣性系 K, K′ をつなぐのに,「一様に，回転することなく運動している」という関係を基本として採用した．これは，ニュー

トン力学における「等速運動」によるガリレイ変換 $G_{\boldsymbol{w}}$ を一般化したものであるが，純ローレンツ変換 L'_v (公式 (5.9)) には「ローレンツ収縮」と「時間の遅れ」が取り込まれている．この L'_v の公式では，‘相対速度’の方向に x_1- 軸をとって，速度ベクトルを $\boldsymbol{w} = {}^t(v,0,0)$ としてある．そこで，座標軸をこのように特殊にとることをやめて，K′ が K から‘相対速度’ $\boldsymbol{w} = {}^t(w_1, w_2, w_3)$ で遠ざかっているときの純ローレンツ変換を $L_{\boldsymbol{w}}$ と書いてその公式を求めてみよう．

そのために正定値行列 C の平方根に対しての補題を掲げる．複素正方行列 $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M(n,\mathbb{C})$ が**正定値**であるとは，まずエルミート型 $(C^* = C)$ であり，かつ，内積につき

$$\langle C\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = {}^t\boldsymbol{x}\, C\, \overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{1\le i,j\le n} x_i c_{ij} \overline{x_j} \;>\; 0 \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n)$$

が満たされることである．この最後の条件は C の固有値がすべて正であることを意味する．

補題 5.2. 正定値行列 $C \in M(n,\mathbb{C})$ に対して，$D^2 = C$ となる正定値行列 D がただ 1 つ存在する．それを $\sqrt{C}$ または $C^{1/2}$ と書く．C が実行列ならば $\sqrt{C}$ もそうである．

命題 5.3. 純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ は次の行列で与えられる：

$$\begin{pmatrix} (E_3 + \widehat{\boldsymbol{w}}\,{}^t\widehat{\boldsymbol{w}})^{1/2} & -\widehat{\boldsymbol{w}} \\ -{}^t\widehat{\boldsymbol{w}} & (1+\|\widehat{\boldsymbol{w}}\|^2)^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{w}} := \frac{\boldsymbol{w}/c}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{w}/c\|^2}}, \tag{5.16}$$

ここに，E_3 は 3 次の単位行列を表す．さらに，$U = \left(E_3 + \widehat{\boldsymbol{w}}\,{}^t\widehat{\boldsymbol{w}}\right)^{1/2}$ の作用は，$\widehat{\boldsymbol{w}}$ および $\forall \boldsymbol{y} \perp \widehat{\boldsymbol{w}}$ に対して，

$$U\widehat{\boldsymbol{w}} = \sqrt{1+\|\widehat{\boldsymbol{w}}\|^2}\,\widehat{\boldsymbol{w}}, \qquad U\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}. \tag{5.17}$$

証明．速度ベクトル $\boldsymbol{w}$ の大きさを $v = \|\boldsymbol{w}\|$ とおくと，ある $u \in SO(3)$ によって，$u\boldsymbol{w} = {}^t(-v,0,0)$ とできる．すると，$L_{\boldsymbol{w}} = \widetilde{u}^{-1} \cdot L'_v \cdot \widetilde{u}$ となる，ここに，$\widetilde{u} := \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ である．(5.11)–(5.12) 式の L'_v の具体形を用いれば，$L_{\boldsymbol{w}}$ に対する行列 g は，$3+1=4$ の分解に対するブロック型に書いて，

$$g = \begin{pmatrix} V & -\widehat{\boldsymbol{w}} \\ -{}^t\widehat{\boldsymbol{w}} & \sqrt{1+\|\widehat{\boldsymbol{w}}\|^2} \end{pmatrix}, \qquad V \text{ は 3 次の正定値行列,}$$

の形であることが分かる．この g に対して，条件 ${}^tgJ_{3,1}g = J_{3,1}$ を書き下せば，

$${}^tV\,V - \widehat{\boldsymbol{w}}\,{}^t\widehat{\boldsymbol{w}} = E_3, \qquad {}^tV\widehat{\boldsymbol{w}} - \sqrt{1+\|\widehat{\boldsymbol{w}}\|^2}\,\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{0},$$

となる．${}^tV = V$ なので，第 1 式より，V は命題 5.3 で与えられる平方根 $U = \left(E_3 + {}^t\widehat{\boldsymbol{w}}\,{}^t\widehat{\boldsymbol{w}}\right)^{1/2}$ に等しい．そして，U の作用は，$W = U^2$ の計算から分かる．実際，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し，

$Wz = z + \langle \widehat{w}, z \rangle \widehat{w}$ であるから，$\widehat{w}$ と $y \perp \widehat{w}$ に対して，$W\widehat{w} = (1 + \|\widehat{w}\|^2)\widehat{w}$, $Wy = y$, となり，平方根 $U = \sqrt{W}$ の作用は (5.17) 式で与えられることがわかる． □

次の定理で示すように，純ローレンツ変換の全体 $\boldsymbol{L} = \{ L_{w} \,;\, w \in \mathbb{R}^3 \}$ は群にはならない．これは，ガリレイ変換 G_{w} の全体が群 $\mathcal{G}(\Omega^4)$ をなすのに比べて著しい差である．

定理 5.4. (i) 2つの純ローレンツ変換 $L_{w}, L_{w'}$ の積がまた純ローレンツ変換になったとすると，ベクトル w, w' は互いに1次従属である．

(ii) 純ローレンツ変換全体の集合 $\boldsymbol{L} = \{ L_{w} \,;\, w \in \mathbb{R}^3 \}$ に含まれる部分群のうちで極大なものは，(5.12) の一径数部分群 $\mathcal{V}_{14} = \{ v_{14}(\tau) \,;\, \tau \in \mathbb{R} \}$ に $SO(3)$-共役である．それらは，$\mathbb{R}^3$ の1次元部分空間 $\mathbb{R}\, w^{(0)} := \{ \lambda w^{(0)} \,;\, \lambda \in \mathbb{R} \}$ ごとに対応している．

ここで，$w^{(0)}$ を単位ベクトルにとり，$u \in SO(3)$ を $u\, w^{(0)} = {}^t(1, 0, 0)$ となるように選べば，$\widetilde{u} := \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ による共役によって，次の自然な同型を得る：

$$L_{vw^{(0)}} \longmapsto L'_v = \widetilde{u} \cdot L_{vw^{(0)}} \cdot \widetilde{u}^{-1} \in \mathcal{V}_{14} \quad (v \in \mathbb{R})$$

そして，$L'_v = v_{14}(\tau)$, $\sinh\tau = -(v/c)/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, $v/c = -\tanh\tau$, である．

証明の方針. (i) $L_{w} \cdot L_{w'} = L_{w''}$ と仮定する．これらの変換に対する行列をそれぞれ B, C, D とすると，$BC = D$, ${}^tB = B$, ${}^tC = C$, ${}^tD = D$. そこで，等式 $BC = D$ の両辺の転置をとってみれば，$BC = CB$ を得る．すなわち，上の仮定の下では，$L_{w}, L_{w'}$ は互いに可換である．(一般に「対称行列よりなる群は可換」.)

そこで，行列を $3 + 1 = 4$ のブロック型で表示すると，等式 $AB = BA$ の両辺の (1, 1), (1, 2) 要素を比較して，次を得る：

$$(E_3 + \widehat{w}\,{}^t\widehat{w})^{1/2}\,(E_3 + \widehat{w'}\,{}^t\widehat{w'})^{1/2} = (E_3 + \widehat{w'}\,{}^t\widehat{w'})^{1/2}\,(E_3 + \widehat{w}\,{}^t\widehat{w})^{1/2}, \tag{5.18}$$

$$(E_3 + \widehat{w}\,{}^t\widehat{w})^{1/2}\widehat{w'} + \sqrt{1 + \|\widehat{w'}\|^2}\,\widehat{w} = (E_3 + \widehat{w'}\,{}^t\widehat{w'})^{1/2}\widehat{w} + \sqrt{1 + \|\widehat{w}\|^2}\,\widehat{w'}. \tag{5.19}$$

他方，$(E_3 + \widehat{w}\,{}^t\widehat{w})^{1/2}, (E_3 + \widehat{w'}\,{}^t\widehat{w'})^{1/2}$ の作用は，(5.17) 式で与えられる．そこで，$\widehat{w'} = a\widehat{w} + y$, $y \perp \widehat{w}$, と表示し，また逆に，$\widehat{w} = a'\widehat{w'} + y'$, $y' \perp \widehat{w'}$, とも表示して，(5.18) の両辺を，$\widehat{w'}$ に作用してみれば，

$$\left(\sqrt{1 + \|\widehat{w}\|^2} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \|\widehat{w'}\|^2} - 1\right) a y = \mathbf{0}$$

を得る．したがって，$a = 0$ または $y = \mathbf{0}$ である．これから，(5.18) の可換関係が成立するための必要十分条件が，$\widehat{w'} \perp \widehat{w}$ または $\widehat{w'} = a\widehat{w}$ であることが分かる．

$a = 0$ の場合には，(5.19) が成立しない．したがって，主張 (i) が示された．

(ii) を証明する方針は，すでにその文中に示されている． (終わり)

注意 5.1. 速度ベクトル w, w' が同一直線上にあるときには，純ローレンツ変換の積 $L_{w} \cdot L_{w'}$ はまた純ローレンツ変換になり，その速度の加法公式は，(5.10) により与えられる．

しかし，定理 5.4 (i) によれば，速度ベクトルが一直線上になければ，純ローレンツ変換の積はもはや純ローレンツ変換ではない．実際，速度ベクトル $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'$ が互いに 1 次独立なときには，純ローレンツ変換の積 $L_{\boldsymbol{w}} \cdot L_{\boldsymbol{w}'}$ は空間部分の自明でない回転と純ローレンツ変換の積に分解される，すなわち，適当な $u \in SO(3), \neq e$, と $\boldsymbol{w}'' \in \mathbb{R}^3$ とが存在して，$L_{\boldsymbol{w}''} \cdot \widetilde{u}$ の形に書ける．ただし，$\widetilde{u} = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. しかし，この u や $\boldsymbol{w}''$ を与える公式は簡単ではない (定理 5.6, 問題 5.8 参照)

問題 5.5. 補題 5.2 の証明を与えよ． 〔ヒント： いろんな詳しさの証明があり得る．エルミート行列がユニタリ行列によって対角化できること，を使ってもよい.〕

問題 5.6. 定理 5.4 (i) の証明を詳しく書き下せ．また，(ii) の証明を与えよ．

問題 5.7. 純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}}$ は，速度 $\boldsymbol{w}$ が光速度 c に比してごく小さいときには，ガリレオ変換 $G_{-\boldsymbol{w}}$ と近似的には等しいことを示せ．

5.3.2 固有ローレンツ群の分解

全斉次ローレンツ群 $SO(3,1)$ の単位元の連結成分 $SO_0(3,1)$ を**固有ローレンツ群**といい，$\mathcal{L}_+^\uparrow$ とも書かれる．純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}}$ は，速度ベクトル $\boldsymbol{w}$ と時間軸とで張る M^4 の 2 次元の部分空間における双曲的回転である．他方，時空の空間 M^4 の空間部分 E^3 での回転はこれらとは異なる一般ローレンツ変換であり，その全体は極大コンパクト部分群

$$K := \{\, \widetilde{u} = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \ ;\ u \in SO(3) \,\} \subset \mathcal{L}_+^\uparrow = SO_0(3,1)$$

をなす．この節では，$\mathcal{L}_+^\uparrow$ の元 (一般ローレンツ変換) は，M^4 の空間部分の座標軸の回転と純ローレンツ変換の積に一意的に分解されることを証明する．そのために，まず次の形の分解定理を示そう．$\mathcal{L}_+^\uparrow$ の部分群 $\mathcal{V}_{14}$ を A と書き，その部分集合 $A_+ := \{\, v_{14}(\tau)\,;\, \tau \geq 0 \,\}$ をとる．

定理 5.5. 固有ローレンツ群 $G = \mathcal{L}_+^\uparrow$ の任意の元 g に対して，$u, v \in SO(3), a = v_{14}(\tau) \in A_+$ が存在して，$g = \widetilde{u}\, a\, \widetilde{v}$ と書ける．この意味で，$G = KAK = KA_+K$ と分解する (これを G の**カルタン** (E. Cartan) **分解**とよぶ)．

略証. M^4 の 1 点 $\boldsymbol{e}^{(0)} = {}^t(0,0,0,1)$ をとる．点 $\boldsymbol{x} = g\boldsymbol{e}^{(0)}$ は G 軌道としての二葉双曲面 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_L = 1$ の上葉 L_1^+ (例 1.8 参照) に載っている．この点を空間部分の回転 $u_1 \in SO(3)$ で動かして，$\boldsymbol{y} := \widetilde{u_1}\boldsymbol{x} = (\alpha, 0, 0, \beta), \alpha > 0$, とできる．このとき，$\beta > 0, -\alpha^2 + \beta^2 = 1$. したがって，$\alpha = \sinh\tau, \beta = \cosh\tau, \tau \geq 0$, と書ける．すると，$v_{14}(\tau)^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{(0)}$. よって，$h := v_{14}(\tau)^{-1}\widetilde{u_1}g$ は，$h\boldsymbol{e}^{(0)} = \boldsymbol{e}^{(0)}$ となるので，$h = \widetilde{v}, v \in SO(3)$ (問題 5.8) である．これから，$g = \widetilde{u_1}^{-1} v_{14}(\tau) \widetilde{v}$ を得る． □

前節で見たように，純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}}$ は次のように書かれる．$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ に対し，(5.16) に従って，$\widehat{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{w}/c)/(1 - \|\boldsymbol{w}/c\|^2)^{1/2}$ とおき，それを $u \in SO(3), \tau \in \mathbb{R}$ によって，$-\widehat{\boldsymbol{w}} =$

$u\,{}^t(\sinh\tau, 0, 0)$ と書くと，

$$L_{\boldsymbol{w}} = \widetilde{u}\, v_{14}(\tau)\, \widetilde{u}^{-1}. \tag{5.20}$$

これから分かるように，4 次正方行列としてみたとき，$B = L_{\boldsymbol{w}}$ は対称 (${}^tB = B$) で，その固有値は，$1, 1, e^{\tau}, e^{-\tau}$ であり，したがって正定値である．

定理 5.6. 固有ローレンツ群 $G = \mathcal{L}_+^{\uparrow}$ の任意の元 g に対して，$k \in K, L_{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{L}$ が一意に存在して，$g = L_{\boldsymbol{w}}\, k$ と書ける．この意味で，$G = \boldsymbol{L}K$ と積に分解される．同様に，$G = K\boldsymbol{L}$ とも分解される．

略証. 前定理によって，$g = \widetilde{u}\, a\, \widetilde{v}$ と書いたとき，$L_{\boldsymbol{w}} = \widetilde{u}\, a\, \widetilde{u}^{-1}, k = \widetilde{u}\widetilde{v} \in K$ とおけば，$g = L_{\boldsymbol{w}}\, k$ となる．したがって，分解の一意性を示せばよい．

$g = B_1k_1 = B_2k_2, B_i = L_{\boldsymbol{w}_i}, k_i \in K\,(i = 1, 2)$ と 2 つの表示があったとする．$k := k_1k_2^{-1} = \widetilde{u}, u \in SO(3)$, とすると，$B_1k = B_2$．ここで両辺の転置をとれば，$k^{-1}B_1 = B_2 = B_1k$, ゆえに，$k\,B_1^{\,2} = B_1^{\,2}\,k$．ここで，$B_1$ の固有値 $1, 1, e^{\tau}, e^{-\tau}$ と固有空間を B_1^2 のそれらと比較すれば，k と B_1 が可換であることが分かる．$k \neq e$ とすると，B_1k の固有値は，$e^{\tau}, e^{-\tau}$ と $k = \widetilde{u}$ の固有値 $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha} \neq 1$ とからなる．これは，$B_2 = B_1k$ の固有値とは異なるので矛盾． □

5.3.3 ローレンツ群のリー環および指数写像について

ローレンツ群 $G = SO_0(3,1)$ の定義式は ${}^tgJ_{3,1}g = J_{3,1}$ であるから，そこに $g = e^{tX}, X \in M(4, \mathbb{R})$, を代入して $t = 0$ で微分すれば，G のリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ として $\mathfrak{so}(3,1)$ を得る．すなわち，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1) = \{\, X \in M(4, \mathbb{R})\ ;\ {}^tXJ_{3,1} + J_{3,1}X = 0\,\}. \tag{5.21}$$

その基底として，次のものがとれる：

$$X_{ij} = -E_{ij} + E_{ji}\ \ (1 \le i < j \le 3), \quad Y_k = E_{k4} + E_{4k}\ \ (1 \le k \le 3). \tag{5.22}$$

部分リー環 $\mathfrak{so}(3)$ における X_{ij} の交換関係のほかに，次の交換関係がある：

$$[X_{ij}, Y_k] = \delta_{ik}Y_j - \delta_{jk}Y_i, \quad [Y_k, Y_\ell] = X_{k\ell}. \tag{5.23}$$

(リー環の具体的なより多くの例については，**7.2.2** 参照.)

G の元 g に対し，$\Theta(g) := {}^tg^{-1}$ とおくと，$\Theta(g_1g_2) = \Theta(g_1)\Theta(g_2)$ となる．定義式 ${}^tgJ_{3,1}g = J_{3,1}$ から，$h = \Theta(g)$ に対しても，${}^thJ_{3,1}h = J_{3,1}$ を得る．また，Θ の像 $\Theta(G) \subset SO(3,1)$ はまた連結であるから，Θ は $G = SO_0(3,1)$ の自己同型を与える．これを微分すると，

$d\Theta(X) = (d/dt)_{t=0}\Theta(e^{tX})$ $(X \in \mathfrak{g})$ によって，リー環 $\mathfrak{g}$ の自己同型 $\theta := d\Theta : X \mapsto -{}^tX$ を得る．θ は**対合的**（たいごう），すなわち，$\theta^2 = I_{\mathfrak{g}}$ (恒等写像) である．これは $\mathfrak{g}$ の**カルタン対合**とよばれるもののひとつである．θ の固有値は ± 1 であるが，その固有空間を

$$\mathfrak{k} = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, \theta(X) = X \}, \quad \mathfrak{p} = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, \theta(X) = -X \}, \tag{5.24}$$

とおく．リー環 $\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と直和に分解され，$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分環で，極大コンパクト部分群 K のリー環 $\mathrm{Lie}(K) \cong \mathfrak{so}(3)$ であり，$\mathfrak{p}$ は部分空間である．そして，$\mathfrak{k}$ は $\{ X_{ij} \,;\, 1 \le i < j \le 3 \}$ で張られ，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ のすべての対称行列よりなり，$\{ Y_i \,;\, 1 \le i \le 3 \}$ で張られる．$\mathfrak{p}$ の上で指数写像 exp は単射であり，その像を $P = \{ e^Y \,;\, Y \in \mathfrak{p} \}$ とおく．

定理 5.7. $P = \exp(\mathfrak{p})$ は，純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}}$ の全体 $\boldsymbol{L}$ と一致する：$P = \boldsymbol{L}$.

証明. 速度ベクトルが，$\boldsymbol{w} = {}^t(v, 0, 0)$ のときには，$L_{\boldsymbol{w}} = L'_v$ であり，これは $L'_v = v_{14}(\tau), v/c = -\tanh\tau$, によって一径数部分群を与えている．$\tau = 0$ におけるその接ベクトルは

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right)_0 v_{14}(\tau) = \lim_{\tau \to 0} \frac{v_{14}(\tau) - E_4}{\tau} = Y_1 \tag{5.25}$$

であり，逆に，$v_{14}(\tau) = e^{\tau Y_1}$ である．同様に，一径数部分群 $v_{24}(\tau), v_{34}(\tau)$ の接ベクトルとして，Y_2, Y_3 を得る．また，純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}}$ は適当な回転 $\widetilde{u}$, $u \in SO(3)$, の共役によって，(5.20) のように，$L_{\boldsymbol{w}} = \widetilde{u}\, v_{14}(\tau)\, \widetilde{u}^{-1}$ と書けるので，$L_{\boldsymbol{w}} = \exp\bigl(\tau \mathrm{Ad}(\widetilde{u}) Y_1\bigr)$. ここに，$\mathrm{Ad}(g)X := gXg^{-1}$ $(g \in G, X \in \mathfrak{g})$ は，G の内部自己同型 ι_g からきたリー環 $\mathfrak{g}$ の自己同型 (**共役変換**とよばれる) である．さらに一般に，$\widetilde{v}\, L_{\boldsymbol{w}}\, \widetilde{v}^{-1} = L_{v\boldsymbol{w}}$ となるので，$\boldsymbol{L} = \{ L_{\boldsymbol{w}} \,;\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \} = \exp(\mathfrak{p}) = P$ が分かる． □

定理 5.6 に対する補. ひるがえって，定理 5.6 における G の分解 $G = \boldsymbol{L}K$ は，連結な半単純リー群に対する知られた分解 $G = \exp(\mathfrak{p})\,K$ の特別な場合である．そして，写像 $\mathfrak{p} \times K \ni (Y, k) \mapsto e^Y k \in G$ が多様体としての同型を与えることも知られているが，ここでは，逆写像の連続性を言おう．群 $SO(3)$, $SO_0(3,1)$ には行列要素を使った位相，すなわち，$SO(3) \hookrightarrow M(3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$, $SO_0(3,1) \hookrightarrow M(4, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{16}$, による相対位相，を入れる．$g \in G = SO_0(3,1)$ に対し，$g = e^Y k$ とすると，正定値な行列 $g\,{}^tg = e^Y e^Y = e^{2Y}$ である．他方，正定値行列 Z に対しては，$\log Z = \sum_{1 \le n < \infty} (-1)^{n-1}(Z - E_4)^n/n$ が Z の連続関数として収束半径の外にまで定義できることは，Z の対角化を考えれば証明される．ここで，$Z = g\,{}^tg$ ととって，$Y = (1/2)\log(g\,{}^tg)$ は g の連続関数であり，$k = e^{-Y}g$ もそうである．

5.3.4　純ローレンツ変換はローレンツ群を生成する

この節では，純ローレンツ変換 $L_{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, を繰り返せば，固有ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の任意の元が出てくることを示したい．純ローレンツ変換全体が生成する群を G' と書く．まず，リー環レベルで G' を観察しよう．

$\boldsymbol{L} = \exp(\mathfrak{p})$ となる部分空間 $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Ad}(\widetilde{u}), u \in SO(3)$, で不変であるから，$G'$ は当然この共役で不変である．また，任意の $Y \in \mathfrak{p} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Y_3$ に対応する一径数部分群 $g_Y(t) = e^{tY}$ が G' に入っている．部分空間 $\mathfrak{p}$ は，(5.23) から分かるように，リー環 $\mathfrak{so}(3,1)$ を生成する．

他方，定理 4.10 によれば，2 つの一径数部分群 $g_Y(t) = e^{tY}$, $g_{Y'}(t) = e^{tY'}$ に対して，交換子 $h(t) = [g_Y(\sqrt{t}), g_{Y'}(\sqrt{t})]$ は $t=0$ で単位元 e を出発する道 (path) であって，e での接ベクトルが $(d/dt)_0 h(t) = [Y, Y']$ となる．

命題 5.8. 純ローレンツ変換全体の生成する群 G' は，$\widetilde{u} = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), u \in SO(3)$, による共役で不変である．また，任意の $Y \in \mathfrak{p}$ に対する一径数部分群を含み，かつ，任意の $X \in \mathfrak{so}(3,1)$ に対し，X を接ベクトルにもつ e から発するある道を含む．

この命題で述べた 2 つの性質から，$G' = SO_0(3,1)$ が結論されるのではないかと思えるが，リー群とリー環の一般論から分かるのは，「G' の閉包は $SO_0(3,1)$ である」までである．

定理 5.9. 純ローレンツ変換全体の集合 $\boldsymbol{L} = \{L_{\boldsymbol{w}}\ ;\ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3\}$ は固有ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow = SO_0(3,1)$ を生成する．

略証. 純ローレンツ変換同士の交換子 $h(t) = [g_Y(\sqrt{t}), g_{Y'}(\sqrt{t})]$ に対して，上の「定理 5.6 に対する補」によれば，t に連続的に依存する $Y(t) \in \mathfrak{p}$ が存在して，$k(t) = e^{Y(t)}h(t) \in K$ は K 内の $k(0) = e$ に発する連続な道である．また，適当な $\boldsymbol{w}(t) \in \mathbb{R}^3$ をとれば，$e^{Y(t)} = L_{\boldsymbol{w}(t)}$ である．K と $SO(3)$ を同一視して話をすれば，$k(t)$ の固有値は，$e^{i\alpha(t)}, e^{-i\alpha(t)}, 1$ であり，t が十分小なるときには $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ は t の連続関数で，$\alpha(0) = 0$ となるようにとれる．他方，群 $SO(3)$ の元は，その固有値の集合が一致するときに互いに共役である (問題 5.9)．したがって，この道の $SO(3)$ による共役を全部集めれば，e の $SO(3)$ におけるある近傍 U が得られる．そして U は $SO(3)$ を生成する．　□

問題 5.8.　$SO_0(3,1)$ の元 g を $3+1=4$ に従ってブロック型に表示したときに (1, 2)-要素が ${}^t(0,0,0)$ であれば，$g \in SO(3)$ である．これを証明せよ．

問題 5.9.　群 $SO(3)$ の 2 元 u, u' に対して，3×3 型行列としての固有値の集合が一致すれば，u, u' は ($SO(3)$ 内で) 互いに共役である．これを証明せよ．

5.4 ローレンツ群，普遍被覆群 $SL(2,\mathbb{C})$，それらの表現

5.4.1 $SL(2,\mathbb{C})$ から $SO_0(3,1)$ への被覆写像

特殊相対論によれば，物理量や物理法則を記述するには，ミンコフスキー空間 M^4 とその上の変換群としてのローレンツ群 $SO_0(3,1)$ が必要不可欠である．

ところが，量子力学ではさらにスピンという別の自由度がある．これを記述するのに，パウリは回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群である $SU(2)$ を用いた．ディラックは次節で述べるように「シュレーディンガーやパウリの方程式の相対論化」を目指して，ディラック方程式を導いた．それによって,「方程式の相対論化」と「スピンの導入」という 2 つの重要な目的を同時に実現したが，そこで働くのはローレンツ群の普遍被覆群である $SL(2,\mathbb{C})$ である．

ここでは，物理的な意味づけを離れて，とりあえず数学的な問題として，$SL(2,\mathbb{C})$ から $SO_0(3,1)$ への被覆写像を与えよう．

前者の働く実ベクトル空間として，2 次のエルミート行列全体の空間

$$\mathcal{Z} := \{\, Z \in M(2,\mathbb{C}) \,;\, Z^* = Z \,\} \tag{5.26}$$

をとる．$h \in SL(2,\mathbb{C})$ の作用は，$Z \mapsto D'(h)Z := hZh^*$ により与える．これをもっと分かりやすくするために，$\mathcal{Z}$ に実 4 次元としての座標を入れよう．そのために (4.3) のパウリ行列の添字を付け替え，さらに単位行列を加えて，

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

とおく．これらをベクトル空間 $\mathcal{Z}$ の基底にとって，座標を対応

$$\begin{aligned} \phi \;:\; \mathcal{Z} \ni Z = \begin{pmatrix} x_3 + x_4 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 + x_4 \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{4} \sigma_j x_j \\ &\longmapsto\; x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \end{aligned} \tag{5.28}$$

によって導入する．すると，$\phi\bigl(D'(h)Z\bigr) = D(h)\phi(Z) = D(h)x$ によって，$\mathbb{R}^4$ 上の線形写像 $D(h)$ が現れる．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} \ni Z & \xrightarrow{\;h\;} & D'(h)Z \in \mathcal{Z} \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \mathbb{R}^4 \ni x = \phi(Z) & \xrightarrow[h]{} & D(h)x = \phi(D'(h)Z) \in \mathbb{R}^4 \end{array}$$

ここで，$\det Z = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ であり，$\det(hZh^*) = |\det h|^2 \det Z = \det Z$ であるから，$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 $D(h)$ は内積 $\langle x, x\rangle_L := -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ を不変にする．この不定値内積の入った空間 $\mathbb{R}^4$ をミンコフスキー空間 M^4 と同一視すると，写像

$SL(2,\mathbb{C}) \ni h \mapsto D(h)$ はローレンツ群 $SO_0(3,1)$ のある連結部分群の上への準同型を与える．すぐ分かるように，その核は $\mathrm{Ker}(D) = \{\pm E_2\}$ である．

上の準同型は，**4.3.1** における被覆写像 $D: SU(2) \to SO(3)$ の群 $SL(2,\mathbb{C}) \supset SU(2)$ への拡張である．したがって，そこで与えた $SU(2)$ の一径数部分群 $e^{\varphi X_j}, j = 1,2,3$, とそれらを D で写した $SO(3)$ の一径数部分群 $r_{23}(\varphi), r_{31}(\varphi), r_{12}(\varphi)$ との対応はそのまま有効である．これにより，像として，$SO(3)(\hookrightarrow SO_0(3,1))$ を得る．

そこで，$SO_0(3,1)$ で新しく出てくる一径数部分群 $v_{k4}(\tau) = e^{\tau Y_k}$ $(1 \le k \le 3)$ に写ってくるはずの $SL(2,\mathbb{C})$ 内の一径数部分群 $a_1(\tau/2), a_2(\tau/2), a_3(\tau/2)$ とその生成元 Y_1', Y_2', Y_3' とを調べよう．それらをこの順番で並べると以下のようになることが計算で示される：略記号で $\mathrm{ch}\, t = \cosh t$, $\mathrm{sh}\, t = \sinh t$, とおいて，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\tau/2 & \mathrm{sh}\,\tau/2 \\ \mathrm{sh}\,\tau/2 & \mathrm{ch}\,\tau/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\tau/2 & -i\,\mathrm{sh}\,\tau/2 \\ i\,\mathrm{sh}\,\tau/2 & \mathrm{ch}\,\tau/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau/2} \end{pmatrix}$$

$$Y_1' := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2' := \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3' := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

定理 5.10. (i)　上で与えた準同型 D は $SL(2,\mathbb{C})$ から $SO_0(3,1)$ の上への局所同型であり，その核は $\{\pm E_2\}$ である．この被覆写像によって，前者は後者の普遍被覆群となる．

(ii)　被覆写像 D から誘導された，$SL(2,\mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ から $SO_0(3,1)$ のリー環 $\mathfrak{so}(3,1)$ への同型写像 dD は，次で与えられる．$X_j = \frac{1}{2i}\sigma_j$ $(1 \le j \le 3)$, $Y_k' = \frac{1}{2}\sigma_k$ $(1 \le k \le 3)$, に対し，

$$X_1 \to X_{23}, \quad X_2 \to X_{31}, \quad X_3 \to X_{12}; \quad Y_k' \to Y_k \ (1 \le k \le 3). \tag{5.29}$$

群 $SL(2,\mathbb{C})$ の一般の元 $h = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対する 4×4 型行列 $D(h) \in SO_0(3,1)$ を具体的に書き下した公式については，例えば [平井 II, 17 章] を参照せよ．

リー環 $\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ はここでは実リー環と捉えられている．そして $SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ はその部分リー環であり，$\{X_1, X_2, X_3\}$ で張られる．別の部分リー環 $\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は $\{X_2, Y_1', Y_3'\}$ で張られるので，被覆写像 D を $SL(2,\mathbb{R})$ に制限すると，(x_3-軸を不変にする) 3 次元ローレンツ群 $SO_0(2,1)(\hookrightarrow SO_0(3,1))$ の上への 2 重の被覆写像を得る．もっとも，この場合は，$SL(2,\mathbb{R})$ は単連結ではなく，その極大コンパクト部分群 $SO(2) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の普遍被覆 $\mathbb{R}$ が無限重なので，それに従って，$SL(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆も無限重である．群 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論については次章で論ずる．

5.4.2 ローレンツ群，$SL(2,\mathbb{C})$ の有限次元表現： テンソルとスピノル

ローレンツ群の表現

固有ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow = SO_0(3,1)$ の自然表現 $\pi_1 : \mathcal{L}_+^\uparrow \ni g \mapsto g = (g_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ は 4 次元ベクトル空間 $V_1 = \mathbb{C}^4$ に既約に働く．その k 回のテンソル積 $\pi_k := \otimes^k \pi_1$ はテンソル積空間 $V_k := \otimes^k V_1$ に働くので，4^k 次元である．V_k の元で $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k = \otimes_{1\le j\le k} v_j$ $(v_j \in V_1)$ の形をしているものを**分解可能**というが，それらは全空間を張り，$g \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ の作用では，$\pi_k(g)\big(\otimes_{1\le j\le k} v_j\big) = \otimes_{1\le j\le k}\pi_1(g)v_j$ となる．$k \ge 2$ ならば，π_k はもはや既約ではない．例えば，対称テンソルの空間 $S^k V_1$ や反対称テンソルの空間 $\wedge^k V_1$ は既約な不変部分空間である．ここまでの話は，全斉次ローレンツ群 $\mathcal{L} = O(3,1)$ をとっても同じことである．

テンソル積表現を既約分解するには，その相関作用素の全体がなす環が解明できればよい．ところが，$SO_0(3,1)$ の π_k の場合には，この環が複雑であって，一筋縄ではいかない．実は，$SO_0(3,1)$ を含むより大きな群 $GL(4,\mathbb{R})$ に対しては，いわゆるシュア‐ワイルの相互律といわれる結果があるのだが，その部分群として次元が違いすぎるのでそれから何かを引き出すことはできない．

そこで，普遍被覆群 $SL(2,\mathbb{C})$ のテンソル積表現に関する結果を説明しよう．これは，$SO_0(3,1)$ の 2 価の表現まで込めて，考えるわけである．少し大げさだが，$GL(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ は標数 0 の体) の自然表現の k 次テンソル積表現の場合に，k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の表現を自然に定義してそれを使う，シュアとワイル (H. Weyl, 1885–1955) の (互いに独立な) 結果の $n = 2$ の場合として見てみる．

固有ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の被覆群 $SL(2,\mathbb{C})$ とスピノル

ローレンツ群の 2 重の被覆群である $SL(2,\mathbb{C})$ の表現によって変換される共変量を，エーレンフェスト (P. Ehrenfest, 1880–1933) は**スピノル**と名づけた．($\mathcal{L}_+^\uparrow$ や $\mathcal{L}$ の自然表現のテンソル積空間 $V_k = \otimes^k V_1$ などの元は，すでにテンソルとよばれていたのでそれと区別した．) $h = (h_{ij})_{1\le i,j\le 2} \in SL(2,\mathbb{C})$ に h 自身を対応させる 2 次元表現 $h \mapsto h$ を自然表現とよび $\pi_{1,0}$ と書く．h にその複素共役行列 $\overline{h} = (\overline{h_{ij}})$ を対応させる表現を $\pi_{0,1}$ と書く．$\pi_{1,0}, \pi_{0,1}$ の表現空間をそれぞれ $V_{1,0}, V_{0,1}$ と書く (これらはいずれも $\mathbb{C}^2$ と同型である)．またこれらのテンソル積として，$\pi_{k,n} := \big(\otimes^k \pi_{1,0}\big) \otimes \big(\otimes^n \pi_{0,1}\big)$ を定義し，その表現空間 $V_{k,n} := \big(\otimes^k V_{1,0}\big) \otimes \big(\otimes^n V_{0,1}\big)$ の元を (k,n) 型スピノルという．$k+n$ が偶数のときには，$k+n$ 階のテンソル積表現 $\pi_{k,n}$ は被覆写像 $SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}_+^\uparrow = SO_0(3,1)$ の核 $\{\pm E_2\}$ に対して，$\pi_{k,n}(\pm E_2) = I$ (恒等作用素) であるから，固有ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の 1 価の表現になる．$k+n$ が奇数のときには，$\pi_{k,n}$ は $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の 2 価の表現である．

群 $SL(2,\mathbb{C})$ に，$h = (h_{ij})_{1\le i,j\le 2} \mapsto (h_{11}, h_{12}, h_{21})$ ($h_{11} \ne 0$ のとき) などにより $\mathbb{C}$ 上の局所座標を入れておく．表現 π につき，$\pi(h)$ の行列要素が，すべて h に関して正則であるとき π を**正則な表現**とよび，すべて反正則なとき**反正則な表現**とよぶ．テンソル積表現 $\pi_{k,0}$

については，行列要素は h に関して正則である (実は，h_{ij} の多項式なので，局所座標から見れば有理式である)．したがって，その既約成分もこの性質をもつので，正則な表現である．他方，$\pi_{0,k}$ については，その既約成分はすべて反正則である．そして，$\pi_{k,n}=\pi_{k,0}\otimes\pi_{0,n}$ の既約分解については，正則な成分 $\pi_{k,0}$，反正則な成分 $\pi_{0,n}$，それぞれの既約分解が分かれば，それらをあらためてテンソル積すれば，$\pi_{k,n}$ の既約分解が得られる．(群 $SL(2,\mathbb{R})$ については，正則，反正則の区別がないので，$\pi_{k,0}, k\geq 1$，を考えるだけでよい．)

さてそこで，テンソル積表現 $\pi_{k,0}$ の既約分解について述べるのに，話を $GL_2 := GL(2,\mathbb{C})\supset SL(2,\mathbb{C})$ まで拡げる．GL_2 の自然表現を $\pi_{1,0}^{GL}$ と書き，その表現空間は $V_{1,0}$ と同じとする．$\pi_{1,0}$ は $\pi_{1,0}^{GL}$ を $SL(2,\mathbb{C})$ に制限したものである．また，GL_2 の表現 π に対し，$\pi(h)$ の行列要素がすべて $h=(h_{ij})$ の要素 h_{ij} の多項式になっているとき，π を多項式表現とよぶ．

対称群 $\mathfrak{S}_k$ の表現と $GL(2,\mathbb{C}), SL(2,\mathbb{C})$ のテンソル積表現，既約表現

テンソル積空間 $V_{k,0}=\otimes^k V_{1,0}$ の上には，GL_2 の表現として，$\pi_{k,0}^{GL} := \otimes^k\pi_{1,0}^{GL}$ が働いている．他方，$V_{k,0}$ の分解可能な元 $\otimes_{1\leq j\leq k}v_j$ $(v_j\in V_{1,0})$ に対して，$\sigma\in\mathfrak{S}_k$ の作用を

$$\rho_k(\sigma)\big(\otimes_{1\leq j\leq k} v_j\big) := v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes v_{\sigma^{-1}(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(k)} \tag{5.30}$$

とおけば，k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の線形表現 ρ_k が得られる．我々は，証明なしで次の事実を列挙しておく．

命題 5.11. (i) GL_2 の k 次テンソル積表現 $\pi_{k,0}^{GL}$ と k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の表現 ρ_k とは互いに可換である： $\rho_k(\sigma)\cdot\pi_{k,0}^{GL}(g)=\pi_{k,0}^{GL}(g)\cdot\rho_k(\sigma)$ $(g\in GL_2, \sigma\in\mathfrak{S}_k)$.

(ii) $\widetilde{\mathcal{L}}_+^{\uparrow}$ の表現 $\pi_{k,0}^{GL}$ と $\mathfrak{S}_k$ の表現 ρ_k は双対(そうつい)関係にある．すなわち，$\pi_{k,0}^{GL}$ (または ρ_k) の相関作用素のなす環は $\rho_k(\mathfrak{S}_k)$ (または $\pi_{k,0}^{GL}(GL_2)$) によって生成される．

k 階のテンソル積の空間 $V_{k,0}$ 上に，直積群 $GL_2\times\mathfrak{S}_k$ の表現を $\big(\pi_{k,0}^{GL}\cdot\rho_k\big)(g,\sigma) := \pi_{k,0}^{GL}(g)\rho_k(\sigma)$ $(g\in GL_2, \sigma\in\mathfrak{S}_k)$ によって定義する．

命題 5.12. (i) 直積群 $GL_2\times\mathfrak{S}_k$ の表現 $\pi_{k,0}^{GL}\cdot\rho_k$ は重複度 1 で既約分解される．$\widehat{\mathfrak{S}_k}$ のある部分集合 $P_{2,k}$ が存在して，任意の $\rho\in P_{2,k}$ に対して，既約な多項式表現 $\pi_\rho^{GL}\in(GL_2)^\wedge$ が存在して，

$$\pi_{k,0}^{GL}\cdot\rho_k\cong\sum\nolimits_\rho \pi_\rho^{GL}\boxtimes\rho \quad (\rho\in P_{2,k})$$

となる．ここに，$\pi_\rho^{GL}\boxtimes\rho$ は π_ρ^{GL} と ρ との外部テンソル積 $(g,\sigma)\mapsto\pi_\rho^{GL}(g)\otimes\rho(\sigma)$ を表す．

(ii) こうして得られた既約表現 $\pi_\rho^{GL}, \rho\in P_{2,k}\subset\widehat{\mathfrak{S}_k}, k\geq 1$, の全体が群 GL_2 の有限次元の自明でない，既約な多項式表現の全体を (同値を除いて) 尽くす．

(iii) 群 GL_2 の有限次元の既約表現は，($\det h$ の指標 $\chi(\det h)$ の掛け算を除いて) どれかのテンソル積 $\pi_{k,n}$ の既約成分として現れる．そして，ある正則な既約表現 π と反正則な既約表現 π' のテンソル積 $\pi\otimes\pi'$ に同値である．

注意 5.2. $\mathfrak{S}_k$ の既約表現の同値類を，升目の個数が k 個のヤング (Young) の図形で表したとき，部分集合 $P_{2,k} \subset \widehat{\mathfrak{S}_k}$ は，深さが高々 2 の図形の全体である．

$\mathfrak{S}_k$ の 1 次元表現 $\rho_\varepsilon = \mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}}^{\varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$, に対応する表現空間 $\{ v \in V_{k,0} \ ; \ \rho_k(\sigma)v = \rho_\varepsilon(\sigma)v \}$ は，それぞれ対称テンソルの空間 $S^k V_{1,0}$, 反対称テンソルの空間 $\wedge^k V_{1,0}$ である．前者の上に働く表現は既約で，これを $S^k \pi_{1,0}^{GL}$ と書く．また，$\dim V_{1,0} = 2$ なので，$\wedge^k V_{1,0} = 0$ $(k \geq 3)$ であり，$\wedge^2 V_{1,0}$ の上に働く表現は，$h \mapsto \det h$ である．

上の GL_2 に関する話を $SL(2,\mathbb{C})$ に制限すると，かなりの退化が起こる．例えば，$\pi_\rho := \pi_\rho^{GL}|_{SL(2,\mathbb{C})}$ とおくと，ρ が違っても同値な π_ρ が得られることがある．テンソル積表現の既約分解から離れて，話を $SL(2,\mathbb{C})$ のすべての有限次元既約表現を得ることに限るならば，それは次のようになる．

定理 5.13 ($SL(2,\mathbb{C})$ の既約表現)**.**
(i) $SL(2,\mathbb{C})$ の有限次元の正則な既約表現は，どれかの対称テンソルの空間 $S^k V_{1,0}, k \geq 0$, 上に働く $S^k \pi_{1,0}$ に同値である ($k = 0$ のときは，自明表現)．

(ii) $SL(2,\mathbb{C})$ の任意の有限次元の既約表現は，ある正則な既約表現 π と反正則な既約表現 π' とのテンソル積に同値である．

(iii) $S^k \pi_{1,0}$ は，変数 x の高々 k 次の複素係数多項式のなす空間 $P_k[x]$ 上に働く次の表現 U_k に同値である：$h \in SL(2,\mathbb{C})$ に対し，$h^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ とおくと，

$$U_k(h)f(x) \ = \ (cx+d)^k f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \quad (f \in P_k[x]).$$

量子力学におけるスピノルの役割

$\pi_{k,n}$ とその複素共役 $\pi_{n,k}$ との直和 $\pi_{k,n} \oplus \pi_{n,k}$ に従う元を階数 (k,n) の**双スピノル**とよぶ．次節に出てくるディラック方程式の波動関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ は，階数 $(1,0)$ の双スピノルを値にとる $\boldsymbol{x} \in M^4$ の関数である．

階数 $(1,1)$ のスピノル上の $SL(2,\mathbb{C})$ の表現 $\pi_{1,1}$ と，固有ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の自然表現 π_1 との同型対応が，$SL(2,\mathbb{C})$ からの被覆写像を与えている．実際，まず，(5.26) の 2×2 型エルミート行列の空間 $\mathcal{Z}$ 上の $SL(2,\mathbb{C})$ の表現 D' は，階数 $(1,1)$ のスピノルの空間 $V_{1,1}$ 上の表現 $\pi_{1,1}$ と同型である (問題 5.12)．$\mathcal{Z}$ に基底 $\sigma_i, 1 \leq i \leq 4$, をとり，$Z = \sum_{1 \leq i \leq 4} x_i \sigma_i$, $g = D(h)$ とおけば，$g \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ で，

$$hZh^* \ = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \quad \text{とすると，} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$$\text{すなわち，} \quad (h\sigma_1 h^*, h\sigma_2 h^*, h\sigma_3 h^*, h\sigma_4 h^*) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) g. \tag{5.31}$$

これらの式は，ディラック方程式がローレンツ群に関して共変であることを示すのに重要な働きをする．さらに，被覆写像 D の必要な性質をまとめておこう．

命題 5.14. $Q = \mathrm{diag}(1,-1,1,1)$ とおくと，$h \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して，

$$D({}^t h) = Q\,{}^t D(h)\,Q^{-1}, \quad D(\overline{h}) = Q\,D(h)\,Q^{-1}, \quad D(h^*) = {}^t D(h). \tag{5.32}$$

証明. $h \in SL(2,\mathbb{C})$, $g \in O(3,1)$ に対しては，それぞれ，$h^{-1} = \varepsilon\,{}^t h\,\varepsilon$, $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $g^{-1} = J_{3,1}\,{}^t g\,J_{3,1}$, となる．そこで，$D(\varepsilon) = r_{31}(\pi) = \mathrm{diag}(-1,1,-1,1)$ に注意すれば，$D(h^{-1}) = D(h)^{-1}$ を変形して第 1 式が得られる．また，複素共役をとれば，$(\overline{\sigma_k})_{1\le k\le 4} = (\sigma_k)_{1\le k\le 4}\,Q$ となり，これから第 2 式を得る．

問題 5.10. 命題 5.11 (i) の可換性を計算によって示せ．

問題 5.11. 連結でない全斉次ローレンツ群 $\mathcal{L}$ の有限次元既約表現 π を部分群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ に制限したときにどんな分解の仕方をするか．どんな可能性があり得るか，論ぜよ．

問題 5.12. (5.26) の 2×2 型エルミート行列の空間 $\mathcal{Z}$ における $SL(2,\mathbb{C})$ の表現 D' は，階数 $(1,1)$ のスピノルの空間 $V_{1,1}$ 上の表現 $\pi_{1,1}$ と同型である (ただし，$\mathbb{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathcal{Z} \cong V_{1,1}$)．これを証明せよ．

5.5 ディラック方程式とその相対論的共変性

アインシュタインの特殊相対性理論は，ニュートン力学と (光を込めた) 電磁気の理論との矛盾を，時間・空間の考え方に革命的な変更を加えて解決したものである．1905 年の発表ののち，人々の多くの検討をへて,「物理法則は，ミンコフスキー空間の変換群としてのローレンツ群に関して共変でなければならない」という一般的な命題として受け入れられることになった．これは,「物理法則を書く方程式は，ローレンツ群による変換に対してしかるべく調和しているべし」ということであり，そこには必然的にローレンツ群の表現が現れる．

用語として，**共変である**というのは，ローレンツ群による変換につれて「しかるべき変換を受ける」ということであって，これは群の表現の言葉で適切に言い表される．他方，**不変である**というのは，もともとは「変換によって動かない量である」ということであるが，物理学上の用語としては「変換によって方程式の形が変わらない」という意味で「共変である」の同義語として用いられることも多い．

ハイゼンベルグ方程式も，さらにパウリ方程式も，ローレンツ群に対して共変ではない．ハイゼンベルグは 1926 年にすでに「量子力学の相対論化」の問題を論じている．パウリも，この点に気づいていて彼の方程式を，スピンの導入には成功したがいまだ中間的な段階のもの，と捉えていたようである．

他方，ディラック (P.A.M. Dirac, 1902–84; ノーベル賞，1933) は 1928 年にクライン–ゴルドン方程式を量子化したものをもとにして，ローレンツ変換に関して共変な方程式として，い

わゆるディラック方程式を導いた [Dir1]．これは電子を記述するものであるが，自然にスピン 1/2 が現れる．本節では，これについて説明しよう．

5.5.1 クライン-ゴルドン方程式とディラック方程式

特殊相対論では，エネルギー E について次の恒等式が示される．質点の質量を m, 運動量を $p={}^t(p_1,p_2,p_3)$，光速度を c，とすると，

$$E^2=m^2c^4+p^2c^2, \qquad p^2={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2,$$

ここで，$E\to i\hbar\,\partial/\partial t$, $p_k\to(\hbar/i)\partial/\partial x_k$ $(1\le k\le 3)$, と置き換えて，量子化し，$x_4=ct$ とおけば，波動関数 ψ に対する方程式

$$(\Box-\kappa^2)\psi=0, \qquad \Box:=\Delta-\frac{\partial^2}{\partial^2 x_4},\ \Delta:=\sum_{1\le i\le 3}\frac{\partial^2}{\partial^2 x_i},\ \kappa=\frac{mc}{\hbar}, \tag{5.33}$$

が得られる．これは，**クライン-ゴルドン** (Klein-Gordan) **方程式**とよばれ，すべての自由粒子 (外の電磁場がない) の波動関数が満たすべきものとされる．

ディラックは，パウリ方程式がスピンの導入には成功したが，相対論的共変性をもたせるのには失敗したことを受けて，この 2 つの要求を同時に満たす新たな方程式を (5.33) から導いた．そのために，波動関数としては，4 成分の (すなわち，$\mathbb{C}^4$ の値をとる) M^4 上の関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})={}^t(\psi_1(\boldsymbol{x}),\psi_2(\boldsymbol{x}),\psi_3(\boldsymbol{x}),\psi_4(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2,x_3,x_4)$, をとり，方程式としては各 x_k に関して 1 次であって，それを 1 つの因子として 2 次のクライン-ゴルドン方程式が 1 次の方程式の積に分解されるものを求め，行列を係数とする次の方程式を得た．4×4 型の正方行列 $\gamma_k, 1\le k\le 4$, で反交換関係

$$\gamma_j\gamma_k+\gamma_k\gamma_j=2g^{jk}\ \ (=2g^{jk}E_4), \qquad (g^{jk})_{1\le j,k\le 4}=-J_{3,1}, \tag{5.34}$$

を満たすもの (**ディラックのガンマ行列**) をとり，

$$(S+\kappa)\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}, \qquad S=\sum_{1\le k\le 4}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ \ \kappa=\frac{mc}{\hbar}, \tag{5.35}$$

とおいたのである．これを**ディラック方程式**とよぶ．

ガンマ行列の反交換関係 (5.34) において，$-J_{3,1}=\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ であるから，$\gamma_j\gamma_k+\gamma_k\gamma_j=0_4$ $(k\ne j)$, ${\gamma_j}^2=E_4$ $(1\le j\le 3)$, ${\gamma_4}^2=-E_4$, であるから，$S^2=\Box$. ゆえに，$\Box-\kappa^2=(S-\kappa)(S+\kappa)$，したがって，(5.35) の解 $\boldsymbol{\psi}$ に対して，

$$(\Box-\kappa^2)\boldsymbol{\psi}=(S-\kappa)(S+\kappa)\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}.$$

よって，クライン-ゴルドン方程式 (5.33) は‘因数分解’され，$\boldsymbol{\psi}$ の各成分 ψ_k は (5.33) を満たす．具体的には，γ_k は次のように選ばれている：σ_k を (4.3) のようにとり，0_2 を 2×2 型零行列として

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0_2 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0_2 \end{pmatrix} \quad (1 \le j \le 3), \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} -i\sigma_4 & 0_2 \\ 0_2 & i\sigma_4 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

ディラック方程式 (5.35) は，彼の電子論の基礎方程式であるが，今日(こんにち)でも電子の他に，スピン 1/2 の強い相互作用をしない μ 粒子などが満たすべき基本方程式，とされている．はじめディラックは，クライン-ゴルドン方程式は (5.35) によって完全に代替された，と考えたようだが，事実は異なっており，前者は場の量子論においてスピン 0 の自由場の基本方程式として現代も生きている．

ディラック方程式をシュレーディンガー方程式の形に書き直したときの作用素 H を**ディラックハミルトニアン**とよぶが，その具体形は (5.35)–(5.36) からすぐ求まる (読者の宿題とする)：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi} = H\boldsymbol{\psi}, \qquad H = \sum_{1\le k\le 3} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta m. \tag{5.37}$$

5.5.2 クライン-ゴルドン方程式の不変性

群 G が集合 X に作用しているとき，X 上の関数 f にも G が自然に作用する．**2.1** 節で見たようにその作用の公式 (2.1) は，$(R(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ $(x \in X, g \in G)$, である．ここでは，$G = SO_0(3,1), X = M^4, f = \psi$, の場合である．

さて，微分作用素 $\Box$ はダランベール (J. d'Alembert, 1717–83) の名を冠して**ダランベルシアン**とよばれるが，これは見るからに，群 $O(3,1)$ で不変，すなわち，

$$R(g)\cdot\Box = \Box\cdot R(g), \quad R(g)\cdot\Box\cdot R(g)^{-1} = \Box \qquad (g \in O(3,1)), \tag{5.38}$$

である．念のため，これを証明してみよう．

不変性の証明．簡略記号 $\partial_{x_k} = \partial/\partial x_k$ を用いると，$\Box = (\partial_{x_1})^2 + (\partial_{x_2})^2 + (\partial_{x_3})^2 - (\partial_{x_4})^2$ である．他方，$R(g)\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(g^{-1}\boldsymbol{x})$ において，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4), \boldsymbol{x}' = {}^t(x_1', x_2', x_3', x_4') = g^{-1}\boldsymbol{x}$, とおけば，$\boldsymbol{x} = g\boldsymbol{x}'$, したがって，

$$\boldsymbol{\partial}' = \boldsymbol{\partial}\, g, \quad \boldsymbol{\partial} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{x_4}),\ \boldsymbol{\partial}' = (\partial_{x_1'}, \partial_{x_2'}, \partial_{x_3'}, \partial_{x_4'}). \tag{5.39}$$

ゆえに，$-\Box = \boldsymbol{\partial} J_{3,1}\, {}^t\boldsymbol{\partial}$, $gJ_{3,1}\,{}^tg = J_{3,1}$, に注意して，

$$\Box' := \boldsymbol{\partial}' J_{3,1}\, {}^t\boldsymbol{\partial}' = \boldsymbol{\partial}\,(gJ_{3,1}\,{}^tg)\,{}^t\boldsymbol{\partial} = \Box. \tag{5.40}$$

この両辺を $R(g)\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(g^{-1}\boldsymbol{x})$ に作用してみれば，$R(g)\cdot\Box = \Box\cdot R(g)$ を得る．

5.5.3 ディラック方程式の共変性

2.1 節に与えられた，ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ に対する変換公式 (2.3) を思い出そう．まず，群 G が変換群として働く集合 X と G の表現 (ϖ', V') をとる．すると，X 上の V'-値関数 $\boldsymbol{f}$ に対する G の作用は，$h \in G$ の $x \in X$ への作用を $h \cdot x$ と書けば，次の公式で与えられる：

$$\big(T_{\varpi'}(h)\boldsymbol{f}\big)(x) = \varpi'(h)\big(\boldsymbol{f}(h^{-1} \cdot x)\big) \quad (x \in X,\ h \in G). \tag{5.41}$$

ここでは，$G = SL(2, \mathbb{C})$，$X = \mathcal{Z} \cong M^4$，$V' = \mathbb{C}^4$，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\psi}$，である．$h \in SL(2, \mathbb{C})$ の $Z \in \mathcal{Z}$ への作用では，$h \cdot Z = D'(h)Z = hZh^*$ であり，$g = D(h) \in SO_0(3,1)$ が存在して，$\phi(Z) = \boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ に対して，$\phi(hZh^*) = D(h)\phi(Z) = g\boldsymbol{x}$，である．

ディラック方程式 (5.35) において，$\boldsymbol{\psi}$ を変換 $T_{\varpi'}(h)$ で写して $T_{\varpi'}(h)\boldsymbol{\psi}$ に置き換えた式 $(S+\kappa)(T_{\varpi'}(h)\boldsymbol{\psi}) = 0$ がもとの (5.35) 式と同等であるとは，逆変換 $T_{\varpi'}(h)^{-1}$ を左から掛けて，もとにもどればよい．それは，$h \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して，

$$T_{\varpi'}(h)^{-1} \cdot S \cdot T_{\varpi'}(h) = S, \quad \text{すなわち,} \quad S \cdot T_{\varpi'}(h) = T_{\varpi'}(h) \cdot S \tag{5.42}$$

が成り立てばよい．これが，方程式が群 $SL(2, \mathbb{C})$ の変換の下で共変である，という意味である．$(S \cdot T_{\varpi'}(h))(\boldsymbol{\psi})(\boldsymbol{x}) = S\big(\varpi'(h)(\boldsymbol{\psi}(g^{-1}\boldsymbol{x}))\big)$ において，変数変換 $\boldsymbol{x}' = g^{-1}\boldsymbol{x}$ を行えば，1 階偏微分作用素の変換公式 (5.39) により，$\boldsymbol{\partial}' = \boldsymbol{\partial}\, g$ である．$S = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\, {}^t\boldsymbol{\partial}, \boldsymbol{\partial} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{x_4})$，と S を $1{\times}4, 4{\times}1$ 型行列の積の形 (あるいは，ベクトル $\boldsymbol{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ と $\boldsymbol{\partial}$ の内積の形) に書いてみれば分かりやすいが，(5.42) 式は，次のように書き直せる．4 次正方行列の空間 $M(4, \mathbb{C})$ の上で，変換

$$\Pi'(h) : Y \mapsto \varpi'(h) Y \varpi'(h^{-1}) \quad (Y \in M(4, \mathbb{C}),\ h \in SL(2, \mathbb{C})) \tag{5.43}$$

は $SL(2, \mathbb{C})$ の表現を与える．行列 $\gamma_j, 1 \leq j \leq 4$, を基底とする部分空間を $\langle \gamma_j \rangle$ と書くと，それは不変部分空間になって，この基底に関して表現 $h \mapsto g = D(h)$ を実現する．すなわち，(5.42) は次と同値である：$g = D(h)$ として，

$$(\Pi'(h^{-1})\gamma_1, \Pi'(h^{-1})\gamma_2, \Pi'(h^{-1})\gamma_3, \Pi'(h^{-1})\gamma_4) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) g^{-1}. \tag{5.44}$$

$V' = \mathbb{C}^4$ 上の表現 ϖ' は双スピノル表現 $\pi_{1,0} \oplus \pi_{0,1}$ と同値であって，被覆写像 $D : SL(2, \mathbb{C}) \to SO_0(3,1)$ を通しての $SO_0(3,1)$ の自然表現ではない．そして，上式を満たすように $\pi_{1,0} \oplus \pi_{0,1}$ と同値な表現 ϖ' の具体形を与えるのは容易ではない．ここではまず天下り式に計算結果から与えよう．部分群 $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ については，パウリ方程式の場合 (**4.3**, **4.4** 節) と平行して $\varpi'(u) = \varpi(u) \oplus \varpi(u) = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$，$\varpi(u) = u\ (u \in SU(2))$，とおく．

ついで，$SO_0(3,1)$ の (x_j, x_4)- 平面における双曲的回転よりなる一径数部分群 $v_{k4}(t), 1 \leq k \leq 3$, に被覆写像 D で写ってくる $SL(2, \mathbb{C})$ の一径数部分群を $a_k(t/2)$ とすると，定理 5.10

の直前に与えられている．表現作用素 $\varpi'(a_k(t/2)), 1 \le k \le 3$, をこの順番で掲げると，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t/2 & 0 & 0 & -\mathrm{sh}\, t/2 \\ 0 & \mathrm{ch}\, t/2 & -\mathrm{sh}\, t/2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{sh}\, t/2 & \mathrm{ch}\, t/2 & 0 \\ -\mathrm{sh}\, t/2 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\, t/2 \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t/2 & 0 & 0 & i\,\mathrm{sh}\, t/2 \\ 0 & \mathrm{ch}\, t/2 & -i\,\mathrm{sh}\, t/2 & 0 \\ 0 & i\,\mathrm{sh}\, t/2 & \mathrm{ch}\, t/2 & 0 \\ -i\,\mathrm{sh}\, t/2 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\, t/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t/2 & 0 & -\mathrm{sh}\, t/2 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\, t/2 & 0 & \mathrm{sh}\, t/2 \\ -\mathrm{sh}\, t/2 & 0 & \mathrm{ch}\, t/2 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\, t/2 & 0 & \mathrm{ch}\, t/2 \end{pmatrix}.$$

この公式は具体的ではあるが，統一性に欠ける．また，その証明の計算もややこしい．そこで，表現 (ϖ', V') と同値であり，もっと簡単な形の表現 (ϖ'', V'') を求めたい．そのために，まず次のことに注意する．$\pi_{0,1}(h) = \overline{h} = \varepsilon h^{*-1}\varepsilon$, $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, であるから，表現 $\pi_{0,1}$ は $\pi'_{0,1}(h) := h^{*-1}$ に同値である．したがって，

$$\varpi''(h) := \pi_{1,0}(h) \oplus \pi'_{0,1}(h) = \left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{*-1} \end{smallmatrix}\right)$$

ととる．すると，ϖ' から ϖ'' への同値写像 $U : V' \in v' \mapsto v'' = Uv' \in V'' = \mathbb{C}^4$, として，次のユニタリ行列 U によるものがとれる：

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1_2 & -1_2 \\ 1_2 & 1_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = {}^tU. \tag{5.46}$$

問題 5.13. U が同値を与えることを示せ． 〔ヒント：$U^{-1}\,\varpi''(h)\,U = \varpi'(h)$ を $h \in SU(2)$, $h = a_k(t/2)$ の場合にそれぞれ計算せよ.〕

この変換によって，V'- 値の波動関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ から V''- 値の波動関数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) := U(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}))$ にディラック方程式 (5.35) を書き直そう．$U \cdot (S + \kappa)\boldsymbol{\psi} = (U \cdot S \cdot U^{-1} + \kappa)\boldsymbol{\phi} = 0$ であるから，ディラックのガンマ行列 γ_k を U によって，$\Gamma_k := U\gamma_k U^{-1}$ と変換するべきである．すると，次式を得る：

$$\Gamma_k = \gamma_k = \begin{pmatrix} 0_2 & -i\,\sigma_k \\ i\,\sigma_k & 0_2 \end{pmatrix} \ (1 \le k \le 3), \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & -i\,\sigma_4 \\ -i\,\sigma_4 & 0_2 \end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

定理 5.15. (i) 波動関数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) := U(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}))$ に対するディラック方程式は，次で与えられる：

$$(S^U + \kappa)\boldsymbol{\phi} = 0, \quad S^U = \sum_{1 \le k \le 4} \Gamma_k \partial_{x_k}, \quad \partial_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{5.48}$$

(ii) 上の方程式は，ローレンツ群の普遍被覆群 $SL(2,\mathbb{C})$ の下(もと)で共変である．

$\boldsymbol{\phi} = {}^t(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)$ に対して，$\boldsymbol{\phi}_+ := {}^t(\phi_1,\phi_2)$，$\boldsymbol{\phi}_- := {}^t(\phi_3,\phi_4)$，とおいて，$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_+ \oplus \boldsymbol{\phi}_-$ と直和に分解する．これは，表現 (ϖ'', V'') の直和分解に即した分解である．すると，$h \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して，$g = D(h)$ として，

$$\big(T_{\varpi''}(h)\big(\boldsymbol{\phi}_+ \oplus \boldsymbol{\phi}_-\big)\big)(\boldsymbol{x}) \;=\; h\,\boldsymbol{\phi}_+(g^{-1}\boldsymbol{x}) \oplus h^{*-1}\boldsymbol{\phi}_-(g^{-1}\boldsymbol{x}) \tag{5.49}$$

と表現 $T_{\varpi''}$ が直和になり，またディラックの方程式 (5.48) は次になる：

$$\begin{cases} -i\big(\sigma_1\partial_{x_1} + \sigma_2\partial_{x_2} + \sigma_3\partial_{x_3} + \sigma_4\partial_{x_4}\big)\boldsymbol{\phi}_- \;+\; \kappa\boldsymbol{\phi}_+ \;=\; 0, \\ \;\; i\big(\sigma_1\partial_{x_1} + \sigma_2\partial_{x_2} + \sigma_3\partial_{x_3} - \sigma_4\partial_{x_4}\big)\boldsymbol{\phi}_+ \;+\; \kappa\boldsymbol{\phi}_- \;=\; 0. \end{cases} \tag{5.50}$$

定理の証明. (i) は読者の演習問題として残し，(ii) だけ証明する．

ディラック方程式 (5.35) の場合と同様に，$\Pi''(h)Y := \varpi''(h)Y\varpi''(h^{-1})$，$\varpi''(h) = \begin{pmatrix} h & 0_2 \\ 0_2 & h^{*-1} \end{pmatrix}$，$h \in SL(2,\mathbb{C})$，とおくと，$M(4,\mathbb{C})$ 上の表現を得るが，部分空間 $\langle\Gamma_k\rangle$ において，その基底 $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_4$ に関して，

$$(\Pi''(h)\Gamma_1, \Pi''(h)\Gamma_2, \Pi''(h)\Gamma_3, \Pi''(h)\Gamma_4) = (\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4)D(h)$$

が示されればよい．$4 = 2+2$ の分解に従ったブロック型の表示において，$\varpi''(h)$ は対角型であるから，(5.35) では，(1, 2) および (2, 1) ブロックを調べればよい．これらは (5.50) の上式，下式に対応し，係数 $-i, i$ を除けば，それぞれ次の等式になる：

$$(h\sigma_1h^*, h\sigma_2h^*, h\sigma_3h^*, h\sigma_4h^*) = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)D(h), \tag{5.51}$$

$$(h^{*-1}\sigma_1h^{-1}, h^{*-1}\sigma_2h^{-1}, h^{*-1}\sigma_3h^{-1}, -h^{*-1}\sigma_4h^{-1}) = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,-\sigma_4)D(h). \tag{5.52}$$

第 1 の等式は (5.31) 式そのものである．第 2 の等式の左辺と右辺はそれぞれ，$-(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)D(h^{*-1})J_{3,1}$，$-(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)J_{3,1}D(h)$，となる．したがって，証明すべきは，等式 $D(h^{*-1})J_{3,1} = J_{3,1}D(h)$ である．他方，命題 5.14 によって，$D(h^{*-1}) = {}^tD(h)^{-1}$．また，$g = D(h) \in O(3,1)$ だから，$g^{-1} = J_{3,1}{}^tgJ_{3,1}^{-1}$．これらから，求める等式が得られる．

□

上で見たように U を使って書き換えたディラック方程式 (5.48) に対しては，

(1) 表現 $\varpi''(h)$ が対角型で見やすい ((5.49) を見よ．また，$SU(2)$ では，$\varpi''(u) = \pi(u)\oplus\pi(u)$)，

(2) $SL(2,\mathbb{C})$ の下での共変性の証明が見やすい (定理の証明)，

(3) クライン - ゴルドン方程式との関係が簡明である ((5.50) を見よ)，

といった利点がある．実は，もともとのディラック方程式 (5.35) で，(1)，(2) に関する計

算が非常にややこしかったので，その検算のためにもこちらでの計算を実行してみたのである．(物理書における共変性の証明については，例えば [長島，**3.5**] 参照.)

群の表現の役割，方程式の共変性との関係，などを具体的な計算によって，体得してもらうことを目的として，ここではかなり詳しくゆっくりと話を進めた．読者の感想や如何に.

特殊相対性理論の誕生の機縁となった，電磁場の理論については，マクスウェルの方程式とそのローレンツ群の下での共変性を [平井 II, 第24章] で解説してある.

5.5.4 古典力学の角運動量と量子力学の軌道角運動量およびスピン

質量 m の質点が速度 $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ で運動しているときの運動量は $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ である．原点 O に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とすると，O に関するその質点の**角運動量**とは，ベクトル積 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ のことである．その大きさは O に関する面積速度の $2m$ 倍である.

量子力学においては，**軌道角運動量**を表す演算子は，運動量の演算子 $\boldsymbol{P} = -i\hbar\nabla = (-i\hbar\partial/\partial x_1, -i\hbar\partial/\partial x_2, -i\hbar\partial/\partial x_3)$ を用いて，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}$ と与えられる，すなわち，

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2},\ x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\ x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right). \tag{5.53}$$

注意 5.3. 3次元ベクトル同士のベクトル積は，次の2条件を満たす双1次の積である：(i) $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{e}$，(ii) 単位座標ベクトルを，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とすると，$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$，および，3つの添数を巡回的に回した式が成立する.

この軌道角運動量の演算子 $\boldsymbol{L}$ の成分を $L_{x_1}, L_{x_2}, L_{x_3}$，と書くと，それらは**3.7** 節の回転群 $SO(3)$ の表現 R に対する無限小作用素の表示式 (3.56) から分かるように，$R(X_{23}), R(X_{31}), R(X_{12})$，と対応している．したがって，次の交換関係を満たすことが分かる：

$$[L_{x_1}, L_{x_2}] = -i\hbar L_{x_3}, \quad [L_{x_2}, L_{x_3}] = -i\hbar L_{x_1}, \quad [L_{x_3}, L_{x_1}] = -i\hbar L_{x_2}\,. \tag{5.54}$$

よって，$\boldsymbol{L}$ の大きさを表す演算子を L とすると，$L^2 = L_{x_1}^2 + L_{x_2}^2 + L_{x_3}^2$ と各 L_{x_k} とは互いに可換である (**4.5** 節，注意 4.4 参照)．このことは，L と例えば L_{x_3} とは，観測によって同時に決定し得ることを意味する．そして，第3章 **3.7** 節の結果をこの局面に翻訳すると，軌道角運動量の大きさ L とその1成分のとり得る値は，$\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar\ (\ell = 0, 1, 2, \ldots)$ および，これに対して $m\hbar\ (-\ell \le m \le \ell)$ の $2\ell+1$ 個の可能性がある.

量子的粒子には，軌道角運動量の他にスピン角運動量とよばれる角運動量があるが，これは粒子自身が広がりをもたなくても現れるものであって，粒子の波動関数によって決まる．この2種の角運動量の和を全角運動量という．ディラック方程式を満たす粒子ではそれは次

式で与えられる：

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + (\hbar/2)\,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\widetilde{\sigma_1},\, \widetilde{\sigma_2},\, \widetilde{\sigma_3}), \quad \widetilde{\sigma_k} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0_2 \\ 0_2 & \sigma_k \end{pmatrix}. \tag{5.55}$$

$\boldsymbol{S} = (\hbar/2)\,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ は電子の**スピン角運動量**を表す．また，(5.37) 式のディラックハミルトニアン H に対して，$\boldsymbol{L}$ は H と可換ではないので保存量ではないが，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ は H と可換になるので保存量である．

また，ディラックはスピン磁気能率やトーマス因子もこの方程式から自然に出てくることを示した．

問題 5.14. $\boldsymbol{L}$ と H は可換でないこと，および，$\boldsymbol{J}$ と H は可換であること，を示せ．

◆閑話休題 10 ◆

パウリ方程式の波動関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = {}^t(\psi_+(\boldsymbol{x}), \psi_-(\boldsymbol{x}))$ は (1, 0) 型スピノルの値をとる $E^3 \times \mathbb{R}$ 上の関数である．ただし，ここでは，群はユニタリ群 $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$ に制限されている．また，ディラック方程式の波動関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = {}^t\big(\psi_1(\boldsymbol{x}), \psi_2(\boldsymbol{x}); \psi_3(\boldsymbol{x}), \psi_4(\boldsymbol{x})\big)$ は，$(1, 0) \oplus (0, 1)$ 型の双スピノルを値にとる M^4 上の関数である．

これらはスピン 1/2 をもつ粒子 (電子など) を記述する方程式である．時空の空間 M^4 の変換群であるローレンツ群で変換される量 (量子力学ではベクトル，テンソルとよぶ) だけでは不足であって，ローレンツ群の 2 価の表現によって変換されるスピノルなる量を導入しなければならなかったことは，当時活躍していた量子力学の研究者をはじめとして，物理学者にとって，非常な驚きであったらしい．

朝永振一郎著『スピンはめぐる』の「第 7 話 ベクトルでもテンソルでもない量 — スピノル族の発見と物理学者の驚き —」において，スピンという共変量の発見と導入についての物理学者の側(がわ)からの述懐が，終わり近くに約 1 頁半にわたって述べてある．(ここでの用語では，ベクトル，テンソルとは，時空の空間 M^4 の変換群であるローレンツ群の 1 価の表現に従う共変量のことである.)

> 「共変量の仲間に迎えられたこの新しい量は，エーレンフェストによってスピノルと名付けられました．(中略) 長い間，実に長い間，このような共変量が存在しようとは物理学者のだれ一人考えていなかったことです．第 3 話でちょっと名前を引用したダーウィンは，ディラック論文の直後に論文を書き，そのなかでディラック方程式をなんとかしてテンソル形にしたいという自分の試みの失敗を述べ，···· (中略)
>
> またエーレンフェストも，1932 年に書いた小さな論文のなかで，次のように言っています．“ ····· 等方的な三次元空間やミンコウスキの四次元世界の中に神秘的なスピノル族という種族が棲んでいるという薄気味悪い報告が，相対論が世に出て (テンソル算法が生まれて) から 20 年たって，パウリやディラックの仕事があらわれるまで，どこのだれからも出されなかったとは，どう考えてもおかしなことだ” と．
>
> 今日の話はたいへん数学的で，数式ばかり多くて恐縮でした．しかし，なにしろ相手は “相対論が出てから 20 年” もの間，誰にもしっぽをつかまえられなかった「神秘的な種族」なのです．(以下略)」

現代の我々は，この述懐にぴったり感情移入するにはすでに多くのことを知りすぎているかも知れない．しかし，先人の飾らぬ感懐にいささか感ずるところはあろう．我々自身は，ここにとどまらずに先人を超えて先へ先へと進むのがよろしかろう．

5.6 有限次元表現から無限次元表現への飛躍

5.6.1 物理系の対称性の群と無限次元表現への道

物理学におけるひとつの系に対して，その対称性はひとつの群 G をなし，その系を解析するのに，対称性の群 G の作用や表現が重要な役割を果たす．例えば，系を記述する方程式は，G の下で不変もしくは共変でなければならない．このことは，数学における群の表現の研究に対する大きな動機づけのひとつである．

逆に，系に対する共変性は，ときには非常に大きな働きをする．ニュートン力学において，ユークリッド運動群の下での共変性がいかに重要な役割を果たしているかについては，[平井 II, 第18章] に詳しく述べた．また，ディラックは彼の方程式を導いた論文 (1928) で，“電子に対して，相対論の要請と変換理論の要請とをともに満たす最も簡単な方程式を考えると，スピン現象は，それ以外何の仮定もしないで，すべてちゃんと導き出せる”と書いている．

本書では，第3章以降，量子力学や，アインシュタインの特殊相対論において，回転群 $SO(3)$ やローレンツ群 $SO_0(3,1)=\mathcal{L}_+^\uparrow$，あるいはそれらの普遍被覆群 $SU(2), SL(2,\mathbb{C})$ の下での共役性について述べてきたが，目下までのところ，表(おもて)に現れてきたのは有限次元の群の表現 (テンソルやスピノルなど) であった．しかし，波動関数 $\psi(x), x={}^t(x_1,x_2,x_3)$, に働く表現 R (第3章) や 2 成分ベクトル値波動関数 $\boldsymbol{\psi}(x)$ に働く T_ϖ (第4章)，また 4 成分ベクトル値波動関数 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2,x_3,x_4)$, に働く表現 $T_{\varpi'}$ (第5章) は，もともと無限次元の関数空間を相手にしている．

回転群やユニタリ群の場合には，これらの表現は有限次元の既約表現の直和に分解される (定理 3.5–3.6，定理 4.8 参照)．しかし，ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ や $SL(2,\mathbb{C})$ の場合には，事情が全く違う．ディラック方程式 (5.35) の1階の微分作用素 S は，$SL(2,\mathbb{C})$ の作用 $T_{\varpi'}(h)$ と可換であるから，S の固有値 λ の固有空間

$$V(S,\lambda) := \{\,\boldsymbol{\psi}\;;\;S\boldsymbol{\psi}=\lambda\boldsymbol{\psi}\,\}$$

は $T_{\varpi'}(h)$ で不変である．したがって，$V(S,\lambda)$ に制限すると，一般には無限次元の $SL(2,\mathbb{C})$ の表現が現れる ($\boldsymbol{\psi}$ 全体の空間をどう設定するかによるが)．

さて，無限次元の表現が自然に現れること，それらを正当なものとして受け入れねばならぬこと，等々の原因は主として「群が局所コンパクトではあるが，コンパクトではない」ことに求められる．ここに，ディラックが量子力学における考察から，世界で初めてローレンツ群の無限次元のユニタリ表現に注目し，ウイグナー (E. Wigner, 1902–1995; ノーベル賞, 1963) などにその研究を勧めた理由がある．このとき，表現の「ユニタリ性」は，「波動関数の確率解釈」などの物理的要請から出てきたものであり，「無限次元」というのは，「有限次元の既約ユニタリ表現は自明なものしかない，すなわち，テンソルやスピノルによる (自明でない) 表現はすべてユニタリでない」という理由による．もちろん，既約な無限次元ユニ

タリ表現が存在することは証明を要する．

これはまた，数学者が「群の無限次元の表現」(最初はユニタリ表現，のちには非ユニタリな表現も込めて) の研究へと挑戦的に踏み込んでいく最初のそして決定的な動機を与えたのである．物理学者が先んじて手をつけ，それに勇気づけられて数学者がより広汎な研究を開始したのだが，その辺の機微については，[平井 II, 第 23 章] に詳しい．論文が引き続いて出たのは，第 2 次世界大戦後だが研究自体は戦争中に始まっていたのであろう．

さて，本書では，前著 [平井 II] と内容が重なるのを避けて,「無限次元表現への飛躍」に関する機微は省略し，次節で無限次元表現について説明することとする．

5.6.2 群の表現と物理法則の共変性についてのまとめ

次節に移る前に，いままでの「群の表現と物理学」の話の総まとめをしておきたい.『数学辞典』や『理化学辞典』は各項目の容量が限られているので，そこでの叙述は端的に的確にまとめられている．それだけにその短い文章の内容を理解するには読者にそれだけの素養を要求する．ここまで学習を続けてこられた読者諸君には，次の部分的な引用をも体験的に理解して頂けるであろう．

1.「諸種の物理量の，2 つの定常状態間の行列要素を求めるのに，表現論が用いられる．物理量は座標変換にさいして一定の法則で変換される．(後略)」([数学，量子力学]) (ここで，「表現論」＝「群の表現の理論」)

2.「特殊相対性理論においては，$\mathcal{L}_+^\uparrow$ の元 g は系の対称性を表す.」([数学，ローレンツ群])

3.「特殊相対性理論においては，物理量はミンコフスキー空間の時空のテンソル (スカラー，ベクトルなどを含む) によって表現され，物理法則はローレンツ変換に対するテンソル方程式で書かれねばならない．この要求は，特殊相対性理論を数学的に表現したものとみられる．(中略) 以上を数学的に要約すると，特殊相対性理論は‘ローレンツ群に対する不変式論’であるということができる．(以下略)」([数学，相対性理論])

4.「相対論的物理法則はローレンツ群で変換されるスピノルやテンソルで表される物理量の間の共変的な関係式で与えられる.」([理化学，ローレンツ変換])

5.「特殊相対論では物理法則はすべてローレンツ群の表現の基底を用いて表され，スカラー，ベクトル，テンソルのほかにスピノルが現われる.」([理化学，ローレンツ群])

5.7 無限次元ユニタリ表現と誘導表現

5.7.1 リー群の有限次元の表現の理論とその応用

数学的な面からみれば，カルタン (É. Cartan, 1869–1951) は，1910 年代には，微分幾何学的方法を用いて，有限次元単純リー環の分類や構造の研究を終わり，ついで既約表現の分類

を完成している．これは，対応するリー群，とくに半単純リー群といわれるもの，の有限次元表現の理論が原理的にはでき上がったことになる．しかし，原理はできても，個別的にやるべきことはいくらでも残っているわけである．(**注**：単純複素リー環の分類については，**7.2.3** の「トピックス1」を参照，単純実リー環の分類については，**8.1.1** の「トピックス3」を参照.)

ワイル (1885–1955) は，1925年に，いわゆるコンパクトな古典型の群について，既約表現の分類，既約指標の決定，自然表現のテンソル積表現の既約分解と対称群の表現との関係，などについての結果を発表した．その後，これは，相互に深く関連する不変式論を込めて，1冊の本にまとめられ，初版が1939年に出て，版を重ねて，現在に至るまで読みつがれている．それは，私も熱心に読んだ本で，

H. Weyl, *The Classical Groups* (副題：*Their Invariants and Representations*), Princeton University Press,

である．その後も，現在に至るまで新しい問題の展開とともに有限次元表現の研究も続いている．

自然科学への応用についても，有限群の表現とともにリー群の有限次元の表現は，結晶学，化学や，量子力学，素粒子論などの物理学に対して，ますます活発にその研究が進んでいる．

5.7.2 非斉次ローレンツ群の既約ユニタリ表現の構成法の一般化

ウィグナーの次の論文はディラックの示唆を受けて，世界で初めて，既約な無限次元ユニタリ表現を取り扱ったものである：

A. Wigner, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Annals of Mathematics, **40**(1939), 149-204.

その Introduction の最後の謝辞のところを引用すると，

Acknowlegements. The subject of this paper was suggested to me as early as 1928 by P. M. A. Dirac who realized even at that date the connection of representations with quantum mechanical equations. I am greatly indebted to him also for many fruitful conversations about this subject, especially during years 1934/35, the outgrowth of which the present paper is.

I am indebted also to J. v. Neumann for his help and friendly advice.

無限次元既約ユニタリ表現への入門として，この論文の主要結果を現代風にまとめてみよう．非斉次ローレンツ群 $G := \mathcal{P}_+^\uparrow$ は，平行移動の部分群 (＝並進群) $A := \mathbb{R}^4$ と斉次ローレンツ群 $L := \mathcal{L}_+^\uparrow$ との半直積 $G = A \rtimes L$ である．

一般には，局所コンパクト群 G が可換群 A と閉部分群 L との半直積 $A \rtimes L$ となっている場合に適用できる方法をウィグナーが発明した．可換群 A のポントリャーギン双対 $\widehat{A}$ とは A の連続なユニタリ指標全体のなす群，であるが，A 上の関数を $\widehat{A}$ の元によって展開する「一般化されたフーリエ変換」の理論を基礎にしている．(ウィグナーの場合には古典的

なフーリエ変換が基礎である.) その方法を説明する.

群 A には, L が共役によって $\ell \cdot a := \ell a \ell^{-1}$ と作用するので, その双対 $\widehat{A}$ にも自然に作用することになる: $\ell \cdot \chi := \chi(\ell^{-1} \cdot a)$. (これを coadjoint action という.) $\widehat{A}$ の L による軌道の集合を $\widehat{A}/L$ と書く. 1つの軌道 Ω をとり, その代表元 $\chi \in \Omega$ をとる. そして, χ の固定部分群 $L(\chi) := \{\ell \in L\,;\, \ell \cdot \chi = \chi\}$ をとる.

半直積群に対する表現の構成方法:

1. 対(つい) $(\chi, L(\chi))$ に対し, G の部分群 $H := A \rtimes L(\chi)$ をとる. $L(\chi)$ の既約ユニタリ表現 π をとる. H の既約ユニタリ表現が $(\chi \cdot \pi)\big((a,\ell)\big) := \chi(a)\pi(\ell), (a,\ell) \in H,$ とおいて得られる. (これが表現になっていることを証明せよ.)

2. 部分群 H から G へ上の表現をユニタリ誘導すると, ユニタリ表現 $\Pi(\chi,\pi)$ を得る:

$$\Pi(\chi,\pi) := \mathrm{Ind}_H^G(\chi \cdot \pi).$$

多くの場合に, この表現が既約になり, また同値関係を除いてすべての既約ユニタリ表現がこうして得られる.

5.7.3 誘導表現の方法

ここではやや先走って, 形式的ではあるが, **誘導表現**の一般論を述べておく. 初心者は一応読んでおく, ということでよかろう.

局所コンパクト群 G とその閉部分群 H に対して, H のユニタリ表現 ϖ (変形パイ) を G に (ユニタリ) **誘導する**とは, 次の手続きに従って, G のユニタリ表現 $\Pi = \mathrm{Ind}_H^G \varpi$ を構成することである.

Π の表現空間. ϖ の表現空間を V とし, そこでのノルムを $\|v\|, v \in V,$ と書く. Π の表現空間を作るには, まず, G 上の V-値連続関数 $f(g)$ で次の条件を満たすもの全体のなすベクトル空間 $\mathcal{C}_\varpi$ をとる:

(F1) $f(gh) = \varpi(h)^{-1}\big(f(g)\big) \quad (g \in G, h \in H),$

(F2) 集合 $\{g \in G\,;\, f(g) \neq 0\}$ は H-右剰余類の空間 G/H で相対コンパクト.

$f \in \mathcal{C}_\varpi$ に対して, ϖ がユニタリなので, $\|f(gh)\|_V = \|\varpi(h)\big(f(g)\big)\|_V = \|f(g)\|_V$ となり, これは $\Omega := G/H$ 上の台がコンパクトな連続関数となる. 元 g を含む剰余類 gH を $\dot{g} = \omega$ と書くと, g_0 の作用は $g_0\dot{g} = g_0 \cdot \omega = g_0(gH) = (g_0 g)H = (g_0 g)^{\cdot}$ となる. 均質空間 Ω の上のルベーグ測度 μ で G の作用について準不変 (例 2.5 参照) であって, ヤコビアン

$$J(\omega, g_0) := \frac{d(g_0\mu)}{d\mu}(\omega) = \frac{d\mu({g_0}^{-1} \cdot \omega)}{d\mu(\omega)} \quad (\omega \in \Omega, g_0 \in G)$$

が ω につき連続になるものが存在する．この μ を用いて，$f \in \mathcal{C}_\varpi$ のノルムを

$$\|f\|^2 := \int_{G/H} \|f(g)\|_V^2 \, d\mu(\dot{g}) \quad (\dot{g} = gH \in G/H) \tag{5.56}$$

によって導入する．このノルムに関して $\mathcal{C}_\varpi$ を完備化するとヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を得る．これが，誘導表現 Π の表現空間である．

Π の表現作用素． 表現作用素 $\Pi(g_0)$ は次式によって与えられる：

変換公式 3： $$(\Pi(g_0)f)(g) := \left(\frac{d\mu(g_0^{-1}\cdot\omega)}{d\mu(\omega)}\right)^{1/2} f(g_0^{-1}g) \quad (g_0, g \in G). \tag{5.57}$$

この変換公式から，$\|\Pi(g_0)f\| = \|f\|$ が分かる．さらに，これでちゃんとユニタリ表現が得られていることを知るには，(i) $\mathcal{H}$ が確かにヒルベルト空間になっていること，(ii) 写像 $G \ni g_0 \mapsto \Pi(g_0)f \in \mathcal{H}$ が連続であること，などを証明しなければならない．これは，難しくはないがやや煩雑となるので，ここでは省略する．また，誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G \varpi$ の別の形の実現として，G 内に G/H の適当な断面 X をとって，X 上のある L^2 空間を表現空間にとることもできる．その場合は，上の変換公式 3 は，(2.21) の変換公式 2 の一般化と捉えられる．

5.7.4 非斉次ローレンツ群の既約ユニタリ表現

ウィグナーの非斉次ローレンツ群の場合には本来の意味のフーリエ変換が用いられる．そして，**5.7.2**〜**5.7.3** の方法によって，既約表現が得られ，それが互いに同値でない既約ユニタリ表現すべてを与える．

$A = \mathbb{R}^4$ のポントリャーギン双対 $\widehat{A}$ は次の意味で $\mathbb{R}^4$ に同型である．$x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$, $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4$, に対して，

$$\chi_\xi(x) := e^{i\langle x, \xi\rangle}, \quad \langle x, \xi\rangle := \textstyle\sum_{1\le j\le 4} x_j \xi_j,$$

とおけばよい．元 $\ell \in L = \mathcal{L}_+^\uparrow$ の $x \in A$ への作用は行列とベクトルの積 ℓx である．その双対の作用として，$\xi \in \widehat{A}$ に対しては，$\ell \cdot \xi = {}^t\ell^{-1}\xi$ である．実際，$\langle \ell x, \xi\rangle = \langle x, {}^t\ell\xi\rangle$ であるから．

$\widehat{A} \cong \mathbb{R}^4$ に L の作用で不変な内積 $\langle \xi, \xi\rangle_L = -\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2$ を導入する．例 1.8 で，$n = 3$ とおいた場合は，$SO_0(3,1) = \mathcal{P}_+^\uparrow$ が $M^4 \cong \mathbb{R}^4$ に，$x \mapsto \ell x$ によって作用していたが，今回は，$\xi \mapsto {}^t\ell^{-1}\xi$ によって作用している．${}^t\ell^{-1} = J_{3,1}\ell J_{3,1}^{-1}$ であるから，L による軌道分解の様子は両者において全く同様である．例 1.8 から引用すると，軌道は次の 4 種類がある：

(1) 二葉双曲面 L_R^ε, (2) 一様双曲面 S_R, (3) 光錐 C^ε, (4) 原点 $\{O\}$.

これらの各軌道に代表元 ξ をとり，指標 χ_ξ の（したがって，ξ の）固定部分群 $L(\chi_\xi) = L(\xi)$ を決めておこう．ξ の空間の単位座標ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ と書く．

(1) 代表元 $\xi = \varepsilon Re_4 = {}^t(0,0,0,\varepsilon R)$，固定部分群 $L(\xi) = \{\ell \in SO_0(3,1)\,;\ell e_4 = e_4\} \cong SO(3)$．被覆写像 D の原像は $SU(2)$ である．それらの既約表現の分類と構成は，第 3 章，第 4 章で分かっている．

(2) 代表元 $\xi = Re_2 = {}^t(0,R,0,0)$，固定部分群 $L(\xi) = \{\ell \in SO_0(3,1)\,;\,\ell e_2 = e_2\} \cong SO_0(2,1)$．被覆写像 D の原像は $SL(2,\mathbb{R})$ である．

(3) 代表元 $\xi = {}^t(0,0,\varepsilon,\varepsilon)$，固定部分群 $L(\xi) \cong SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ であるが，その具体形は次のように与えられる．$SO(2)$-成分，$\mathbb{R}^2$-成分はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} u & 0_2 \\ 0_2 & 1_2 \end{pmatrix}\,;\quad n(y) := \begin{pmatrix} 1_2 & y & y \\ -{}^t y & 1-\|y\|^2/2 & -\|y\|^2/2 \\ {}^t y & \|y\|^2/2 & 1+\|y\|^2/2 \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

(ここに，$u \in SO(2)$, $y \in \mathbb{R}^2$) のなす部分群である．$n(y)n(y') = n(y+y')$ $(y, y' \in \mathbb{R}^2)$ であるから，$n(y) \mapsto y \in \mathbb{R}^2$ が同型対応を与える．

(4) 代表元 O の固定部分群は斉次ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ 全体である．その D による原像は $SL(2,\mathbb{C})$ である．

問題 5.15. 上の (1)，(2)，(3) それぞれの場合に固定部分群 $L(\xi)$ を計算してみよ． 〔ヒント：${}^t\ell^{-1}\xi = \xi$ は，${}^t\ell^{-1} = J_{3,1}^{-1}\ell J_{3,1}$ であるから，${}^t\ell\xi = \xi$，または，$\ell\xi' = \xi'$，$\xi' = J_{3,1}\xi$，に同値である.〕

5.7.5 斉次ローレンツ群の既約ユニタリ表現

数学の側からの無限次元ユニタリ表現への嚆矢(こうし)としては，1943 年に I.M. Gelfand - D.A. Raikov [GeRa] が「局所コンパクト群に対しては，十分たくさんの既約ユニタリ表現が存在する」ことを証明した．すなわち，そのような群 G の任意の元 $g \neq e$ に対して，既約ユニタリ表現 ρ が存在して $\rho(g) \neq I$ (恒等作用素) となる．これは「ユニタリ表現という分野が，十分肥沃な開拓地を与えるであろう」との希望を与える結果である．

1945 年には，ディラックが，初めて斉次ローレンツ群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ の (既約に近い) 無限次元表現を与えた．彼が expansor representations とよんだこれらの表現は，時空 4 次元の座標 x_1, x_2, x_3, x_4 に関して，x_4 については負冪(べき)，他の x_j については非負冪の無限冪級数の空間の上に与えられている．彼は物理的な応用も論じている．

1947 年には 3 編の論文が出版された．I.N. Gelfand - M.I. Naimark が，$SL(2,\mathbb{C})$ の既約表現を分類・構成し [GeNa]，V. Bargmann が，$SL(2,\mathbb{R})$ について同様の仕事をし [Barg]，Harish-Chandra は，リー環 $\mathfrak{so}(3,1)$ の代数的既約表現を与え，‘ユニタリ’なものを特徴づけた (これは群の表現の無限小形である)[Hari].

彼らはいずれも，ディラックからの影響を受けており，彼の expansor representations の既約分解を与えている．

次章では，$SO_0(2,1)$ の2重の被覆群 $SL(2,\mathbb{R})$ について，複素上半平面やその上の保型関数との関連において，その既約表現が論じられる．

◆閑話休題 11 ◆

真面目な冗談話をひとつ．昭和30年代後半は私が院生や助手だった頃だが，そのころ友人から聞いた話．京大理学部の理論物理の若手の間では，群論の必要性が認識されていたが，あまり群論の勉強にのめり込むと難しくなって悩むことになり，顔は青白く陰鬱になって一見して分かるようになるとのことで，そうした場合，回りの人たちは，「とうとう彼もワイル氏病にかかった」と言い合ったとのことである．

少々解説が必要だが，ワイル (Hermann Weyl) は『群論と量子力学』という本も書いた (注意 4.1) が，勉強すべきとされた本格的な群論の本は **5.7.1** で触れた『古典群』であった．この本は含蓄があって読み込んでいけば滋味が出てくるが，なかなか読みこなせない難物である．専門家と自負する私にとってもそうだから物理系の人にとってはますます大変であったろう．

他方，ワイル氏病 (ワイル病) は，1886年にドイツの医師ワイル (Adolf Weil) が発見し，1915年に日本人がその病原体を特定したもので，現在の名前は黄疸出血性レプトスピラ症である．病原体を保有するネズミ等の尿に触れると経皮感染する．4 ～ 14日の潜伏期があり，病初期には重症感がないが，治療開始の遅れによっては重症になる．発病後5日以内に適正な治療が行われれば，致死率は10％以下であるが，それ以後では 20 ～ 30％にもなる．

同じワイルという名前に掛けた冗談であるが，冗談ばかりとも言えないそれとない真剣さが感じられる (治療が遅れれば致死率 30％!!!)．

ちなみに，表現論にも因縁浅からぬ有名な数学者にフランスのヴェイユ (André Weil, 1906–1998) がいるが (第 II 部参照)，名前を省略形に書くと，A. Weil となり，ワイル病の医師ワイルと同じとなる，くわばらくわばら．

第6章 上半平面・単位円板での分数変換と保型関数・保型形式

無限次元ユニタリ表現への導入としては，群 $SL(2,\mathbb{R})$ をとる．この群はなかなか興味ある対象であって，空間次元が 2 次元のミニ・ローレンツ群 $SO_0(2,1)$ の 2 重の被覆群であり，また複素上半平面 $\mathfrak{H}$ の分数変換として，正則的変換の群を 2 重に被覆する．さらに，その既約ユニタリ表現には，いわゆる離散系列の表現が現れる．また，$\mathfrak{H}$ 上の保型関数・保型形式との密接な関係もある．こういうわけで，具体例として取り上げるのに相応しい．

ここでは，$G = SL(2,\mathbb{R})$ の離散的部分群 Γ に関する保型関数・保型形式との関係から入る．そして，それが $L_2(\Gamma\backslash G)$ 上の右移動による G の表現と密接につながっていることを示す．$L_2(\Gamma\backslash G)$ 上の表現を解析するのに，$L_2(G)$ 上の右正則表現 R の既約分解 (プランシュレルの公式) を持ち出す．R の無限小形 dR を微分作用素によって具体的に表示して，保型形式・保型関数との直接的なつながりをつける．

歴史的には，ハリッシュ-チャンドラが一般の連結実半単純リー群 G に対して，プランシュレルの公式を証明したのは，$L_2(\Gamma\backslash G)$ 上の表現の解析のアイデァを換骨奪胎(かんこつだったい)したのである．彼の最初の証明に致命的な欠陥が発見されてから，その修正のために (最初の) 心臓発作を経験しながらの十年に及ぶ彫心鏤骨(ちょうしんるこつ)の努力の結果である．我々は，ここでは，無限次元表現論の初期のころにもどって，$G = SL(2,\mathbb{R})$ に対する $L_2(\Gamma\backslash G)$ を取り扱う．そして，$L_2(\Gamma\backslash G)$ の既約分解とか，G のプランシュレルの公式に出てくる離散系列の表現，連続主系列の表現を具体的に構成し，また，すべての既約表現を構成するひとつの方法を与えることで満足しよう．完全な既約表現の分類定理は第 9 章を待つことになる．

6.1 上半平面上の保型関数と保型形式

単連結な複素領域は，1 対 1 等角写像で写り合うものを同種と見れば，複素平面 $\mathbb{C}$, リーマン球 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，および上半平面(うえはん)

$$\mathfrak{H} = \{\, z = x + iy \,;\, x, y \in \mathbb{R}, y > 0 \,\}$$

の 3 種がある．ここでは，上半平面 $\mathfrak{H}$ とその複素解析的変換の群を取り扱う．そうした変換は，ある $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{R})$ による (1 次) 分数変換

$$\mathfrak{H} \ni z \longmapsto g\cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathfrak{H} \tag{6.1}$$

の形をしている．そして，$(gg')\cdot z = g\cdot(g'\cdot z)$, $e\cdot z = z$, となっているので，群 G は $\mathfrak{H}$ 上に変換群として働く．この変換の下で，点 $i = \sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の固定部分群は，$K = SO(2)$ で

ある．したがって，対応 $G = SL(2,\mathbb{R}) \ni g \mapsto g \cdot i \in \mathfrak{H}$ から，同型対応 $\Phi : G/K \to \mathfrak{H}$ を得る．後に必要となるので，Φ に対する G 内の標準的な**断面** (section) とそれに対応する G の分解を見ておこう．

6.1.1 群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ 内の断面と G の分解

G の部分群として，次の 3 種の元よりなる $N = \{n(x)\}, A = \{a(y)\}, K = \{k(\theta)\}$ を考える：

$$n(x') = \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (x' \in \mathbb{R}), \qquad a(y') = \begin{pmatrix} \sqrt{y'} & 0 \\ 0 & \sqrt{y'}^{-1} \end{pmatrix} \quad (y' > 0),$$

$$k(\theta) = u_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ (\theta \in \mathbb{R}). \tag{6.2}$$

このとき，積 NA はまた G の部分群になり，写像

$$NA \ni n(x)a(y) \longmapsto (n(x)a(y)) \cdot i = x + iy = z \in \mathfrak{H} \tag{6.3}$$

を見れば分かるように，NA は，$\Phi : G/K \to \mathfrak{H}$ の標準的な断面を与える．

ここで，群 G の多様体としての座標系について見てみよう．$GL(2,\mathbb{R})$ には自然に 4 次元の座標が入っているが，それより 1 次元下がった集合 $G \ni g \leftrightarrow (a,b,c,d), ad - bc = 1$, に座標を入れようとすると，何個かの座標近傍を用いねばならない．G は $U_1 = \{g \,;\, a \neq 0\}$, $U_2 = \{g \,;\, b \neq 0\}$, の 2 つでカバーできる．$U_1$ では (a,b,c) を座標にとれば，$d = (1+bc)/a$ である．同様に，U_2 では (a,b,d) を座標にとれる．G の群演算はこれらの座標に関して有理式で書ける．これは，リー群とよばれる「座標の入った群」のひとつの例である．

上の断面 (6.3) に従って，群 G には次の分解定理が成り立つ．(**注**：これは，連結半単純リー群に対する岩沢分解の特別の場合である.)

定理 6.1. 群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ は (多様体として) $G = NAK$ と直積に分かれる．すなわち，$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ は $g = n(x)a(y)k(\theta)$ の形に一意的に分解できる，ここで，$n(x), a(y), k(\theta)$ は次の式から決定される：

$$x + iy = \frac{ai+b}{ci+d}, \quad x = \frac{ac+bd}{|ci+d|^2}, \quad y = \frac{1}{|ci+d|^2}, \quad e^{i\theta} = \frac{ci+d}{|ci+d|}. \tag{6.4}$$

証明. $g \cdot i = x + iy, y > 0$, とすると，$g' := (n(x)a(y))^{-1}g$ をとると，$g' \cdot i = i$ なので，$g' \in K$ が分かる．これを，$k(\theta)$ とおくと，$g = n(x)a(y)k(\theta)$ を得る．この右辺の積を具体的に計算すると，

$$c = \sqrt{y}^{-1}\sin\theta, \quad d = \sqrt{y}^{-1}\cos\theta,$$

を得る．これから，$ci+d=\sqrt{y}^{-1}e^{i\theta}$ となり，分解公式 (6.4) が示される． □

群 K は対応 $K \ni k(\theta) \leftrightarrow e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ によって 1 次元トーラス $\mathbb{T}=\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\,|\lambda|=1\}$ と同型である．したがって，K の既約ユニタリ表現は指標 $\chi_n(k(\theta)) := e^{in\theta}=(e^{i\theta})^n, n \in \mathbb{Z}$, となり，$K$ の可換群としての双対 $\widehat{K}$ は加群 $\mathbb{Z}$ と同型である：$\chi_n\chi_m=\chi_{n+m}$.

また，半単純リー群に対する一般論から，G 上には左側不変測度 (および右側不変測度) が正の定数倍を除き一意に存在することが分かっているが，一般論とは関係なく，具体的に計算によって両側不変測度 μ_G を与えることができる．上の座標近傍 U_1 は低次元の部分集合を除いて G と一致するので，その座標 $U_1 \ni g \mapsto (a,b,c)$ で $d\mu_G(g)$ が書ける．また，直積分解 $G=NAK$ によって，$g=n(x)a(y)k(\theta)$ によって，別の座標 $g \mapsto (x,y,\theta)$ を用いても書ける．

定理 6.2. 群 $G=SL(2,\mathbb{R})$ 上の片側不変測度は，同時に両側不変測度になる．それは定数倍を除いて次のように表せる：

$$d\mu_G(g)=\frac{da\,db\,dc}{|a|}=\frac{dx\,dy\,d\theta}{2y^2}=\frac{dx\,dy}{y^2}\cdot\frac{d\theta}{2}, \tag{6.5}$$

ここに，$dx\,dy/y^2$ は群 NA 上の左不変測度，$d\theta/2$ は群 K 上の不変測度である．

証明．左側不変測度 $d\mu$ が存在すれば，低次元部分集合を除き G をカバーする局所座標 $g \leftrightarrow (a,b,c)$ に関して，$d\mu(g)=m(g)\,da\,db\,dc$ の形に表される．$g_0 \in G$ を任意にとって，$g \leftrightarrow (a,b,c)$ から $g'=g_0g \leftrightarrow (a',b',c')$ へ変数変換したときには，$d\mu$ の左不変性から，$d\mu(g)=d\mu(g_0g)=m(g')\,da'\,db'\,dc'$ であるから，ヤコビアン (Jacobian) を計算して，$da\,db\,dc/|a|=da'\,db'\,dc'/|a'|$ を示せば，$m(gg_0)/m(g)=m(g')/m(g)=|a|/|a'|$ (for a.a. $g, \forall g_0$) となる．ここで，'for a.a.' は「ほとんどすべての (for almost all)」を意味する．いま，g を適当に固定して，g_0 を動かすことによって，$m(g)$ が $1/|a|$ の定数倍であることが分かる．よって，右側不変測度は存在して，$d\mu_G(g)=(1/|a|)\,da\,db\,dc$ の定数倍である．左側不変測度に関する議論も同様である．

ついで，$g=n(x)a(y)k(\theta)$ を計算して，(a,b,c) を (x,y,θ) で表示してこの変数変換で $da\,db\,dc/|a|$ を書き直せば，後半の表示式を得る． □

6.1.2 離散部分群と保型関数，保型形式

単連結な被覆空間として $\mathfrak{H}$ をもつ 1 次元複素領域は，群 G の適当な離散部分群 Γ を用いて $\Gamma\backslash\mathfrak{H} \cong \Gamma\backslash G/K$ と表される．この場合，「任意の $z \in \mathfrak{H}$ と，Γ の相異なる元の無限列 $\{\gamma_i\}$ に対し，点列 $\{\gamma_i \cdot z\}$ には集積点がない」という事実が重要であるが，これを「Γ は $\mathfrak{H}$ に**不連続的に** (discontinuously) **作用**している」という．

$\mathfrak{H}$ 上の関数 $f(z)$ が Γ-不変，すなわち，$f(\gamma \cdot z) = f(z)$ $(\gamma \in \Gamma)$ となっているとき，f を $\mathfrak{H}$ 上の**保型関数** (automorphic function) というが，この種の関数の一般化を考える．そして，**6.3** 節において，群 G のユニタリ表現との深いつながりについて見てみよう．

さて，$\mathfrak{H}$ 上の有理関数 $f(z)$ は，$\gamma \in \Gamma$ に対し，ある正則関数 $j_\gamma(z)$ が存在して，

$$f(\gamma \cdot z) = j_\gamma(z) f(z) \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{6.6}$$

となるときに，Γ に関する**保型形式** (automorphic form) とよばれ，$\{ j_\gamma \ (\gamma \in \Gamma) \}$ をその**保型因子**という．より正確には，$\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ の '無限遠点' (これを Γ の 尖点(せんてん)ともいう) において適当な有界条件を要求する．保型因子は，必然的に次の条件を満たしている：

$$j_{\gamma\gamma'}(z) = j_\gamma(\gamma' \cdot z) j_{\gamma'}(z) \quad (\gamma, \gamma' \in \Gamma). \tag{6.7}$$

定理 6.3. $\mathfrak{H}$ 上には，G の作用に関して不変な距離 ds，不変測度 $d\mu$ および斉次 2 階の不変微分作用素 S が存在し，それらは (正の定数倍を除いて) それぞれ次で与えられる：$z = x + iy \in \mathfrak{H}$ に関して，

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \qquad d\mu(z) = d\mu_{\mathfrak{H}}(z) = \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{6.8}$$

$$S = y^2 \Delta_{x,y}, \quad ただし，\Delta_{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{6.9}$$

証明．これら 3 つは一連のものである．まず，z の微分 (differential) $dz = dx + idy$ について，$z' = g \cdot z$, $z' = x' + iy'$ とおくと，

$$dz' = \frac{dz}{(cz+d)^2} =: J_g(z) dz, \qquad y' = \frac{y}{|cz+d|^2}. \tag{6.10}$$

したがって，$\overline{z} = x - iy$ とおき，$dz'\,d\overline{z'} = dx'^2 + dy'^2$ と $dz\,d\overline{z} = dx^2 + dy^2$ とを比較すれば，

$$dz'\,d\overline{z'} = |cz+d|^{-4} dz\,d\overline{z} = {y'}^2 y^{-2} dz\,d\overline{z}$$

となり，座標の微小変化量 (dx, dy) に対応する不変距離の微小量 ds の公式 (リーマン計量という) が得られる．

測度 $d\mu$ が不変であることを示すには，ヤコビアンの計算を外積代数を使ってやればよい：$dz' \wedge d\overline{z'} = |cz+d|^{-4}\, dz \wedge d\overline{z} = {y'}^2 y^{-2}\, dz \wedge d\overline{z}$.

そして，不変微分作用素については，直接計算で不変性を示すこともできるが，リーマン空間でのラプラス - ベルトラミ作用素の公式 (3.25) により，ds^2 の式から得られる． □

(6.10) の複素ヤコビアン $J_g(z)$ の性質 $J_{gg'}(z) = J_g(g' \cdot z) J_{g'}(z)$ を用いると,

$$j_g(z) := J_g(z)^{-k/2} = (cz+d)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

が，保型因子の条件 (6.7) を満たすことが分かる.

また，離散部分群 Γ は必然的に可算であるから，商空間 $\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ には，$\mathfrak{H}$ 上の不変測度 μ から不変測度が誘導される (これを同じ記号 μ で書く). $\mu(\Gamma \backslash \mathfrak{H}) < \infty$ となる場合に，Γ を第 1 種フックス (I.L. Fuchs) 群というが，とくによく研究されている．この場合に，$\mathfrak{H}$ 上の正則関数が，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対し，保型因子 $j_\gamma(z) = (Cz+D)^k$ に対する保型性 $f(\gamma \cdot z) = j_\gamma(z) f(z)$ $(\gamma \in \Gamma)$ をもち，かつ，$\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ の各無限遠点で適当な有界条件を満たすとき，**重さ k の保型形式**といわれる.

離散部分群としては,

$$\Gamma(1) = SL(2, \mathbb{Z}) := \{ g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{R}) \,;\, A, B, C, D \in \mathbb{Z} \}$$

がよくお目にかかるが，これを**モデュラー群**とよぶ．自然数 N に対して定義される $\Gamma(1)$ の部分群

$$\Gamma(N) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{Z}) \,;\, \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod{N} \right\} \tag{6.11}$$

を**主合同部分群**という．$\Gamma(1)$ は生成元系として，次の σ_1, σ_2 をもち，その商群 $\Gamma(1)/\{\pm E_2\}$ での基本関係式は次式で与えられる：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad {\sigma_2}^2 = (\sigma_2 \sigma_1)^3 = -E_2. \tag{6.12}$$

この生成元に対する $\mathfrak{H}$ 上の変換は次の 2 つである：

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot z &= z + 1 \quad (\text{平行移動}), \\ \sigma_2 \cdot z &= -1/z, \\ &\text{極座標表示では，} z = re^{i\theta} \xrightarrow{\sigma_2} (1/r) e^{i(-\theta+\pi)}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

$\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ の $\mathfrak{H}$ における‘完全代表系’ Ω を**基本領域**という：$\Gamma \cdot \Omega = \mathfrak{H}$, $\gamma \cdot \Omega \cap \Omega =$ 低次元部分集合 $(\gamma \neq \pm E_2)$．普通は，Ω の内点の集合 Ω^0 が非ユークリッド的多角形で，$\Omega \subset \mathrm{Cl}(\Omega^0)$(閉包) となるようにとる．モデュラー群 $\Gamma(1)$ に対しては，基本領域として次図のような領域

$$\Omega = \{ z \in \mathfrak{H} \,;\, -1/2 \leq \Re z < 1/2, \, |z| \geq 1 \} \setminus \{ z \in \mathfrak{H} \,;\, |z| = 1, \Re z > 0 \}$$

がとれる．この場合，計算してみれば分かるように,

$$\mu(\Gamma \backslash \mathfrak{H}) = \mu(\Omega) = \iint_\Omega \frac{dx\, dy}{y^2} < \infty.$$

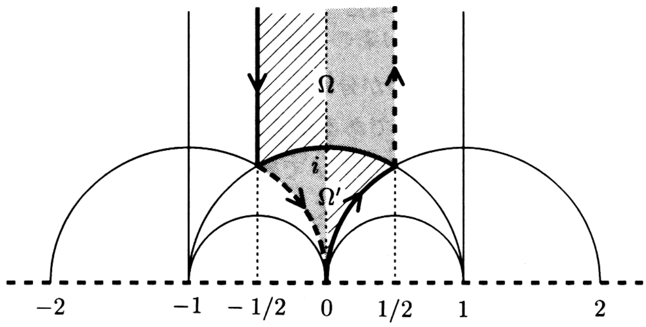


図 6.1. $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ の基本領域 Ω と $\Omega' = \sigma_2 \cdot \Omega$

なお，斜線部分の境界については，$x = \pm 1/2$ の半直線同士は張り合わされて無限に延びる円筒形になり，ついでその底部の境界は (6.13) の第 2 式により張り合わされる．そして，図の Ω から分かるように，この場合には，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ の‘無限遠点’は 1 個である．この Ω の‘無限遠点’は，$\Omega' = \sigma_2 \cdot \Omega$ の図では，実数直線上に尖(とが)って触れていく点 (尖点 0) に写ってきている．

離散群 Γ によっては，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ がコンパクトになることがある．そのときは，尖点は存在しない．この逆も真である．

6.2　$SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の表現

上に述べた保型関数や保型形式の研究は，群 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論を取り込んで理解するといろいろよいことがある．いずれにしろ，群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ は，$\mathfrak{H} = G/K$ や $\Gamma\backslash\mathfrak{H} = \Gamma\backslash G/K$ にも，離散群 $\Gamma \subset G$ や商空間 $\Gamma\backslash G$ にも，「母なる大地」の如く，またそこでの「作用」の根源として控えており，もとをたどればあらゆる情報の源泉である．もろもろの情報を引き出すのは，「G の作用」を通じてである．その「作用」を標準化したものが群の「線形表現」である．そこで，保型関数・保型形式と直接的につながっている表現論の部分を解説しよう．まず，まだ Γ を持ち出さない G 自身の話から入る．

6.2.1　$G = SL(2,\mathbb{R})$ の $L_2(G)$ 上の正則表現

G 上の不変測度 $d\mu_G(g)$ に関して，2 乗可積分な関数 $F(g)$ の全体 $\mathcal{L}_2$ に内積 $\langle F_1, F_2 \rangle := \int_G F_1(g)\,\overline{F_2(g)}\,d\mu_G(g)$ を入れて，ヒルベルト空間 $L_2(G) = L_2(G; d\mu_G)$ を得る．$F \in L_2(G)$

に対して,

$$\begin{aligned} R(g_0)F(g) &:= F(gg_0) & (g_0, g \in G); \quad (6.14)\\ L(g_0)F(g) &:= F(g_0^{-1}g) & (g_0, g \in G); \quad (6.15)\\ W(g_0,g_1)F(g) &:= F(g_0^{-1}gg_1) & ((g_0,g_1) \in G \times G, g \in G); \quad (6.16) \end{aligned}$$

とおくと, G のユニタリ表現として, 右正則表現 R, 左正則表現 L, および, 直積群 $G \times G$ のユニタリ表現として, 両側正則表現 W を得る. これらは同じ空間 $L_2(G)$ の上に実現されている.

不変測度 $d\mu_G$ について, (6.5) 式の初めの表示式を使って, $d\mu(g^{-1}) = d\mu(g)$ が示される. よって, $L_2(G)$ 上の対合的線形作用素 $S : F \mapsto F'$, $F'(g) := F(g^{-1})$, はユニタリである. S は 2 つの表現 R と L のユニタリ同値を与える相関作用素である, すなわち, $S\,R(g_0)\,S^{-1} = L(g_0)$.

群 G の**プランシュレル** (Plancherel) **の公式**とは, 正則表現の**既約分解**を具体的に与える公式のことであるが, これは各種の均質空間 G/H 上の準正則表現の既約分解とか, 均質空間上での調和解析 (フーリエ解析) を取り扱うに際して, それらの基本となるものであって, 最も重要とされている. このことは, ここで解説する $L_2(\Gamma\backslash G)$ の既約分解との密接な関係に照らしても納得されるであろう.

プランシュレルの公式における分解は既約ユニタリ表現の離散和になっている部分と, 連続和 (積分形) になっている部分とに分かれる. 前者の部分に現れる既約表現を**離散系列**の表現, 後者の部分に現れるものを**連続系列**の表現という.「表現の分解」には, 表現空間であるヒルベルト空間の分解とその上の表現作用素の分解が同時に現れているのであるが, その詳細は, 本書第 I 部のスペースも尽きかけているので, 説明を省略するが, 感じで読み進んでもらいたい.

プランシュレルの公式を与えるためには, まず G の既約ユニタリ表現の分類が必要となる. その完全な分類は本書第 II 部に譲って, 本章では, プランシュレルの公式に必要な既約表現を含む, 一連の表現の族 $\pi_{\varepsilon,s}, \varepsilon = 0, 1, s \in \mathbb{C}$, を **6.5** 節で構成するが, これは (その部分表現や商表現も込めれば) すべての既約表現を含むはずのものである (系 9.5 参照).

G のユニタリ表現 T に対して, T の極大コンパクト部分群 K への制限 $T|_K$ は K の既約表現 (その同値類を K-型という) $\chi_n(k(\theta)) = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$, の直和に分解する. そのとき現れる K-型をその重複度を込めて数えたものを, T の K-**スペクトル**といい, $\mathrm{Spec}_K(T)$ と書く.

G の既約表現 $(\pi, V(\pi))$ をとるとき, その K-スペクトルは π の同値類の重要な情報を与える. K-スペクトルに極大元 (または極小元) があるときには, それを π の極大 K-型 (または極小 K-型) という. 目下の, $G = SL(2,\mathbb{R})$ では, 最大または最小の n のことである. 既約表現 π の同値類に対するもうひとつの重要な情報は, リー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

の普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の中心 $\mathfrak{Z}$ に対する同時固有値

$$\mathfrak{Z} \ni Z \mapsto \Lambda_\pi(Z) \in \mathbb{C}, \quad ここに, \ \pi(Z) = \Lambda_\pi(Z) I_{V(\pi)^\infty}, \tag{6.17}$$

である (この同時固有値，もしくはそれを決定するパラメータを π の**無限小指標**とよぶ). ここで，作用素 $\pi(Y), Y \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, は $V(\pi)$ 全体ではなく，その C^∞ ベクトルのなす稠密な部分空間 $V(\pi)^\infty$ (**6.2.3** 参照) の上で定義されることに注意しておく. $G = SL(2,\mathbb{R})$ では，$\mathfrak{Z}$ は，カシミール元 C で生成されるので，固有値 $\Lambda_\pi(C)$ だけで決まる．これらについては，このあとで構成する既約表現 π についてはそこで計算するが，話の都合上これを先取りして表を作っておこう．なお，これらの G の既約ユニタリ表現は第 9 章で構成する，リー環 $\mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の大部分と対応している. **6.5** 節では G の表現 π の微分としての無限小形 $d\pi$ として，$\mathfrak{g}$ の表現を見る．ここでは，表現を表す記号として，連続主系列には，$\pi_{\varepsilon,s}\ (\varepsilon = 0, 1; s = i\rho\ (i = \sqrt{-1}, \rho \in \mathbb{R}))$ を当て，離散系列には，$D_\ell^+, D_\ell^-\ (\ell \geq 2, \ell \in \mathbb{Z})$ を当てる．ただし，$\pi_{\varepsilon,i\rho} \cong \pi_{\varepsilon,-i\rho}$ (ユニタリ同値), $\pi_{1,0} = D_1^+ \oplus D_1^-$ (直和)，であり，直和成分 $D_1^\pm$ は離散系列の極限とよばれる．なお，表現 $\pi_{\varepsilon,s}$, $s = i\rho$, は，**6.5** で作るのであるが，例 2.6 におけるユニタリ表現 $T_{\varepsilon,\rho}$ と実は同値である．しかし，見かけは全く異なるので，別の記号を用いている．

$G = SL(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現	K-スペクトル $\mathrm{Spec}_K(\star)$ (すべて重複度 1)	極大 (極小) K-型	固有値 $8\Lambda_\pi(C)$
$\pi_{\varepsilon,s}\ (\varepsilon = 0, s = i\rho)$	$2n\ (n \in \mathbb{Z})$	なし	$s^2 - 1$
$\pi_{\varepsilon,s}\ (\varepsilon = 1, s = i\rho)$	$2n+1\ (n \in \mathbb{Z})$	なし	$s^2 - 1$
$D_\ell^+\ (\ell \geqslant 2)$	$\ell + 2n\ (n \geqslant 0, n \in \mathbb{Z})$	最小元 ℓ	$(\ell-1)^2 - 1$
$D_\ell^-\ (\ell \geqslant 2)$	$-\ell - 2n\ (n \geqslant 0, n \in \mathbb{Z})$	最大元 $-\ell$	$(\ell-1)^2 - 1$

表 6.1. $G = SL(2,\mathbb{R})$ のプランシュレル公式に現れる既約ユニタリ表現

6.2.2 $G = SL(2,\mathbb{R})$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ とその作用

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は，G の一径数部分群 $g_X(t) = e^{tX}$ の単位元 $e \in G$ における接ベクトル X のなすリー環として，

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{\, X \in M(2,\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{tr}(X) = 0 \,\} \tag{6.18}$$

と，与えられる．いま，$C^\infty(G)$ によって，G 上の (複素数値) 無限回連続微分可能関数の全体のなす空間とすると，各 $X \in \mathfrak{g}$ は，G 上の (左移動で不変な) ベクトル場 $r(X)$ を次の公式によって定める：

$$r(X)F(g) := \left(\frac{d}{dt}\right)_0 f(gg_X(t)) := \frac{d}{dt} f(gg_X(t))\Big|_{t=0} \quad (F \in C^\infty(G)). \tag{6.19}$$

このとき，$C^\infty(G)$ 上の作用素としての交換子 $[r(X), r(X')] := r(X)\,r(X') - r(X')\,r(X)$ を考えると，定理 4.10 の (4.23) 式を用いて，

$$[r(X), r(X')] = r([X, X']) \quad (X, X' \in \mathfrak{g}) \tag{6.20}$$

となることが証明される．したがって，$\mathfrak{g} \ni X \mapsto r(X)$ は，ベクトル空間 $C^\infty(G)$ 上の $\mathfrak{g}$ の表現である．ここまでは，一般的に述べたので用語の説明も不十分であるが，以下では具体的なものを提示するので，我慢して頂くこととしたい．

さて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は，実 3 次元であって，次の 3 つの元で張られる：

$$H_{\mathfrak{k}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

ここに，$H_{\mathfrak{k}}$ は $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ を張る．交換関係は，

$$[H_{\mathfrak{k}}, P] = -2Q, \quad [H_{\mathfrak{k}}, Q] = 2P, \quad [P, Q] = 2H_{\mathfrak{k}}, \tag{6.22}$$

である．$Y'_+ := P + iQ$, $Y'_- := P - iQ \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とおけば，

$$[H_{\mathfrak{k}}, Y'_+] = 2iY'_+, \quad [H_{\mathfrak{k}}, Y'_-] = -2iY'_-, \quad [Y'_+, Y'_-] = -4iH_{\mathfrak{k}}, \tag{6.23}$$

となり，$Y'_\pm$ がそれぞれ K-型 n を $n \pm 2$ に上げ下げする昇降演算子を与えることを示唆する．元 $H_{\mathfrak{k}}, P, Q \in \mathfrak{g}$ に対応する一径数部分群は次の通りである：

$$e^{tH_{\mathfrak{k}}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{tP} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \\ \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}, \quad e^{tQ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ 上の座標としては，定理 6.1 の分解 $G = NAK$ に従って，$g = n(x)a(y)k(\theta) \mapsto (x, y, \theta)$ をとる．この座標に関して，ベクトル場 $r(X)$ を求めよう．

$$ge^{tX} = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix}, \qquad ge^{tX} = n(x_t)a(y_t)k(\theta_t), \tag{6.25}$$

とおくと，(6.4) 式により，

$$x_t + y_t i = \frac{A_t i + B_t}{C_t i + D_t}, \quad e^{i\theta_t} = \frac{C_t i + D_t}{|C_t i + D_t|} = \left(C_t{}^2 + D_t{}^2\right)^{-\frac{1}{2}} (C_t i + D_t), \tag{6.26}$$

である．(6.25) 式において，$t = 0$ とおき，また，t に関して $t = 0$ で微分して，$A'_0 = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 A_t$ などとおけば，

$$g = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}, \qquad gX = \begin{pmatrix} A'_0 & B'_0 \\ C'_0 & D'_0 \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

さらに，$e^{i\theta_t}$ を $t=0$ で微分すれば，$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 e^{i\theta_t} = ie^{i\theta}\cdot\left(\frac{d}{dt}\right)_0\theta_t$ となることに注意して，これで $r(X)F(g)$ が計算できる．具体的な計算は，よい演習問題なので読者に任せるとして，結果をまとめると次になる：

$$\begin{aligned} r(H_{\mathfrak{k}}) &= \frac{\partial}{\partial\theta}, \\ r(P) &= 2y\cos(2\theta)\frac{\partial}{\partial x} - 2y\sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(2\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}, \\ r(Q) &= 2y\sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial x} + 2y\cos(2\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

したがって，昇降演算子 $r(Y'_\pm)$ および**カシミール元** $C = \frac{1}{8}(-H_{\mathfrak{k}}{}^2 + P^2 + Q^2) = \frac{1}{16}(-2H_{\mathfrak{k}}{}^2 + Y'_+Y'_- + Y'_-Y'_+) \in \mathfrak{Z} \subset U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ に対する $r(C)$ を計算すると，次のようになるが，$r(C)$ は，$C^\infty(G)$ 上の両側不変作用素である：

$$\begin{aligned} r(Y'_+) &= e^{2i\theta}\left(2y\,\frac{\partial}{\partial x} + 2yi\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = e^{2i\theta}\left(4y\,\frac{\partial}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ r(Y'_-) &= e^{-2i\theta}\left(2y\,\frac{\partial}{\partial x} - 2yi\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = e^{-2i\theta}\left(4y\,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ r(C) &= \frac{1}{2}\left(y^2\Delta_{x,y} + y\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\right), \qquad \Delta_{x,y} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{6.29}$$

ここに，$\displaystyle \frac{\partial}{\partial\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$

問題 6.1. (i)　(6.28) における $r(H_{\mathfrak{k}}), r(P), r(Q)$ の公式を証明せよ．
(ii)　(6.29) における $r(Y'_+), r(Y'_-), r(C)$ の公式を証明せよ．

6.2.3　正則表現 $(R, L_2(G))$ の解析

正則表現 R を解析する第一歩として，K-型 χ_n を決めて，K への制限 $R|_K$ が χ_n に従う部分空間 $L_2(G; d\mu_G \,|\, K, \chi_n) = L_2(G \,|\, K, \chi_n)$,

$$L_2(G \,|\, K, \chi_n) := \{F \in L_2(G)\ ;\ R(k)F = \chi_n(k)F\ (\forall k \in K)\} \tag{6.30}$$

を調べるという方法がある．この部分空間への正射影は $P_{\chi_n} = \int_K R(k)\,\overline{\chi_n(k)}d\mu_K(k)$ として，作用素積分で与えられる．ここに，$d\mu_K$ は K 上の正規化された不変測度である．また，$F \in L_2(G \,|\, K, \chi_n)$ のための条件は，次のようにも書ける：

$$F(gk(\theta')) = e^{in\theta'}F(g) \quad (\forall\theta',\ \text{for a.a. } g \in G) \tag{6.31}$$

このことから，$F(n(x)a(y)k(\theta)) = f(z)e^{in\theta}, z = x + yi \in \mathfrak{H}$, の形に分解されて，次式を得る：

$$\|F\|^2 = \int_G |F(g)|^2\,d\mu_G(g) = \pi\int_{\mathfrak{H}} |f(z)|^2\,d\mu_{\mathfrak{H}}(z) = \pi\|f\|^2. \tag{6.32}$$

ここで，$\|F\|$ は $L_2(G)$ でのノルム，$\|f\|$ は $L_2(\mathfrak{H})$ でのノルムを表す．証明には，定理 6.2 の不変測度 $d\mu_G$ の分解 (6.5) を使う．したがって，写像

$$\Psi_n : L_2(G\,|\,K,\chi_n) \ni F \longmapsto \sqrt{\pi} f \in L_2(\mathfrak{H}) \tag{6.33}$$

はユニタリ (すなわち，等長かつ全射) である．

ユニタリ表現の無限小形 (infinitesimal form)

一般論として，$(T,\mathcal{H})$ を無限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の G のユニタリ表現とするとき，その無限小形 $dT(X), X \in \mathfrak{g}$, を与えるには，

$$dT(X) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(e^{tX}) - I_{\mathcal{H}}) \tag{6.34}$$

の定義域 $\mathcal{D}(dT(X))$ が問題となる．それを最も大きくとれば，上の作用素極限が弱収束の意味で存在するように，

$$\mathcal{D}(dT(X)) := \left\{ v \in \mathcal{H}\ ;\ \exists \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{1}{t}(T(e^{tX}) - I_{\mathcal{H}})v, w \right\rangle\ (\forall w \in \mathcal{H}) \right\} \tag{6.35}$$

ととれる．そして，すべての $dT(X), X \in \mathfrak{g}$, が，繰り返し作用できるような $v \in \mathcal{H}$ を T の **C^∞-ベクトル**とよび，その全体の集合を $\mathcal{H}^\infty$ と書く．$\mathcal{H}^\infty$ は，$v = \int_G f(g)T(g)w\, d\mu_G(g)$ ($w \in \mathcal{H}, f \in C_c^\infty(G)$) の形のベクトルを含むので，$\mathcal{H}$ で稠密であることが分かる．ここで，$C_c^\infty(G)$ は台がコンパクトな $f \in C^\infty(G)$ の全体を表す．

我々の正則表現 $(R, L_2(G))$ では，

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2(G) := \{\, F \in C^\infty(G) \cap L_2(G)\ ;\ \ & r(X_1)r(X_2)\cdots r(X_n)F \in L_2(G) \\ & (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}, \forall n \geq 1)\,\}\end{aligned} \tag{6.36}$$

がとれる．$\mathcal{D}_2(G) \supset C_c^\infty(G)$ の上では，$r(X) = dR(X)$ となり，表現 r は R の無限小形である．そして，$r(H_{\mathfrak{k}}), r(C)$ は各 $L_2(G\,|\,K,\chi_n) \cap \mathcal{D}_2(G)$ に働き，$r(Y'_\pm) : L_2(G\,|\,K,\chi_n) \cap \mathcal{D}_2(G) \to L_2(G\,|\,K,\chi_{n\pm 2}) \cap \mathcal{D}_2(G)$ である．

$L_2(G\,|\,K,\chi_n)$ および $L_2(\mathfrak{H})$ におけるカシミール作用素の固有空間分解

K の表現 χ_n に従う $L_2(G)$ 内のベクトルのなす部分ヒルベルト空間 $L_2(G\,|\,K,\chi_n)$ には，正則表現 R の既約成分の (χ_n での) 切り口が現れている．それを調べるのに微分作用素として実現されているカシミール作用素 $r(C)$ の「固有空間分解」が使える．これは，$r(C)^{(n)} := r(C)|_{L_2(G\,|\,K,\chi_n)}$ の固有値と固有関数を求めて，それらの情報からもとの $r(C)^{(n)}$ を組み立て直そうというもので,「スペクトル分解」ともいわれる．$r(C)^{(n)}$ の固有値 λ の固有関数が，空間 $L_2(G\,|\,K,\chi_n)$ の中に見つかるとき，λ は点スペクトルといわれる．固有関

数が $L_2(G\,|\,K,\chi_n)$ の外側，例えば，$C^\infty(G\,|\,K,\chi_n) := \{\,f \in C^\infty(G)\;;\;P_{\chi_n}f = f\,\}$ の中に見つかって，$r(C)^{(n)}$ の再組み立てに必要なとき，λ は連続スペクトルといわれる．

既約ユニタリ表現 π に対するカシミール元の固有値を $\Lambda_\pi(C)$ としたが，表 6.1 から分かるように，その表に掲げてある π については，K-型 n と $\Lambda_\pi(C)$ の組み合わせで，完全に π を特定できる．したがって，正則表現 R の既約成分として現れるのが，表 6.1 の中の表現に限るのであれば，固有値問題

$$\big(r(C) - \Lambda_\pi(C)\big)F = 0 \tag{6.37}$$

を $L_2(G\,|\,K,\chi_n)$ または $C^\infty(G\,|\,K,\chi_n)$ の上で考えると，それが，R の既約分解に直結する．F を超関数と考えたときの解（弱解（じゃくかい））は，$f = \Psi_n F$ として，$\mathfrak{H}$ 上の方程式

$$\big(\Delta^{(n)} - \Lambda_\pi(C)\big)f(z) = 0, \qquad \Delta^{(n)} := \frac{1}{2}\left(y^2\Delta_{x,y} + iny\,\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{6.38}$$

の弱解を与える．この微分作用素は楕円型（最高階部分が楕円型）であるから，「楕円型微分作用素の弱解は実解析的である」という有名な結果によって，$f(z)$ は $\mathfrak{H}$ 上で (x,y) に関して実解析的である．上の 2 つの方程式の解の空間はそれぞれ，写像 Ψ_n によって同型に写る．記号として，$\mathfrak{H}$ 上のすべての解析的関数のなす空間を $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ と書く．

(結論 I) π が $(R, L_2(G))$ の離散成分として入っているとする．π に現れる K-型 χ_n に対して，(6.38) の $L_2(\mathfrak{H})$ における解の空間を $\mathcal{A}_2(\mathfrak{H}\,|\,\Delta^{(n)}, \Lambda_\pi(C))$ とすると，0 でない $f = \Psi_n F \in \mathcal{A}_2(\mathfrak{H}\,|\,\Delta^{(n)}, \Lambda_\pi(C))$ が対応する．さらに，$\pi = D_{\pm\ell}$ であれば，$\Lambda_\pi(C) = \frac{1}{8}\big((\ell-1)^2 - 1\big)$ であり，$\pm\ell$ が最低（または最高）K-型であるから，次の方程式も満たす：

$$\pi(Y'_-)f = 0, \quad \text{または，} \quad \pi(Y'_+)f = 0.$$

(結論 II) π が $(R, L_2(G))$ の連続成分とする．$\pi = \pi_{\varepsilon,s}$ で $\varepsilon = 0$ $(s = i\rho)$ とすれば，その K スペクトルは，重複度 1 で $2m\,(m \in \mathbb{Z})$ である．したがって，$n = 2m = 0$ に対応する (6.37) の，$C^\infty(G\,|\,K,\chi_0) \cong C^\infty(\mathfrak{H})$, $\chi_0 = \mathbf{1}_K$, における $\Delta^{(0)}$ の固有値 $\Lambda_\pi(C)$ に対する解空間 $\mathcal{A}(\mathfrak{H}\,|\,\Delta^{(0)}, \Lambda_\pi(C))$ を見れば，R に対する既約成分 $\pi = \pi_{0,i\rho}$ の‘入り方’が分かるはずである．それは連続成分なので，固有方程式

$$\Delta^{(0)}f = -\frac{1}{8}(\rho^2+1)f, \qquad \Delta^{(0)} := \frac{1}{2}y^2\Delta_{x,y},$$

の解 f は $L_2(\mathfrak{H})$ 内ではなく，その外側 $\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ で探すのである．

また，$\pi = \pi_{\varepsilon,s}$ で $\varepsilon = 1\,(s = i\rho)$ とすれば，その K スペクトルは，重複度 1 で $2m+1\,(m \in \mathbb{Z})$ であるから，$n = 1$ に対応する空間 $C^\infty(G\,|\,K,\chi_1)$ での固有方程式 (6.37) に対応して，(6.38) の解空間 $\mathcal{A}(\mathfrak{H}\,|\,\Delta^{(1)}, \Lambda_\pi(C))$ を見ればよい．

なお，ここに述べた方法を最後まで遂行すれば，$(R, L_2(G))$ の既約分解に到るはずであるが，現実にこのプランシュレルの公式を，最初に完全に与えたのは，別の方法であった．

しかし，例えば，$L_2(K\backslash G)$ 上の準正則表現 $R_{K\backslash G}$ の既約分解を与えたのは，上の (結論 II) の方法であった．ただし，

$$R_{K\backslash G}(g_0)F(Kg) := F(Kgg_0) \quad (Kg \in K\backslash G, g_0 \in G, F \in L_2(K\backslash G)).$$

6.3 $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現と保型関数，保型形式

6.3.1 $G = SL(2,\mathbb{R})$ の $L_2(\Gamma\backslash G)$ 上の表現 R_Γ

G の離散部分群 Γ で **6.1.2** における如く $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ が測度有限になるものをとる．G 上の関数 F が Γ-左不変，すなわち，

$$F(\gamma g) = F(g) \quad (\gamma \in \Gamma, g \in G), \tag{6.39}$$

を満たすとき，F を G 上の (Γ に関する) **保型関数**という．商空間 $\Gamma\backslash G$ 上には G の不変測度 $d\mu_G$ から測度 $d\mu_{\Gamma\backslash G}$ が誘導されるがそれは G-右不変である．実際，$\Gamma\backslash G$ の基本領域が (Γ が離散群だから) 測度零を除いて，ある開集合 W にとれる．そのとき，$\Gamma\backslash G$ 上の関数 $\phi(\dot{g}), \dot{g} = \Gamma g$, を $F(g) = F_\phi(g) := \phi(\dot{g})$ とおいて，自然に G 上の保型関数 F に持ち上げれば，

$$\int_{\Gamma\backslash G} \phi(\dot{g})\, d\mu_{\Gamma\backslash G}(\dot{g}) = \int_W F(g)\, d\mu_G(g) \tag{6.40}$$

となり，この値は W の取り方によらない．同型 $G/K \cong \mathfrak{H}$ に対する断面 S (例えば $S = NA$) をとって，測度空間としての G を，$g = sk\,(s \in S, k \in K)$ によって，$G \ni g \mapsto (z,k) \in \mathfrak{H} \times K, z = s \cdot i$, と直積に分解し，$\Gamma\backslash G \cong \Gamma\backslash\mathfrak{H} \times K$ と捉えれば，$d\mu_{\Gamma\backslash G} = d\mu_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \times d\mu_K$ となる．ここに，$d\mu_K$ は K 上の 1 つの不変測度である ((6.5) 式の最右端の表示を参照)．この直積表示から，$\Gamma\backslash G$ が測度有限であることが分かる．

商空間 $\Gamma\backslash G$ 上の不変測度 $d\mu_{\Gamma\backslash G}$ に関する L_2-空間 $L_2(\Gamma\backslash G) = L_2(\Gamma\backslash G; d\mu_{\Gamma\backslash G})$ を表現空間とする G の右移動による表現 R_Γ は，次で定義される：

$$R_\Gamma(g_0)\phi(\dot{g}) := \phi(\dot{g}g_0) \quad (g_0 \in G, \dot{g} = \Gamma g \in \Gamma\backslash G, \phi \in L_2(\Gamma\backslash G)), \tag{6.41}$$

ここに，$\dot{g}g_0 := \Gamma g g_0$. これは，$G$ の右正則表現 R の類似であり，R の既約分解 (プランシュレルの公式) と同様に，R_Γ の既約分解でも，既約表現の離散和の部分と，連続和の部分に分かれる．この既約分解は当然 Γ の性質によって違ってくるが，それを具体的に求めることは，Γ の数論的性質を解明することにもつながり，面白いがなかなかに難しい問題である．極端な場合として，$\Gamma\backslash G$ がコンパクト ($\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ コンパクト，と同値) の場合，R_Γ は離散和に分解して，連続和の部分はないことが知られている．

すぐあとで見るように，離散和に入る既約表現の研究には，$\mathfrak{H}$ 上の Γ に関する保型形式の研究が現れる．また，連続和に入る既約表現の研究には，$\mathfrak{H}$ 上の保型関数の研究が現れ，

Γ の尖点の Γ-共役類ごとに，古典的なアイゼンシュタイン (F.G.M. Eisenstein) 級数の一般化が必要になる．

6.3.2 $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ の表現と $\left(R_\Gamma, L_2(\Gamma\backslash G)\right)$ の無限小形

G の正則表現 $(R, L_2(G))$ と，$C^\infty(G)$ 上のベクトル場 $r(X), X \in \mathfrak{g}$, による $\mathfrak{g}$ の表現との関係は，前節に述べた．$\Gamma\backslash G$ の場合にも $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ 上のベクトル場 r_Γ によって，R_Γ との類似の関係として拡張される．そして，$r(H_\mathfrak{k}), r(P), r(Q), r(Y'_\pm)$ のベクトル場としての表示式や，微分作用素 $r(C)$ の表示式は，r_Γ に対してもそのまま通用する．これを説明しよう．

まず，$\Gamma \subset G$ は離散的だから，単位元 e の近傍 U を十分小さくとれば，$\gamma \notin U$ $(\forall\gamma \in \Gamma, \gamma \neq e)$ となる．写像 $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh^{-1} \in G$ の点 $(g, h) = (e, e)$ における連続性を使えば，e の開近傍 $W \subset G$ が存在して，$WW^{-1} \subset U$ となる．G の任意の点 g_1 の開近傍 $W' := Wg_1 = g_1W''$, $W'' := g_1^{-1}Wg_1$, をとれば，$\gamma W' \cap \gamma' W' = \emptyset$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma')$ となる．これから，g_1 の開近傍 W' を含む $\Gamma\backslash G$ の G 内での断面がとれることが分かる．その断面の中の W' 上で，$\phi \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ に対して，$F(g) := \phi(\dot{g})$ $(g \in W')$ とおけば，$F \in C^\infty(W')$ で

$$r_\Gamma(X)\phi(\dot{g}) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(\dot{g}e^{tX}) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\right)_0 F(ge^{tX}) = r(X)F(g)$$

となる．これは，$F(g) = \phi(\dot{g})$ とおいて，ϕ に G 上の保型関数 F を対応させて考えているのと同じことである．

6.3.3 表現 $\left(R_\Gamma, L_2(\Gamma\backslash G)\right)$ の K-型を決めたときの部分空間

表現 R_Γ を既約分解するときに，まず，K で分解してみて，各既約表現に現れる K-型と比較してみよう．このやり方だけで既約分解にまで到達できるとは限らないが，かなりいい情報が得られる．

K の既約表現 χ_n をとる．$R_\Gamma|_K$ が χ_n になる部分空間は，

$$L_2(\Gamma\backslash G \,|\, K, \chi_n) := \{\, \phi \in L_2(\Gamma\backslash G)\,;\, R_\Gamma(k(\theta))\phi = \chi_n(k(\theta))\phi \,\} \tag{6.42}$$

で与えられる．そして，この部分空間への直交射影は $P_{\chi_n} = \int_K R_\Gamma(k)\,\overline{\chi_n(k)}\,d\mu_K(k)$ と **6.2.3** と同じように与えられる．そして，$F(g) = \phi(\dot{g})$ とおくと，(6.39) を満たすので，F は G 上の Γ に関する保型関数になる．$f := \Psi_n F$ とおくと，$F(n(x)a(y)k(\theta)) = f(z)e^{in\theta}$ と書かれるので，$\phi \in L_2(\Gamma\backslash G \,|\, K, \chi_n)$ に対する像 f は $\mathfrak{H}$ 上の関数として，どんな条件を満たしているのかを調べる．

$g = n(x)a(y)k(\theta)$ に対し，$g \mapsto (z, e^{i\theta}) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{T}$ と対応させるとき，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ をとって，$\gamma g = n(x')a(y')k(\theta')k(\theta)$ とおけば，(6.4), (6.10) により，

$$z' = x' + y'i = \frac{Az+B}{Cz+D} = \gamma \cdot z, \quad y' = \frac{y}{|Cz+D|^2}, \quad e^{i\theta'} = \frac{Cz+D}{|Cz+D|},$$

を得る．したがって，$\Gamma g \in \Gamma\backslash G$ に対しては，$z = x + yi$ は $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ の元として確定する．等式 $F(\gamma g) = F(g)$ において，左辺は，

$$F(\gamma g) = F(n(x')a(y'))e^{in\theta'}e^{in\theta} = f(\gamma \cdot z)\left(\frac{Cz+D}{|Cz+D|}\right)^n e^{in\theta}$$

を得る．ここでは，$F(n(x')a(y')) = f(z') = f(\gamma \cdot z)$ を用いた．右辺は，$f(z)e^{in\theta}$ なので，$y'/y = |Cz+D|^{-2}$ を代入して，$f(\gamma \cdot z)(y'/y)^{n/2}(Cz+D)^n = f(z)$ となる．そこで，$\widetilde{f}(z) := y^{n/2}f(z)$ とおけば，

$$\widetilde{f}(\gamma \cdot z)(Cz+D)^n = \widetilde{f}(z), \quad \text{すなわち，} \quad \widetilde{f}(\gamma \cdot z) = (Cz+D)^{-n}\widetilde{f}(z), \tag{6.43}$$

となる．これは，$\widetilde{f}$ が重さ $-n$ の保型形式と同じ保型性をもつことを意味する．さらに，(6.32) 式と同様に，次の等式を得る：

$$\|\phi\|^2 = \int_{\Gamma\backslash G} |\phi(\dot{g})|^2 \, d\mu_{\Gamma\backslash G} = \pi \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} |\widetilde{f}(z)|^2 \frac{dx\,dy}{y^{n+2}}. \tag{6.44}$$

別の捉え方． $h(z) = y^{-n/2}\overline{f(z)}$ （したがって，$\overline{h(z)} = y^{-n/2}f(z)$）とおくと，$|Cz+D|^{-2n}(Cz+D)^n = (C\overline{z}+D)^{-n}$ であるから，

$$h(\gamma \cdot z)(Cz+D)^{-n} = h(z), \quad \text{i.e.,} \quad h(\gamma \cdot z) = (Cz+D)^n h(z), \tag{6.45}$$

となる．よって，h は重さ n の保型形式と同じ保型性をもつ．また，写像 $\phi \mapsto \overline{h}$ は線形であり，

$$\|\phi\|^2 = \pi \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} |h(z)|^2 \, d\mu_n(z), \qquad d\mu_n(z) := \frac{dx\,dy}{y^{-n+2}} = y^n \, d\mu(z). \tag{6.46}$$

実数 ℓ に対し，$\mathfrak{H}$ 上の測度 $d\mu_\ell(z) := y^{\ell-2}\,dx\,dy = y^\ell\,d\mu(z)$ は，$g_0 = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in G$ による変換に対して，

$$d\mu_\ell(g_0 \cdot z) = |c_0 z + d_0|^{-\ell/2} d\mu_\ell(z) = (y'/y)^\ell d\mu_\ell(z), \qquad y' = \Im(g_0 \cdot z), \tag{6.47}$$

となり，準不変測度である．ここに，記号 $\Im$ は複素数の虚部を表す．この準不変性と，$\widetilde{f}$ や h の保型性から，(6.44), (6.46) の右辺の積分は，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ の基本領域の取り方によらず確定する．

さて，整数 n をとる．$\mathfrak{H}$ 上の C^∞ 級関数 ψ に対し次の 2 条件を考える：

$$\psi(\gamma\cdot z)(Cz+D)^n=\psi(z)\quad\left(\gamma=\left(\begin{smallmatrix}A&B\\C&D\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma\right),\tag{6.48}$$

$$\|\psi\|_{-n}^2:=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}|\psi(z)|^2\,d\mu_{-n}(z)<\infty.\tag{6.49}$$

保型性の条件 (6.48) を満たす ψ のなす空間を $C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)$ とし，さらに L_2 性の条件 (6.49) を満たす ψ の空間を $C_2^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)$ とする．

定理 6.4. (i) 写像 $C^\infty(\Gamma\backslash G\,|\,K,\chi_n)\ni\phi\mapsto\psi=\widetilde{f}$, ただし，

$$\widetilde{f}(z)=y^{n/2}\,\phi(\Gamma n(x)a(y))\quad(z=x+iy)$$

は $C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)$ の上への同型対応を与える．これを $C^\infty(\Gamma\backslash G\,|\,K,\chi_n)\cap L_2(\Gamma\backslash G)$ に制限すれば，$C_2^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)$ の上への同型を与える．

(ii) この同型写像で，$r(Y'_\pm),r(C)$ に対応する $C^\infty(\Gamma\backslash G\,|\,K,\chi_n)$ 上の作用素を，$C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)$ の上の作用素に写したものを，$r_{\Gamma,n}(Y'_\pm),r_{\Gamma,n}(C)$ と書くと，これらは次のように表せる：

$$\begin{aligned}
r_{\Gamma,n}(Y'_+)&=4y^2\frac{\partial}{\partial\bar z}: & &C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)\to C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n+2)\,,\\
r_{\Gamma,n}(Y'_-)&=4\frac{\partial}{\partial z}+\frac{2ni}{y}: & &C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)\to C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n-2)\,,\\
r_{\Gamma,n}(C)&=\frac{1}{2}y^2\Delta_{x,y}+niy\frac{\partial}{\partial\bar z}+\frac{n(n+2)}{8}: & &C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n)\to C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,n).
\end{aligned}$$

証明の概略. (ii) の証明について述べる．ϕ と ψ の関係を逆に解くと，

$$\phi(\Gamma n(x)a(y)k(\theta))=\psi(z)\cdot y^{-n/2}\,e^{in\theta}$$

である．この左辺に **6.2.2**, (6.29) 式の $r(Y'_+),r(Y'_-),r(C)$ の表示式を適用すればよい．詳細は問題 6.2 として，読者の計算に待つこととしよう．

系 6.5. $n<0$ とし，$\ell=-n$ とおく．$C^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,-\ell)$ の元 ψ が，$r_{\Gamma,n}(Y'_+)\psi=0$ を満たすとき，最高ウェイト関数とよぶ．最高ウェイト関数 $\psi(z)$ は z に関して正則である．

証明. $r_{\Gamma,n}(Y'_+)\psi=0$ は，方程式 $(\partial/\partial\bar z)\psi(z)=0$ と同等であり，これを $\psi(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ と ψ の実部，虚部に分けて書き下すと，次の**コーシイ-リーマン** (Cauchy - Riemann) **の方程式**になる：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

そして，1 回連続微分可能な関数 u,v がこの方程式を満たせば，関数 $u(x,y)+v(x,y)i$ は $z=x+yi$ の正則関数になることは，複素関数論の基本定理である．

さて,「別の捉え方」として，$h(z)=y^{-n/2}\overline{f(z)}$ という変換を持ち出したのは，次のような事情による．T を $r_{\Gamma,n}(Y'_{\pm}), r_{\Gamma,n}(C)$ のどれかとするとき，h への作用は，$\overline{T}h := \overline{T\overline{h}}$ と定義される．このとき，

$$\overline{r_{\Gamma,n}(Y'_{+})} = 4\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2ni}{y}, \qquad \overline{r_{\Gamma,n}(Y'_{-})} = 4y^2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \tag{6.50}$$

したがって，$\overline{h(z)} = y^{-n/2}f(z)$ が，最低ウェイトベクトルであれば，$h(z)$ は z の正則関数である．

(I) $n\neq 0$ の場合．かくして，$n\neq 0$ の場合には，保型形式の話と，$L_2(\Gamma\backslash G)$ 上の表現 $R_{\Gamma\backslash G}$ の既約分解の話が直接的につながったのである．既約成分 D_ℓ^-, D_ℓ^+ の最高ウェイトベクトル，最低ウェイトベクトルが保型形式として捉えられるのである．保型形式を具体的に作るには，ポアンカレ級数の方法などがある．また，(最高や最低ではない) 一般のウェイトベクトルで，楕円型作用素 $\Delta^{(n)}$ の固有解となるものは解析的であるから，我々は (正則ではないが) 解析的な‘保型形式’を考える必要も出てくるであろう．

(II) $n=0$ の場合．この場合には，保型関数の空間 $C_2^\infty(\mathfrak{H}\,\|\,\Gamma,0) = C_2^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H}; d\mu_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}})$ 上の $r_{\Gamma,0}(C) = 4y^2\Delta_{x,y}$ のスペクトル分解の話とつながっている．ここには，G の自明表現 $\mathbf{1}_G$ が離散スペクトルとして入っている ($\because\ \mu_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) < \infty$)．それ以外は，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ がコンパクトでないとき，既約表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ が実際に連続スペクトルとして入っていることを具体的に示すのに，Γ の尖点の Γ-共役類の代表元に対して，アイゼンシュタイン級数の一般化を定義して利用する．

しかし，残念ながら本書では，この話題をさらに続けて，これらの級数の話にまで入っていくことはできない．興味を持たれた読者は，例えば，[Kubo] などにて学習されたい．また，G の他の既約ユニタリ表現 (補系列の表現 $\pi_{0,\sigma}$ や離散系列の極限 D_1^+, D_1^- (**6.5.4** 参照)) も $\left(R_{\Gamma\backslash G}, L_2(\Gamma\backslash G)\right)$ の既約成分として現れないかどうか調べる必要がある．

表現論と保型形式の理論の相互発展

上では，群 $G=SL(2,\mathbb{R})$ の表現と，離散群 $\Gamma\subset G$ の $\mathfrak{H}\cong G/K$ 上の保型関数・保型形式との密接な関連を説明した．従来，予想もされなかったような 2 つの分野が実は密接な関連を持っていることが発見されることはそれだけで重要な価値をもつ．

こうした関連が，直ちにある問題の解決に役立つとも限らないが，それは，新たな見地を導入し，かつ，未開拓の研究の新分野へと導くきっかけともなる．

目下の我々の場合には，まず初めに，実シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ がジーゲル (C.L. Siegel) の上半平面 $\mathfrak{H}_n$ 上に働いている場合に，離散部分群 $Sp(n,\mathbb{Z})$ などに対して理論が拡張された．ここに，

$$Sp(n,\mathbb{R}) := \left\{\, g\in SL(2n,\mathbb{R})\,;\, gJ_n{}^tg = J_n \,\right\}, \qquad J_n = \left(\begin{smallmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{smallmatrix}\right),$$

である．ジーゲルの上半平面とは，

$$\mathfrak{H}_n := \left\{ Z = X + iY \,;\, X, Y : n \text{ 次実対称行列}, Y : \text{正定値} \right\}$$

であり，$g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in Sp(n, \mathbb{R})$ $(A, B, C, D : n$ 次正方行列$)$ は $\mathfrak{H}_n$ 上に $g \cdot Z := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ の形で作用する．

問題 6.2. 定理 6.4 (ii) の $r_{\Gamma,n}(Y'_+), r_{\Gamma,n}(Y'_-), r_{\Gamma,n}(C)$ の公式を証明せよ．

6.4　単位円板上の分数変換と $SU(1,1)$ の離散系列表現

整数 ℓ に対し，$\mathfrak{H}$ 上の準不変測度 $d\mu_\ell(z) = y^\ell d\mu(z)$ をとって，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\ell := L_2(\mathfrak{H}; d\mu_\ell)$ を考える．$g \in G$ に対し，$g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ として，

$$(T_\ell(g)f)(z) = (cz + d)^{-\ell} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad (f \in \mathcal{H}_\ell) \tag{6.51}$$

とおく．これは，$\mathcal{H}_\ell$ 上のユニタリ表現を与える．証明は，(6.10) 式を用いれば容易である．上の変換公式は，$SL(2, \mathbb{C})$ の (と同時に，$SL(2, \mathbb{R})$ の) 有限次元の既約表現を与える，定理 5.13 (iii) の変換公式によく似ていることに留意しておく．

$\mathfrak{H}$ 上で $cz + d \neq 0$ であるから，$f(z)$ が z の正則関数であれば，$T_\ell(g)f(z)$ もまた正則 (holomorphic) である．したがって，$\mathcal{H}_\ell$ 内の正則関数の全体を $\mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}}$ と書けば，それは不変部分空間である．$f \in \mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}}$ に対して，$T_\ell(\gamma)f = f$ $(\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}))$ となることは，f が重さ ℓ の保型形式であることを意味する．$\mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}}$ は興味ある空間だが，まず解決すべき問題は，

問題 6.4.1.　$\mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\ell$ の閉部分空間であるか，

問題 6.4.2.　いつ $\mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}} \neq \{0\}$ となるか，

である．これらが分かれば，$\mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}}$ 上に部分表現が与えられる．

問題 6.4.1 については答えは肯定的である．

定理 6.6. D を複素平面の領域 (すなわち連結開集合) とし，$m(z) > 0$ を D 上の正値連続関数とする．測度 $d\mu^m(z) := m(z)dxdy$ $(z = x + iy \in D)$ に対して，$\mathcal{H} = L_2(D; d\mu^m)$ をとる．$\mathcal{H}^{\mathrm{hol}}$ を $\mathcal{H}$ の元で正則なものの全体とすると，これは閉部分空間である．

証明．$\mathcal{H}^{\mathrm{hol}} \neq \{0\}$ とする．$\mathcal{H}^{\mathrm{hol}}$ の元からなるコーシー列 $\{f_n\}$ をとる．この列が広義一様収束することを示せばよい．実際，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ での極限 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ は必ず存在する．他方，f_n の広義一様極限 F は正則である．f と F とは，ほとんど至るところ一致するので，$\mathcal{H}$ の元としては同一視される．

さて，広義一様収束を示すには，次の不等式が分かればよい．D の任意のコンパクト部

分集合 U をとれば，整数 $c_U > 0$ が存在して，

$$\max_{z\in U} |f(z)| \leq c_U \|f\| \quad (f \in \mathcal{H}^{\mathrm{hol}}). \tag{6.52}$$

これを証明するのに，U として閉円板に限ってよい．U から距離 $R > 0$ 以内にある点の集合 U_R が D に含まれているとする．$c'_U = \min\{\, m(z)\,;\, z \in U_R \,\}$ とおく．任意の $z_0 \in U$ をとると，z_0 を中心とする半径 R の閉円板は U_R に含まれるので，

$$\|f\|^2 \geq \iint_{U_R} |f(z)|^2\, m(z) dx\, dy \geq c'_U \iint_{|z-z_0|\leq R} |f(z)|^2\, dx\, dy.$$

他方，$f(z)$ について次の補題 6.7 を適用すると，右辺で，$\iint_{U_R} |f(z)|^2\, dx\, dy \geq \pi R^2\, |f(z_0)|^2$. したがって，$c_U = 1/\left(R\sqrt{c'_U \cdot \pi}\right)$ ととれば，$|f(z)| \leq c_U \|f\|$ となる． □

補題 6.7. $h(z)$ は z_0 を中心とする半径 R の閉円板 U_R で正則とすると，

$$\pi R^2\, |h(z_0)|^2 \leq \iint_{U_R} |h(z)|^2\, dx\, dy. \tag{6.53}$$

補題の証明. $h(z)$ は閉円板 U_R 上で正則であるから，$z - z_0$ の冪級数展開

$$h(z) = \sum_{0\leq n<\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_0 = h(z_0),\ a_n = h^{(n)}(z_0)/n!,$$

は，この閉円板上で一様かつ絶対収束する．したがって，$|h(z)|^2 = h(z)\,\overline{h(z)} = \sum_{m,n} a_m \overline{a_n}\, (z-z_0)^m \overline{(z-z_0)}^n$ を U_R 上で積分するときに，項別積分ができる．$z - z_0 = re^{i\theta}$ $(0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と変数変換して，$dx\, dy = rdr\, d\theta$ を用いて計算すれば，この積分は，$m \neq n$ のときには，0 であり，$m = n$ のときには，$\pi R^{2n+2}/(n+1)$ である．よって，(6.53) の右辺は，

$$= \textstyle\sum_{0\leq n<\infty} |a_n|^2 \cdot \pi R^{2n+2}/(n+1) \geq |a_0|^2 \cdot \pi R^2. \qquad \square$$

問題 6.4.2 に答えるためもあって，$\mathfrak{H}$ を開単位円板 $\mathfrak{D} = \{\, w \in \mathbb{C}\,;\, |w| < 1\,\}$ 上に解析的に写してみよう．有名な**ケーリー** (A. Cayley) **変換**は，

$$\mathcal{C}:\ \mathfrak{H} \ni z \longmapsto w = \frac{z-i}{z+i} \in \mathfrak{D} \tag{6.54}$$

で与えられる．$w = \xi + i\eta$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{dx\, dy}{y^2} &= \frac{4\, d\xi\, d\eta}{(1-|w|^2)^2} \quad (\text{不変測度}), \\ y &= \frac{1}{|1-w|^2}\,(1-|w|^2). \end{aligned} \tag{6.55}$$

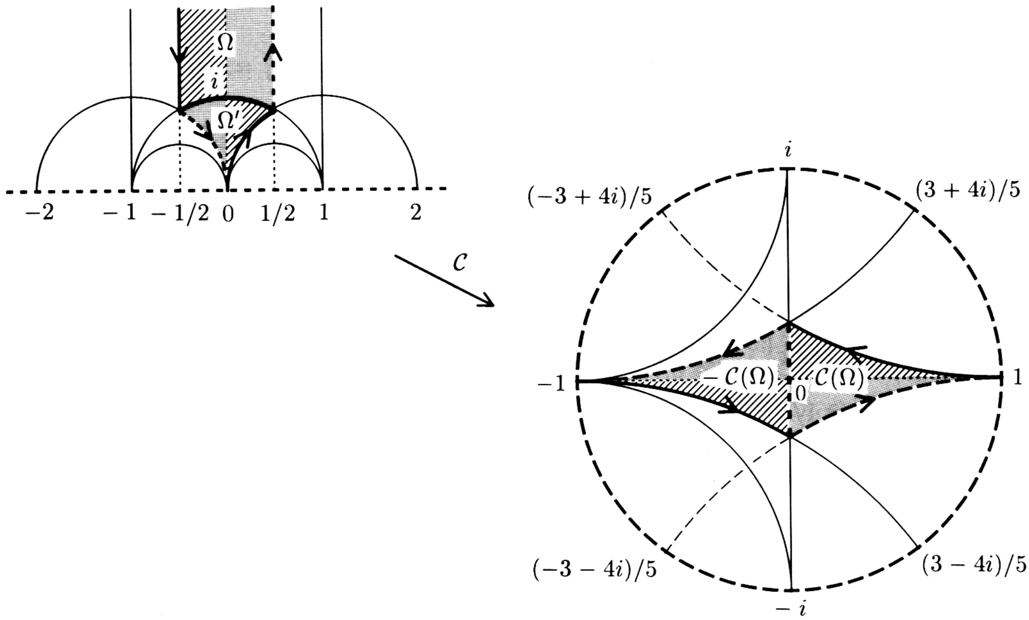


図 6.2. ケーリー変換と単位円板 $\mathfrak{D}$ の基本領域 $\mathcal{C}(\Omega)$ と $\mathcal{C}(\sigma_2\cdot\Omega)=-\mathcal{C}(\Omega)$

図の説明： $\mathcal{C}(i)=0$, $\mathcal{C}(1)=-i$, $\mathcal{C}(-1)=i$, である．左図の半直線 $\Re z=0,\varepsilon/2\,(\varepsilon=\pm1)$, は，$w=\mathcal{C}z$ によって，それぞれ，直線 $\Im w=0$, および，中心 $1-2\varepsilon i$, 半径 2 の円の円弧に写る (いずれも点 $1=\mathcal{C}(\infty)$ を通る)．また，左図の単位円 $|z|=1, |z-\varepsilon|=1$, の半円弧はそれぞれ，直線 $\Re w=0$, および，中心 $-1-2\varepsilon i$, 半径 2 の円の円弧に写る (点 $-1=\mathcal{C}(0)$ を通り，境界 $\partial\mathfrak{D}$ の円 $|w|=1$ と $(3-4\varepsilon i)/5$ で交わる)．$\mathfrak{D}$ 内でのこれらの円弧の交点は $(-2+\sqrt{3})\varepsilon i$ である．また，$\mathcal{C}(\sigma_2\cdot z)=-\mathcal{C}z$ であるから，その w への作用は，原点 O を中心とする 180° の回転である．読者よ，これらの計算を確かめよ．

変換 $\mathcal{C}z$ は分数変換として行列 $J=\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}$ に対応するので，$\mathfrak{H}$ 上の分数変換 (6.1) は次のように $\mathfrak{D}$ 上の分数変換に写される： $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して，

$$\widetilde{g}=JgJ^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\overline{\beta}&\overline{\alpha}\end{pmatrix},\quad ここに,\ \begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\{(a+d)+i(b-c)\},\\ \beta=\frac{1}{2}\{(a-d)-i(b+c)\},\end{cases}\tag{6.56}$$

とおけば，$z\mapsto g\cdot z$ に対応するのは，

$$\mathfrak{D}\ni w\longrightarrow\widetilde{g}\cdot w=\frac{\alpha w+\beta}{\overline{\beta}w+\overline{\alpha}}\in\mathfrak{D}\tag{6.57}$$

である．また，g の像 $\widetilde{g}$ のなす群は $SU(1,1)$ である．ここに，p,q を正整数とするとき，$n=p+q$, $J_{p,q}=\mathrm{diag}(-E_p,E_q)$ とおいて，

$$\begin{aligned}U(p,q)&:=\{\,g\in GL(n,\mathbb{C})\ ;\ g^*J_{p,q}g=J_{p,q}\,\},\\ SU(p,q)&:=U(p,q)\cap SL(n,\mathbb{C}),\end{aligned}\tag{6.58}$$

と定義する一連の行列群があり，$SU(1,1)$ は最も基本的なものである．

問題 6.3. (i) 群 $SU(1,1)$ は次のように特徴づけられることを示せ：

$$SU(1,1) = \left\{ v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \ ; \ \det v = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}. \tag{6.59}$$

(ii) 対応 $\Psi : g \mapsto \widetilde{g}$ は，$SL(2,\mathbb{R})$ から $SU(1,1)$ の上への同型写像であることを示せ．

そこで，群 $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現 $(T_\ell, \mathcal{H}_\ell), \mathcal{H}_\ell = L_2(\mathfrak{H}; d\mu_\ell)$, を同型写像 $\Psi(g) = \widetilde{g}$ を通じて，群 $SU(1,1)$ の表現として書き直してみよう．ℓ を整数とする．$f \in \mathcal{H}_\ell$ に対し，$F(w) := (1-w)^\ell f(\Psi^{-1}(w))$ とおくと，(6.55) により，

$$\iint_{\mathfrak{H}} |f(z)|^2 d\mu_\ell(z) = \iint_{\mathfrak{D}} |F(w)|^2 \frac{4d\xi d\eta}{(1-|w|^2)^{-\ell+2}}. \tag{6.60}$$

$\widetilde{\Psi}(f) = F$ とおけば，$\widetilde{\Psi}$ は，$\mathcal{H}_\ell$ から $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell := L_2(\mathfrak{D}; d\widetilde{\mu}_\ell)$, $d\widetilde{\mu}_\ell(w) := 4d\xi d\eta/(1-|w|^2)^{-\ell+2}$, の上への同型写像である．そこで表現作用素の変換を見るのに，$u = \Psi(g)$ とし，$h = g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対応して $\widetilde{h} = u^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)$ とするとき，$\widetilde{T}_\ell(u)F := \widetilde{\Psi}\big(T_\ell(g)f\big)$ によって，$\widetilde{T}_\ell(u)$ を定義すれば，

$$\big(\widetilde{T}_\ell(u)F\big)(w) = (\overline{\beta}w + \overline{\alpha})^\ell F\left(\frac{\alpha w + \beta}{\overline{\beta}w + \overline{\alpha}}\right) \tag{6.61}$$

を得る．これを図示すれば，相関作用素 $\widetilde{\Psi}$ を含む可換図形を得る：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_\ell & \ni & f & \xrightarrow{\ g\ } & T_\ell(g)f & \in & \mathcal{H}_\ell \\ & \widetilde{\Psi}\big\downarrow & & \circlearrowright & & \big\downarrow\widetilde{\Psi} & \\ \widetilde{\mathcal{H}}_\ell & \ni & F & \xrightarrow[u=\Psi(g)]{} & \widetilde{T}_\ell(u)F & \in & \widetilde{\mathcal{H}}_\ell \end{array}$$

問題 6.4. 表現作用素 $\widetilde{T}_\ell(u)$ の公式 (6.61) を証明せよ．

ここで得られたユニタリ表現 $(\widetilde{T}_\ell, \widetilde{\mathcal{H}}_\ell)$ を調べてみよう．そして，問題 6.4.2 に答えよう．まず，$SL(2,\mathbb{R})$ の極大部分群 $K = SO(2)$ に対応する $SU(1,1)$ の部分群 $\widetilde{K} := \Psi(K)$ は，

$$\widetilde{K} = \left\{ \widetilde{u}_2(\theta) := \Psi(u_2(\theta)) = \mathrm{diag}(e^{-i\theta}, e^{i\theta}) \right\} \tag{6.62}$$

である．そして，$\widetilde{K} \ni \widetilde{u}_2(\theta) \mapsto \lambda = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ により，1 次元トーラス $\mathbb{T}$ に同型であり，その既約表現は 1 次元で，どれかの $\chi_m(\widetilde{u}_2(\theta)) = \lambda^m, m \in \mathbb{Z}$, に一致する．表現 $\widetilde{T}_\ell$ を $\widetilde{K}$ に制限してみると，$\widetilde{u}_2(\theta)^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$ であるから，

$$\widetilde{T}_\ell(\widetilde{u}_2(\theta))F(w) = \lambda^\ell F(\lambda^2 w), \quad \lambda = e^{i\theta},$$

となる．χ_m の働く部分空間 $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\chi_m)$ は，方程式 $\widetilde{T}_\ell(\widetilde{u}_2(\theta))F(w) = \lambda^m F(w)$ で決定される．$w \in \mathfrak{D}$ を'極座標'で表して，$w = re^{i\varphi}, r = |w|$, とおくと，$\lambda^2 w = re^{i(\varphi+2\theta)}$ であるから，

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\chi_m) = \left\{ F(w) = R_F(r)e^{i(m-\ell)\varphi/2} \; ; \; \|F\|^2 = 8\pi\|R_F\|^2 < \infty \right\},$$

$$\|R_F\|^2 = \int_0^1 |R_F(r)|^2 \frac{r\,dr}{(1-r^2)^{-\ell+2}}.$$

すると，F が w の一価関数であるから，$m \not\equiv \ell \pmod 2$ のときには，$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\chi_m) = \{0\}$ である．$m \equiv \ell$ のときには，$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\chi_m)$ は無限次元である．

つぎに，$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell$ の正則関数よりなる部分空間 $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}$ を考えよう．F が単位円板 $\mathfrak{D}$ で正則ならば，F は $\mathfrak{D}$ で広義一様に収束する w の冪級数に展開される．$F(w) = \sum_{0 \le n < \infty} a_n w^n$ とすると，

$$\widetilde{T}_\ell(\widetilde{u}_2(\theta))F(w) = \sum_{0 \le n < \infty} a_n \lambda^{\ell+2n} w^n,$$

かつ，$F_n(w) := w^n$ のノルムは，

$$\|F_n\|^2 = 8\pi \int_0^1 \frac{r^{2n+1}\,dr}{(1-r^2)^{-\ell+2}} = 4\pi \int_0^1 t^n (1-t)^{\ell-2}\,dt = 4\pi B(n+1, \ell-1)$$

であるから，次の定理の主張 (i) を得る．主張 (ii) の証明は問題とする．

定理 6.8. (i)　$\widetilde{G} = SU(1,1)$ の表現 $(\widetilde{T}_\ell, \widetilde{\mathcal{H}}_\ell)$ における不変な閉部分空間 $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}$ は，$\ell < 2$ のときは $\{0\}$ である．$\ell \ge 2$ のときは，1 次元部分空間 $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}(\chi_m) = \mathbb{C} \cdot F_m$ の $m \equiv \ell \pmod 2, m \ge \ell$, にわたる直和である．すなわち，$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}$ 上の $\widetilde{G}$ の表現を極大コンパクト群 $\widetilde{K}$ に制限すると，

$$(\widetilde{T}_\ell|_{\widetilde{K}}, \widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}) \cong \sum\nolimits^{\oplus} \chi_m \quad (m \ge \ell,\ m \equiv \ell \pmod 2). \tag{6.63}$$

(ii)　ユニタリ表現 $(\widetilde{T}_\ell, \widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}), \ell \ge 2$, は，既約である．

$\widetilde{G} = SU(1,1)$ の離散系列の既約ユニタリ表現 $(\widetilde{T}_\ell, \widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}), \ell \ge 2$, に対応して $G = SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現 $(T_\ell, \mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}})$ も既約であるが，これを G の**正則離散系列**の表現とよび，記号で D_ℓ^+ と書く．$\widetilde{G}$ の表現としては，$\widetilde{D}_\ell^+$ と書く．また，反正則関数 $F(w)$ (すなわち，$\overline{F(w)}$ が正則) の空間 $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{ahol}}$ をとり，表現の定義 (6.61) における掛け算因子 $(\overline{\beta}w + \overline{\alpha})^\ell$ を $(\beta\overline{w} + \alpha)^\ell$ で置き換えて，表現 $\widetilde{T}_\ell'$ を定義すると，**反正則離散系列**の表現 $D_\ell^-, \ell \ge 2$, が得られる．議論は $(\widetilde{T}_\ell, \widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}})$ の場合と同様である．$\widetilde{G}$ のこの既約表現 $\widetilde{T}_\ell'$ を，極大コンパクト部分群 $\widetilde{K}$ に制限して得られる (6.63) と類似の分解公式においては，現れる χ_m は，$m \equiv \ell, m \le -\ell$, である．

問題 6.5. (i)　表現 $\pi = \widetilde{T}_\ell$ の無限小形を $d\pi$ と書く．作用素 $d\pi(X), X = P, Q, Y_\pm', C \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, のベクトル F_m への作用を求めよ．

(ii)　作用素 $d\pi(Y_\pm')F_m$ の具体形を用いて，表現 π の既約性を証明せよ．

〔ヒント：以下の **6.5.2(II)** の証明の議論に倣う.〕

6.5 群 $SL(2,\mathbb{R})$ の既約表現の構成

前節では，$G = SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列の表現を構成したが，ここでは連続主系列表現 $\pi_{\varepsilon,s}, \varepsilon = 0, 1$, $s = i\rho$, を含む既約表現の族を，誘導表現として統一的に構成しよう．

6.5.1 共役表現，不変エルミート内積，ユニタリ化可能

T を，ある群 G の複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形表現とする．T の**共役**（きょうやく）**表現** $\check{T}$ とは，$\check{T}(g) := T(g^{-1})^*$ $(g \in G)$ で定義される．ここに，B^* は有界線形作用素 B の共役作用素である．T がユニタリ表現であることは，$\check{T} = T$ と同値である．

$\mathcal{H}$ のエルミート内積とは，$v, w \in \mathcal{H}$ に対して決まる $h(v,w) \in \mathbb{C}$ であって，v に関して線形で，$h(w,v) = \overline{h(v,w)}$ $(v, w \in \mathcal{H})$ を満たすものである．$h(v,w)$ が v, w に関して連続であるとする．このとき，有界なエルミート型作用素 $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が一意的に存在して，

$$h(v,w) = \langle Av, w \rangle \quad (v, w \in \mathcal{H})$$

となる．ここに，$\langle v, w \rangle$ は $\mathcal{H}$ の内積を表し，A が**エルミート型**であるとは，$A^* = A$ となっていることである．エルミート内積 $h(v,w)$ が **G-不変**であるとは，

$$h(T(g)v, T(g)w) = h(v,w) \quad (g \in G, v, w \in \mathcal{H})$$

を満たすことである．$\langle AT(g)v, T(g)w \rangle = \langle T^*(g)AT(g)v, w \rangle$ であるから，

$$T^*(g)AT(g) = A, \qquad \text{したがって，} AT(g) = \check{T}(g)A \quad (g \in G), \tag{6.64}$$

となる．よって，A は表現 T とその共役 $\check{T}$ の間の相関作用素である．このとき，$\mathrm{Ker}(A) := \{ v \in \mathcal{H}\,;\, Av = 0 \}$ は G-不変な閉部分空間であり，商空間 $\mathcal{H}/\mathrm{Ker}(A)$ 上には，T から商表現 T^A が導かれる．そして，A は T^A から $(\check{T}, \mathcal{H})$ の中への同型写像を与える．したがって，不変エルミート内積が存在するためには，T のある商表現と $\check{T}$ のある部分表現が同値でなければならない．

いま，不変エルミート内積 $h(v,w)$ が正定値，すなわち，$h(v,v) \geq 0$ かつ $h(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, であるとき，$\mathcal{H}$ に $h(v,w)$ により新たに前ヒルベルト空間の構造が入る．必要ならば完備化して，新しいヒルベルト空間を得る．ここには，表現 T が自然に拡張されて，ユニタリ表現になる．このとき，もとの表現 $(T, \mathcal{H})$ を**ユニタリ化可能**であるという．

6.5.2 誘導表現 $\pi_s, \pi_{\varepsilon,s}$

G の部分群 $N = \{ n(x) \}, A = \{ a(y) \}, K = \{ k(\theta) \}$ を (6.2) の通りとする．A の K における中心化群 $M = Z_K(A)$ をとると，$M = \{ \pm E_2 \}$ となり，これは G の中心と一致す

る．部分群 NAM の N では自明な有限次元既約表現をとって，それを G に誘導するのが，連続系列の表現を作る標準的な方法である．

可換群 AM の有限次元既約表現は1次元の指標である．したがって，

$$\chi_{A,s}(a(y)) := (\sqrt{y})^s = y^{s/2}\ (s \in \mathbb{C}), \quad \chi_{M,\varepsilon}(\kappa E_2) := \kappa^\varepsilon\ (\varepsilon = 0, 1), \tag{6.65}$$

のテンソル積である．そこで，

$$\pi_{\varepsilon,s} := \mathrm{Ind}_{NAM}^G\big((\mathbf{1}_N \cdot \chi_{A,s}) \otimes \chi_{M,\varepsilon}\big), \quad \pi_s := \mathrm{Ind}_{NA}^G\big(\mathbf{1}_N \cdot \chi_{A,s}\big), \tag{6.66}$$

とおく．のちにすぐ分かるように，$\pi_s = \pi_{0,s} \oplus \pi_{1,s}$ (直交直和) である．そこで，ここでは，まず，π_s を調べよう．

5.7.3 における誘導表現のスキームでは，部分群 $H \subset G$ からの誘導表現のスキームに均質空間 G/H を用いた．ここでは，右左を反転させて，左剰余類の空間 $H\backslash G$, $H = NA$, を用いる．これには $g_0 \in G$ が右から，$H\backslash G \ni Hg \mapsto Hgg_0$ と作用する．したがって，**5.7.3** の「変換公式3」も，この場に合うように少し翻訳し直して，π_s に対する公式を導こう．

定理 6.1 の分解定理により，$G = NAK$ であるから，均質空間 $H\backslash G, H = NA$, の G 内の断面として，K をとることができる．そのとき，類 $\omega = Hk(\theta)$ に $g_0 = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)$ を作用させて考えると，$k(\theta)g_0 = n(x')a(y')k(\theta')$ として，$\omega \cdot g_0 = Hk(\theta)g_0 = Hk(\theta')$ であり，$k(\theta)g_0 = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ とおけば，(6.4) により，

$$z' = x' + y'i = \frac{Ai + B}{Ci + D}, \quad y' = \frac{1}{|Ci + D|^2}, \quad e^{i\theta'} = \frac{Ci + D}{|Ci + D|}, \tag{6.67}$$

である．$H\backslash G \cong K$ の上の準不変測度として，$d\mu_K(k(\theta)) = (2\pi)^{-1}d\theta$ をとる．

補題 6.9. $K \cong H\backslash G$ の上の測度は，g_0 によって次の変換を受ける：

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{1}{|Ci + D|^2} = y'. \tag{6.68}$$

証明. (6.67) の $e^{i\theta'}$ の式の両辺を，θ で微分する．

別証. $g = n(x)a(y)k(\theta)$ とおくと，定理 6.2 により，$d\mu_G(g) = 2^{-1}y^{-2}dx\,dy\,d\theta$. また，$d\mu_G(gg_0) = d\mu_G(g)$ である．この左辺に，$gg_0 = n(x)a(y)n(x')a(y')k(\theta') = n(x + yx')a(yy')k(\theta')$ の座標による表示を入れると，$y'^{-1}d\theta' = d\theta$ を得る．□

まず，C^∞ 級の関数を相手にして話を進める．$C^\infty(G)$ の元 f で次の条件 (F′1) を満たすもの全体のなす空間 $C^\infty(G \,\|\, H, \varpi)$ をとる：

(F′1)　　$f(hg) = \varpi(h)f(g)\ \ (h \in H = NA,\ g \in G), \quad \varpi = \mathbf{1}_N \cdot \chi_{A,s},$

そして，その空間の上で右移動による G の作用を考える：

$$R_\varpi(g_0)f(g) := f(gg_0) \quad (g, g_0 \in G).$$

これを，$H\backslash G$ の断面 K を使って書き直すとどうなるか．$g = n(x)a(y)k(\theta)$, $k(\theta)g_0 = h'k(\theta'), h' = n(x')a(y')$, とおく．$f$ に，その K 上への制限 $\psi(e^{i\theta}) := f(k(\theta))$ を対応させると，$C^\infty(G \,\|\, H, \varpi) \ni f \mapsto \psi \in C^\infty(K)$ は同型写像である．また，$R_\varpi(g_0)f$ の像は $\varpi(h')\psi(e^{i\theta'})$ となる．これに測度の変換のヤコビアンの分を補正して，次の変換公式を得る：

$$\begin{aligned}\pi_s(g_0)\psi(e^{i\theta}) \;&:=\; \left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)^{1/2}(\sqrt{y'})^s\psi(e^{i\theta'}) = y'^{(s+1)/2}\psi(e^{i\theta'}) \qquad (6.69)\\ &=\; \frac{1}{|Ci+D|^{s+1}}\,\psi\left(\frac{Ci+D}{|Ci+D|}\right),\end{aligned}$$

ここに，$k(\theta)g_0 = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D\end{smallmatrix}\right)$．空間 $C^\infty(K)$ を完備化した $\mathcal{H} = L_2(K)$ を表現空間として，G の有界線形表現 π_s $(s \in \mathbb{C})$ が得られた．実際，作用素 $\pi_s(g_0)$ のノルムの評価は，次のようになる．対称行列 $g_0{}^t g_0$ を考えれば，$y' + y'^{-1} \le \mathrm{tr}(g_0{}^t g_0)$ であるから，$\|\pi_s(g_0)\|^2 \le \mathrm{tr}(g_0{}^t g_0)^{|\Re(s)|}$．ここに，$\Re(s)$ は s の実部を表す．

表現 π_s の $\pi_{0,s}, \pi_{1,s}$ への直和分解と K-スペクトル． 部分群 $M = \{\kappa E_2\,;\, \kappa = \pm 1\}$ は G の中心であるから，$\pi_s(-E_2)$ は表現 π_s の相関作用素である．そこで，部分空間 $\mathcal{H}_\varepsilon$ を

$$\mathcal{H}_\varepsilon \;=\; \{\psi \in \mathcal{H}\,;\, \pi_s(-E_2)\psi = (-1)^\varepsilon\psi\} \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

で定義すると，それらは不変部分空間である．その上への π_s の制限をそれぞれ $\pi_{\varepsilon,s}$ と書く．K への制限 $\pi_{\varepsilon,s}|_K$ の既約分解が K-スペクトルを与える：

$$\pi_{\varepsilon,s}|_K \;\cong\; \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\oplus} \chi_{2n+\varepsilon}\,, \qquad \chi_p(k(\theta)) := e^{ip\theta}. \qquad (6.70)$$

6.5.3 表現 $\pi_s, \pi_{\varepsilon,s}$ の無限小形

$\mathcal{H}$ の稠密な部分空間 $C^\infty(K)$ の上で，$d\pi_s(X), X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, を求めよう．$\pi_{\varepsilon,s}$ に対しては，$C^\infty(K)$ の部分空間の上への制限であるから，全く同じ形をしている．

さて，断面 K の元 $k(\theta)$ に対して，$k(\theta)e^{tX} = n(x_t)a(y_t)k(\theta_t)$ とおく．この両辺を t につき $t = 0$ で微分する．$\alpha = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 x_t$, $\beta = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 y_t$, $\gamma = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \theta_t$, とおくと，$t = 0$ で，$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\theta_0 = \theta$, であるから，

$$k(\theta)X = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}k(\theta) + \beta\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2\end{pmatrix}k(\theta) + \gamma\begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}$$

これから α, β, γ が θ の関数として求まる．そこで，$\pi_s(e^{tX})\psi(e^{i\theta}) = y_t{}^{(s+1)/2}\psi(e^{i\theta_t})$ の両辺を $t = 0$ で微分して，

$$d\pi_s(X)\psi(e^{i\theta}) = \left(\frac{s+1}{2}\beta + \gamma\frac{d}{d\theta}\right)\psi(e^{i\theta}) \quad (\psi \in C^\infty(K)) \qquad (6.71)$$

となる．この公式を，$X = H_{\mathfrak{k}}, P, Q$ に適用して計算すれば次の公式を得る：

$$\begin{aligned} d\pi_s(H_{\mathfrak{k}}) &= d/d\theta, \\ d\pi_s(P) &= -(s+1)\sin(2\theta) + \cos(2\theta)\cdot d/d\theta, \\ d\pi_s(Q) &= (s+1)\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\cdot d/d\theta. \end{aligned} \tag{6.72}$$

定理 6.10. $G = SL(2,\mathbb{R})$ の有界線形表現 π_s の無限小形において，

$$\begin{aligned} d\pi_s(Y'_+) &= e^{2i\theta}\big((s+1)i + d/d\theta\big), \\ d\pi_s(Y'_-) &= e^{-2i\theta}\big(-(s+1)i + d/d\theta\big), \\ 8\,d\pi_s(C) &= d\pi_s(-H_{\mathfrak{k}}{}^2 + P^2 + Q^2) = s^2 - 1. \end{aligned} \tag{6.73}$$

問題 6.6. 表現 π_s の無限小形における $d\pi_s(X), X = H_{\mathfrak{k}}, P, Q,$ の公式 (6.72) は，G の正則表現 R の無限小形 r における公式 (6.28) から直接得られる．これを証明せよ．

〔ヒント： $H = NA$ とおく．**6.5.2** 節に現れた $C^\infty(G)$ の G-不変部分空間 $C^\infty(G\,\|\,H,\varpi)$ に対して，変換公式 (6.69) におけるヤコビアンの分だけ補正して，$\varpi = \mathbf{1}_N\cdot\chi_{A,s}$ を $\varpi' = \mathbf{1}_N\cdot\chi_{A,s+1}$ に置き換えた部分空間 $C^\infty(G\,\|\,H,\varpi')$ を考える．その上への R の制限から，表現 π_s が導かれている．この関係により，$f\in C^\infty(G\,\|\,H,\varpi')$ に対して，$f(n(x)a(y)k(\theta)) = y^{(s+1)/2}\psi(e^{i\theta})$ とおくと，$r(X)f$ の公式から $d\pi_s(X)\psi$ の公式を得る．〕

6.5.4 誘導表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ の性質

表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ の K-スペクトルおよび，カシミール元 C の固有値 $d\pi_{\varepsilon,s}(C) = \frac{1}{8}(s^2-1)$ は，すでに得られた．ここでは，ユニタリ性，既約性，同値性などに関する結果を，列挙しておこう．

(I) (共役表現，ユニタリ性，不変エルミート内積) 表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ の共役表現は，$\pi_{\varepsilon,-\bar{s}}$ である．とくに，$s = i\rho$ $(\rho\in\mathbb{R})$ のときは，$-\bar{s} = s$ なので，$\pi_{\varepsilon,i\rho}$ はユニタリ表現である．また，$\pi_{\varepsilon,s}$ が不変エルミート内積をもつためには，s は実数または純虚数でなければならない．

証明. $g_0\in G$ をとり $k(\theta)g_0 = n(x')a(y')k(\theta')$ とする．$\psi_1,\psi_2\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\langle\pi_{\varepsilon,s}(g_0)\psi_1, \pi_{\varepsilon,-\bar{s}}(g_0)\psi_2\rangle = \int_K \psi_1(e^{i\theta'})\overline{\psi_2(e^{i\theta'})}\,y'^{s/2}\,\overline{y'^{-\bar{s}/2}}\,\frac{d\theta'}{d\theta}\,d\theta = \langle\psi_1,\psi_2\rangle.$$

また，$\pi_{\varepsilon,s}$ が不変エルミート内積をもつためには，その共役表現 $\pi_{\varepsilon,-\bar{s}}$ との間に相関作用素が存在する必要がある．したがって，それらのカシミール作用素の固有値が一致する：$s^2 - 1 = \bar{s}^2 - 1$．よって，$s = \bar{s}$ または $s = -\bar{s}$.

(II) (既約性) 表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ は，次の条件を満たす (ε, s) を除いて既約である：

(除外条件) $\varepsilon = 0$ かつ $s\in 2\mathbb{Z}+1$; $\varepsilon = 1$ かつ $s\in 2\mathbb{Z}$.

証明. $\mathcal{H}_\varepsilon$ の完全正規直交基底として，$\chi_{2n+\varepsilon}(k(\theta)) = e^{i(2n+\varepsilon)\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, がとれる．この基底の元に $d\pi_{\varepsilon,s}(Y'_\pm)$ を作用させると，

$$d\pi_{\varepsilon,s}(Y'_\pm)\chi_{2n+\varepsilon} = i\big[(2n+\varepsilon) \pm (s+1)\big]\chi_{2(n\pm1)+\varepsilon} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となる．そして，(ε, s) が上の除外条件を満たさなければ，$d\pi_{\varepsilon,s}(H_\mathfrak{k})$ と昇降演算子 $d\pi_{\varepsilon,s}(Y'_\pm)$ によって，完全正規直交基底 $\{\chi_{2n+\varepsilon}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ が代数的に張るベクトル空間 V_ε の上に，複素リー環 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の既約な表現を与える．これは，元になっている群 G の表現 $(\pi_{\varepsilon,s}, \mathcal{H}_\varepsilon)$ が既約であることを意味する．なぜなら，$\mathcal{H}_\varepsilon$ 上の，部分空間 $\mathbb{C}\chi_n$ への正射影 $P_{\chi_n} = \int_K \pi_{\varepsilon,s}(k)\overline{\chi_n(k)}\,d\mu_K(k)$ をとると，不変な閉部分空間 W に対して，$P_{\chi_n}W \subset W$ であり，かつ，W は $\{P_{\chi_n}W\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ で，L_2 の意味で張られる (なぜか？) からである．

(III) (部分商表現) 群 G の表現 $(T, \mathcal{H})$ に対して，2 つの不変閉部分空間 $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ があったとき，商空間 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$ の上に導かれる表現を，T の**部分商表現** (subquotient representation) という．

我々の $G = SL(2,\mathbb{R})$ の場合，上で除外された (ε, s) に対する表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ の部分商を用いて構造を記述するには，その無限小形 $d\pi_{\varepsilon,s}$ を V_ε の上で代数的に考えて解析できる．このように，一般にリー環 $\mathfrak{g}$ の表現からリー群 G の表現の性質を出すのは，一般論としてはかなり込み入ってくるのでここでは割愛する．次の定理の主張は，定理 6.10 の $d\pi_s$ の具体形を使えば，すべて計算によって示される．これは，第 II 部の定理 9.3 (＋問題 9.6) と同値な内容である．

定理 6.11. リー環 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現として，$(d\pi_{\varepsilon,s}, V_\varepsilon)$ の構造は次の通り．

(イ) $\varepsilon = 0$ の場合：$s = 2\ell+1$ ($\ell \in \mathbb{Z}, \ell \geq 0$) とする．無限次元の 2 つの既約部分表現 $\mathcal{D}^+_{2\ell+2}, \mathcal{D}^-_{2\ell+2}$ がある．その商表現 $d\pi_{0,2\ell+1}/(\mathcal{D}^+_{2\ell+2} \oplus \mathcal{D}^-_{2\ell+2})$ は，$2\ell+1$ 次元の既約表現 $F_{2\ell+1}$ である．$s = -(2\ell+1)$ のときには，$d\pi_{0,s}$ と $d\pi_{0,-s}$ とは，共役の関係にあるので，上とは部分表現と商表現の関係が逆転している．

(ロ) $\varepsilon = 1$ の場合：$s = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}, \ell \geq 0$) とする．$\ell = 0$ のときには，$d\pi_{1,0} = \mathcal{D}^+_1 \oplus \mathcal{D}^-_1$ であり，$\ell \geq 1$ のときには，無限次元の 2 つの既約部分表現 $\mathcal{D}^+_{2\ell+1}, \mathcal{D}^-_{2\ell+1}$ がある．その商表現 $d\pi_{0,2\ell}/(\mathcal{D}^+_{2\ell+1} \oplus \mathcal{D}^-_{2\ell+1})$ は，2ℓ 次元の既約表現 $F_{2\ell}$ である．$s = -2\ell$ のときには，部分表現と商表現の関係が逆転している．

(ハ) これらの既約表現の K-スペクトルは，次の通り：

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}_K(\mathcal{D}^\pm_p) &= \{\pm(p+2n)\ ;\ n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},\\ \mathrm{Spec}_K(F_p) &= \{q\ ;\ q \in \mathbb{Z}, -p \leq q \leq p,\ q \equiv p\,(\mathrm{mod}\ 2)\}.\end{aligned}$$

定理の (イ) の状況を $\mathfrak{g}$-モジュールの準同型の完全系列として次のように書ける．(ロ) の場合も同様である．

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^+_{2\ell+1} \oplus \mathcal{D}^-_{2\ell+1} \longrightarrow d\pi_{0,2\ell+1} \longrightarrow F_{2\ell+1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F_{2\ell+1} \longrightarrow d\pi_{0,-2\ell-1} \longrightarrow \mathcal{D}^+_{2\ell+1} \oplus \mathcal{D}^-_{2\ell+1} \longrightarrow 0.$$

(IV) (ユニタリ化可能表現)　実リー環 $\mathfrak{g}$ の表現 (ϖ, V) がユニタリ，あるいは，無限小的にユニタリ (infinitesimally unitary) であるとは，V に次の条件を満たす内積が入っていることである (第 9 章参照)：

$$\langle \varpi(X)v_1, v_2\rangle + \langle v_1, \varpi(X)v_2\rangle \;=\; 0 \quad (X \in \mathfrak{g}). \tag{6.74}$$

上の (II)〜(III) のリストに現れた $\mathfrak{g}$ の表現に対応する G の表現がユニタリ化可能であるためには，その無限小形がユニタリ化可能である必要がある．実際，群 G の既約表現 π がユニタリだったとすると，その内積で，

$$\langle \pi(e^{tX})v_1, \pi(e^{tX})v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \quad (X \in \mathfrak{g})$$

となるので，その両辺を $t=0$ で微分して (微分できるためには，v_1, v_2 を適当に選ぶ)，$\varpi = d\pi$ に対して，(6.74) を得る．

逆に，G の表現 π に対して，その無限小形 $d\pi$ が $\mathfrak{g}$ の表現としてユニタリ化可能なとき，π を**無限小的にユニタリ化可能**というが，そのとき，もとの π が G の表現としてユニタリ化可能かどうか，という問題は簡単ではない．我々の当面の場合には，詳しい議論は省くが，これは肯定的である．これによって，$\pi_{\varepsilon,s}$ とそれらの部分商表現のうちから，ユニタリ化可能表現を求めてみると次のようになる．

まず，$\pi_{\varepsilon,s}, s = i\rho, \rho \in \mathbb{R}$, はもともとユニタリになっている．また，$\mathfrak{g}$ の既約表現 $\mathcal{D}^\pm_\ell, \ell \geq 2$, は，$G$ の離散系列の表現 $D^\pm_\ell$ の無限小形であることが，問題 6.5 の $\widetilde{T}_\ell$ の無限小形と比較して分かる．

さらに，他の既約表現のうち，ユニタリ化可能なものは，定理 6.10 の無限小形を用いて，計算によって決定できる．その結果をまとめると，

定理 6.12. 群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ の，表現 $\pi_{\varepsilon,s}$ $(\varepsilon = 0,1; s \in \mathbb{C})$ およびそれらの部分商表現として現れる既約表現のうち，連続主系列の表現 $\pi_{\varepsilon,s}, s = i\rho, \rho \in \mathbb{R}$ $((\varepsilon, s) = (1,0)$ を除く)，離散系列の表現 $D^\pm_\ell, \ell \geq 2$, の他に，ユニタリ化可能な既約表現は，次の通り：

$\pi_{0,\rho}$　$(\rho \in \mathbb{R}, -1 < \rho < 1,\ \pi_{0,\rho} \cong \pi_{0,-\rho}$; **補系列**の表現$)$,
$D^\pm_1$　(離散系列表現 $D^\pm_\ell, \ell \geq 2$, の極限; $\pi_{1,0} \cong D^+_1 \oplus D^-_1$),
$F_1 = \mathbf{1}_G$ (1 次元の自明表現),

のちの **9.4** 節においては，G のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の，すべての既約ハリッシュ-チャンドラ加群と，そのうちでユニタリ化可能なものを決定している (系 9.5)．結果として，“$\mathfrak{g}$ の任意の既約ハリッシュ-チャンドラ加群は，どれかの $d\pi_{\varepsilon,s}$ の部分商として入っている”．そして，リー環 $\mathfrak{g}$ の既約ハリッシュ-チャンドラ加群は，リー群 G の既約表現と 1 対 1 に対応している (証明は簡単ではない)．

(V) (同値関係，相関作用素，不変エルミート内積) 群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ の，表現 $\pi_{\varepsilon,s}, \pi_{\varepsilon',s'}$ $(\varepsilon, \varepsilon' = 0,1;\ s, s' \in \mathbb{C})$ の間に 0 でない相関作用素が存在するとすると，それらの K-型とカシミール作用素の固有値の一致から，$\varepsilon = \varepsilon', s = \pm s'$ が分かる．そこで，$\pi_{\varepsilon,s}$ から $\pi_{\varepsilon,-s}$ への相関作用素 S_s を与えてみよう．これは，s によって，(特異) 積分作用素になったり，微分作用素になったりする．

いま，$S_{\varepsilon,s}$ が積分核 $J_{\varepsilon,s}(k,k')$, $k,k' \in K$, をもつ積分作用素だとする：

$$S_{\varepsilon,s}\psi(e^{i\theta}) = \int_K J_{\varepsilon,s}(k(\theta),k(\theta'))\psi(e^{i\theta'})d\mu_K(k(\theta')).$$

$S_{\varepsilon,s} \cdot \pi_{\varepsilon,s} = \pi_{\varepsilon,-s} \cdot S_{\varepsilon,s}$ という性質から，積分核が次のものの定数倍であることが分かる：

$$J_{\varepsilon,s}(k(\theta),k(\theta')) = \sin^{\varepsilon}(\theta-\theta')\,|\sin(\theta-\theta')|^{s/2-\varepsilon}.$$

これは，$\Re(s/2+1) > 0$ のときには，実際に積分が収束して，相関作用素 $S_{\varepsilon,s}$ を与える．パラメータ s がこの半平面の外側にあるときには，複素変数 s の，作用素の値をとる正則関数として解析接続していく．これが可能なことは，具体的な計算で示す．結果として，全平面 $\mathbb{C}$ に作用素値の有理関数として接続でき，(II) における除外点 (ε, s) 以外で正則で，除外点では零点や極が現れる．この議論もなかなか面白いものである．

s が実数のときには，$S_{\varepsilon,s}$ は，(I) における議論に従って，$\pi_{\varepsilon,s}$ の不変エルミート内積を与える．これが正定値であれば，$\pi_{\varepsilon,s}$ はユニタリ化可能であるが，そうして現れたのが，補系列のユニタリ表現 $\pi_{0,\rho}$ である．また，非負定値であれば，商表現がユニタリ化可能であるが，こうして現れるのが，離散系列の表現の直和 $D_\ell^+ \oplus D_\ell^-$ である．

$S_{\varepsilon,s}$ を，$\mathcal{H}_\varepsilon$ の基底ベクトル $\psi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ に適用すると，$S_{\varepsilon,s}\psi_n = c_n(\varepsilon,s)\,\psi_n$ で，係数は，

$$\begin{aligned} c_n(0,s) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{s/2}\cos(n\theta)\,d\theta \qquad (n \in 2\mathbb{Z}), \\ c_n(1,s) &= \frac{2}{\pi i}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{s/2}\sin(n\theta)\,d\theta \qquad (n \in 2\mathbb{Z}+1), \end{aligned}$$

となる．この係数 $c_n(\varepsilon,s)$ は，ベータ関数とも関連があって，その解析接続，零点，極と留数，などは作用素 $S_{\varepsilon,s}$ のそれらに対応している．第 9 章におけるリー環 $\mathfrak{g}$ の表現との関連に注目されたい．

結論として，同値関係として存在するのは，(ε, s) が除外条件を満たさないときには，$\pi_{\varepsilon,s} \cong \pi_{\varepsilon,-s}$ であり，除外点においては，定理 6.11 に述べたものである．

6.6 正則離散系列表現の行列要素

前 2 節において，離散系列と連続系列の既約表現を与えたが，さらに突っ込んでそれぞれの既約表現の個性を調べるのが望ましいが，ここでは，正則離散系列の表現 D_ℓ^+ の行列要

素の計算を試みてみることで我慢しよう．

ベクトル $F_n \in \widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}$, $F_n(w) = w^n$ $(w \in \mathfrak{D})$, の長さは，**6.4** 節で計算したように，

$$c_n = \sqrt{4\pi B(n+1, \ell-1)} = \sqrt{4\pi n!(\ell-2)!/(n+\ell-1)!}$$

である．すると，$F'_n = c_n^{-1}F_n, n \geq 0$, がヒルベルト空間 $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell^{\mathrm{hol}}$ の正規直交基底である．行列要素 $t_{pq}(u) := \langle \widetilde{T}_\ell(u)F'_q, F'_p \rangle$ を求める．一般の元 $u \in \widetilde{G}$ は，

$$u = \widetilde{u}_2(\theta_1)v_2(\tau)\widetilde{u}_2(\theta_2), \qquad v_2(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau \\ \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix}, \tag{6.75}$$

と書ける．$\widetilde{T}_\ell(\widetilde{u}_2(\theta_2))F'_q = e^{i(\ell+2q)\theta_2}F'_q$, $\widetilde{T}_\ell(\widetilde{u}_2(\theta_1))^{-1}F'_p = e^{-i(\ell+2p)\theta_1}F'_p$, であるから，

$$t_{pq}(u) = e^{i(\ell+2p)\theta_1}e^{i(\ell+2q)\theta_2}t_{pq}(v_2(\tau)). \tag{6.76}$$

そこで，$t_{pq}(v_2(\tau))$ を求めるのに，上の内積を積分で書くと，$w = re^{i\varphi}$ として，

$$t_{pq}(v_2(\tau)) = \frac{4}{c_pc_q}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\operatorname{sh}\tau\, w + \operatorname{ch}\tau)^\ell \left(\frac{\operatorname{ch}\tau\, w + \operatorname{sh}\tau}{\operatorname{sh}\tau\, w + \operatorname{ch}\tau}\right)^q \overline{w}^p \frac{d\varphi\, r\, dr}{(1-r^2)^{-\ell+2}}. \tag{6.77}$$

いま特に，$q = 0$ の場合を考えてみよう．$d\varphi$ に関する積分をまず実行すると，$p > \ell$ のときには，$t_{p0}(v_2(\tau)) = 0$ を得る．そして，$0 \leq p \leq \ell$ のときには，

$$\begin{aligned} t_{p0}(v_2(\tau)) &= \frac{4}{c_pc_0}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\operatorname{sh}\tau\, w + \operatorname{ch}\tau)^\ell \overline{w}^p \frac{d\varphi\, r\, dr}{(1-r^2)^{-\ell+2}} \\ &= \frac{4\cdot 2\pi}{c_pc_0}\binom{\ell}{p}(\operatorname{sh}\tau)^p(\operatorname{ch}\tau)^{\ell-p}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 t^p(1-t)^{\ell-2}dt \\ &= \sqrt{p!(\ell-1)!/(p+\ell-1)!}\,(\operatorname{ch}\tau)^\ell(\tanh\tau)^p. \end{aligned}$$

行列要素の第 0 列 $t_{p0}(u), p \geq 0$, においては，有限個の p を除いては，$t_{p0}(u) \equiv 0$ である．また，$0 \leq q \leq \ell$ の範囲にある q に対しても，第 q 列では，$t_{pq}(u) \equiv 0, p > \ell$, である．しかし，これは離散系列の表現における特別の現象であって，一般の無限次元既約ユニタリ表現においては，行列要素のどの列も，どの行も，無限個 0 でないものがある．

さて，$q > 0$ のときにも，行列要素 $t_{pq}(v_2(\tau))$ をできるだけ分かりやすく書いてみよう．$\tau = 0$ ならば，当然，$t_{pq}(v_2(\tau))|_{\tau=0} = \delta_{pq}$ となって，単位行列が現れる．

そこで，$\tau \neq 0$ とする．$A = \tanh\tau = \operatorname{sh}\tau/\operatorname{ch}\tau$ とおくと，積分表示 (6.77) の被積分関数において w につき正則な因子は，

$$(\operatorname{ch}\tau)^\ell(Aw+1)^{\ell-q}(w+A)^q$$

となるので，$\ell - q < 0$ のときも，$|w| < 1/|A|$ の範囲で w の冪級数に展開できる．$1/|A| > 1$ であるから，これは $|w| \leq 1$ において一様収束する．したがって，$\overline{w}^p$ を乗じて，$d\varphi$ で項別

積分すれば，単項式 w^p の係数と r^{2p} を得る．よって，

$$\begin{aligned} t_{pq}(v_2(\tau)) &= \frac{4\cdot 2\pi}{c_p c_q}(\operatorname{ch}\tau)^\ell \left(\frac{d}{dw}\right)^p \left((Aw+1)^{\ell-q}(w+A)^q\right)\Big|_{w=0} \times \int_0^1 r^{2p}(1-r^2)^{\ell-2}\, r\, dr \\ &= \frac{c_p}{c_q}(\operatorname{ch}\tau)^\ell \left(\frac{d}{dw}\right)^p \left((Aw+1)^{\ell-q}(w+A)^q\right)\Big|_{w=0}. \end{aligned}$$

$0 \le q \le \ell$ の場合には，多項式の微分である．$q > \ell$ の場合には，$(Aw+1)^{\ell-q}$ は負冪なので，２項係数の記号を一般化して使う．記号 $a \vee b := \max\{a, b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ を導入して，次の公式を得る：

$$\begin{aligned} t_{pq}(v_2(\tau)) &= \frac{c_p}{c_q}(\operatorname{ch}\tau)^\ell \sum_{r=0\vee(p+q-\ell)}^{p\wedge q} p! \binom{q}{r}\binom{\ell-q}{p-r} A^{p+q-2r} \quad (0 \le q \le \ell), \\ t_{pq}(v_2(\tau)) &= \frac{c_p}{c_q}(\operatorname{ch}\tau)^\ell \sum_{r=0}^{p\wedge q} p! \binom{q}{r}\binom{\ell-q}{p-r} A^{p+q-2r} \quad (q > \ell), \end{aligned}$$

$$\text{ただし，}\quad A = \tanh\tau, \quad \binom{-n}{r} = (-1)^{n-r}\binom{n+r-1}{r} \quad (n > 0,\ 0 \le r \le n).$$

この $t_{pq}(v_2(\tau))$ の表示式は，既知の特殊関数を用いて書き下せるものか，調べる必要がある．しかし，ここではこの段階でとどめておく．

群の表現と特殊関数との関係のまとめ．ここでは少しだけだが，様子を説明したが，一般的な話として，いろいろな群の表現の行列要素として，多くの特殊関数が現れ得る．その積分表示，微分を用いての表示，あるいは，加法公式などが，

(イ) 群の表現であることや，

(ロ) テンソル積表現の分解公式，

などから系統的に導き出される．そこには新しく発見されたものもあり，既知のものに新しい見地をもたらすものもある．こうして既知や未知の特殊関数やその性質をまとめていくという方針の下で，特殊関数に関する多くの本が書かれている．第４章では，回転群 $SO(3)$ の場合にルジャンドルの球関数との関係を説明した．

また，新しい特殊関数を定義することもできる．例えば，有限体 $\mathbb{F}$ の上の行列群 $GL(n, \mathbb{F})$ などの表現から，$\mathbb{F}$ の上の特殊関数が定義される．さらに，p 進体 $\mathbb{Q}_p$ 上の代数群のユニタリ表現も $\mathbb{Q}_p$ 上の特殊関数を与える．これらは，もし「群の表現」というものを使わなければ，発見も取り扱いも格段に難しいであろう．

引用文献 (第I部)

[有本] 有本 卓, p 元群符号系の符号化, 復号化法と誤りの訂正機構, 情報処理, **2-6**(1961), 320–325; S. Arimoto, On a non-binary error-correcting code, Information Processing in Japan, **2**(1962), 22–23 (Math. Rev. 1965:#4616).

[Barg] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Annals of Mathematics, **48**(1947), 568–640.

[Dir1] P.M.A. Dirac, The quantum theory of the electron, Proceedings of the Royal Society of London, **117**(1928), 610–624.

[Dir2] P.M.A. Dirac, Unitary representations of the Lorentz group, Proc. Royal Soc. London, **A183**(1945), 284–295.

[Eins] A. Einstein, *THE MEANING OF RELATIVITY*; 矢野健太郎訳, 相対論の意味, 岩波書店, 1961.

[GeRa] I.M. Gelfand and D.A. Raikov, Irreducible unitary representations of locally compact groups, Matematik Sbornik, **13**(1943), 301–316(ロシヤ語) [英訳: American Mathematical Society Translations (2), **36**(1964), 1–15.]

[GeNa] I.N. Gelfand and M.I. Naimark, Unitary representations of the Lorentz group, lzvestiya Akademii Nauk SSSR, **11**(1947), 411–504(ロシヤ語).

[Hari] Harish-Chandra, Infinite irreducible representations of the Lorentz group, Proc. Royal Soc. London, **A189**(1947), 327–401.

[Helg] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[平井] 平井 武, 線形代数と群の表現, I, II, 朝倉書店, すうがくぶっくす **20, 21**, 2001.

[井上] 井上正雄, ポテンシャル論, 共立全書, **38**, 1952.

[河添] 河添 健, 群上の調和解析, すうがくの風景 **1**, 朝倉書店, 2000.

[河野] 河野俊丈, 組みひもの数理, アウト・オブ・コース **4**, 遊星社, 1993.

[Kubo] T. Kubota (久保田富雄), *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Kodansha, 1972.

[公式] 岩波 数学公式 III, 特殊関数, 岩波書店, 1990.

[Newt] ISAAC NEWTON, THE *PRINCHIPIA, Mathematical Principles of Natural Philosophy,* A New Translation by I.B. Cohen and A.Whitman, University of California Press, 1999.

[Paul] W. Pauli, Zur Quantenmechnik des magnetischen Electrons, Zeitschrift für Physik, **43**(1927), 601–623.

[Pont] ポントリャーギン (L.S. Pontryagin), 連続群論，上巻 (柴岡泰光，杉浦光夫，宮崎 功 共訳)，岩波書店，(第 1 刷は) 1957.

[佐武] 佐武一郎，リー群の話，日本評論社，1982.

[鈴木] 鈴木通夫（みちお），群論 上巻，岩波書店，1988.

[朝永 1] 朝永振一郎，量子力学 II, みすず書房，第 2 版，2002.

[朝永 2] 朝永振一郎，スピンはめぐる，自然選書，中央公論社，1984.

[長島] 長島順清（よりきよ），素粒子物理学の基礎 I，朝倉書店，1998.

[数学] 数学辞典第 3 版，岩波書店，1985.

[理化学] 理化学辞典第 5 版，岩波書店，1998.

[Wign] E. Wigner, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. Math., **40**(1939), 149–204.

[Weyl] H. Weyl, *The Classical Groups* (副題：*Their Invariants and Representations*), Princeton University Press, 第 2 版，1973.

[山内] 山内恭彦・杉浦光夫，連続群論入門，新数学シリーズ **18**, 培風館，1989(第 1 刷は 1960).

[Yosi] K. Yosida (吉田耕作), *Functional Analysis*, 6 th Edition, Springer, 1991.

注： 論文の掲載誌の雑誌名は，初出では省略形を用いず，再出以降は省略形とした．

第 II 部　リー代数と表現論

はじめに

表現論とは大学院修士課程以来の結構長いつきあいである．大学 4 年の卒業ゼミで偏微分方程式や関数解析を学びはじめ，その延長線上になぜか表現論との出会いがあった．このような経緯で，リー群の (無限次元) ユニタリ表現とつきあい始めたころ，解析的なアプローチによる研究からこの世界へ入っていった．しかし，先に進むにつれて，ユニタリ表現に対してもその本質をズバリと捕らえる代数的手法に魅了(みりょう)され，研究は自然にその方向へ傾斜していった．第 II 部では著者のこのような生きざまを反映し，代数的立場から無限次元表現論の初歩を著してみたい．なお，第 II 部の内容は，群の表現の解析的な側面や物理学との関連を重視した本書第 I 部と当然深くつながっているが，それとは独立して読めるように工夫した．

さて，リー代数 (またはリー環) とは，括弧積(かっこせき) とよばれる演算を備えた線形空間のことであり，数学や物理学のさまざまな分野によく顔を出す人気者である．とりわけ，リー群とよばれる座標の入った位相群があれば，単位元における接ベクトルたちのなす線形空間 (接空間) は，群における交換子積(こうかんしせき)から引き起こされる括弧積をもち，それによりリー代数となる．ここで驚くべきことは，リー群の線形近似を与えるリー代数が，指数写像をとおして，もともとの群をほとんど決定してしまう，という事実である．さらに，リー群の連続表現に関する問題は，表現を微分して得られるリー代数の表現の代数的な話に帰着できる場合が多く，しかも後者は前者に比べてはるかに初等的で取り扱いやすい．

リー群といってもいろいろな種類があるわけだが，なかでも半単純リー群は, ローレンツ群などの物理学の立場からも重要な行列群を含み, 幾何的・代数的に豊富な構造を備えている．本書第 I 部でも論じたように，行列式が 1 である 2 次実正方行列がつくる特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ は，1 次分数変換により複素上半平面やその境界 (実軸に無限遠点を加えた射影直線) に推移的に作用する．この作用を一般の半単純リー群に対して定式化すると，リーマン対称空間や旗多様体(はたたようたい)の概念にいたる．また，有限次元の複素単純リー代数は，カルタン部分代数の随伴(ずいはん)表現によってルート空間分解され，対応するルート系を特徴づけるディンキン図形によって分類できる．

こういった構造を反映して，前世紀中ごろ以降，半単純リー群の無限次元連続表現の理論がめざましく発展しているが，ここでもやはり対応するリー代数の表現による代数的な研究手法が絶大な威力を発揮している．つまり，群の既約表現そのものを取り扱うかわりに，そ

れに対応して得られる (既約) ハリシュ-チャンドラ加群というリー代数の表現を，当該のリー群やリー代数の内部構造と関連させて深く研究する，という立場が大変有効である．比喩的な言い方をすれば，群の (無限次元) 既約表現という饅頭の薄皮を剥いだものがハリシュ-チャンドラ加群である．そして，おいしい餡子は，ほとんどハリシュ-チャンドラ加群のなかに詰まっている．

近年，半単純リー群の既約ユニタリ表現の分類問題 (現時点では未完成である) などのいくつかの動機から，リー代数の冪零軌道に対応する既約ユニタリ表現を構成すること，すなわち冪零軌道の量子化，の重要性が強く認識されるようになってきた．この量子化の問題と関連して，特異的でサイズの小さな無限次元既約ユニタリ表現が注目を集めている．なかでも，メタプレクティック群のヴェイユ表現は，ハイゼンベルグ群の無限次元既約ユニタリ表現の拡張として得られ，極小な冪零軌道の量子化を与える．また，ヴェイユ表現は，保型形式やテータ級数と深くかかわり応用上も重要であり，表現論的には，さまざまな特異的既約ユニタリ表現を創り出すための「打ち出の小槌」となる優れものである．さらに，ハイゼンベルグ群のユニタリ表現論は量子力学の数学的構造を制御している点でも興味深い．

こういった研究の動向を見すえ，第 II 部では，リー代数とその表現についてごく初歩的なことがらを具体的に解説することから始めて，後半ではハイゼンベルグ代数のフォック表現とシンプレクティックリー代数のヴェイユ表現を題材に，実リー代数の無限次元ユニタリ表現論の一端を紹介してみたい．とりわけ，ヴェイユ表現が，非コンパクトなユニタリリー代数や直交リー代数に制限することにより，はしご表現とよばれる最低ウェイトをもった既約ハリシュ-チャンドラ加群の直和に分岐する様子を明らかにすることを目標のひとつとする．この理論は，簡約なデュアルペアに関する表現のハウ対応の枠組みで拡張・整備され，現在，半単純群の表現論で大切な働きをしている．

本稿は，大学 1・2 年次で学ぶ程度の数学を身につけた読者を念頭に，リー代数の表現論における基本的な考え方を，初等的な題材をとおして正確に伝えることを目的に著されている．表現の分類，構成 (拡張，誘導や制限を含む)，既約分解 (分岐) などについてのエスプリが，豊富な具体例をとおして身につくよう，工夫されている．標準的な教科書とは異なって内容は網羅的ではないが，無限次元表現論のホットな話題との連携も視野に入れている．また，コラム的な記事「トピックス」を設けて，関連する研究やその背景にもふれた．

なお，ヴェイユ表現やその分岐則について，大学 3・4 年次の諸君にもわかり得るように解説した書物はこれまでにあまりなかったのではないかと思う．実際，これをリー群のユニタリ表現のレベルで理解しようとすれば，代数学，解析学，および幾何学にわたる広汎な知識が必要になる．本書が想定する読者にこれを要求するのは酷であろう．しかし，対応するリー代数の表現を扱うことに意を決すると，線形代数学の続編として，自己完結的に理解可能になる！ おまけに，議論が単純化され，何が本質であるかがはっきりする，という利点もある．第 II 部では後者の立場に立って，表現論の部分の主要な定理には，ゼミのテキス

トとして使用に耐える程度にきちんとした証明をつけた．単なるお話ではないので，多少骨があると思うが，大志をいだき，紙と鉛筆を用意してじっくりと取り組んでほしい：*Bon courage!*

本稿は，平成12年度と平成14年度の2回にわたり，著者が北海道大学において行った講義の内容をもとにしている．また，高校生のための数学春季講座における講演「行列の魅力 — 群の作用と表現 」(北海道大学，平成13年3月) や北海道大学大学院理学研究科ホームページに掲載のサイエンストピックス記事「無限次元表現と冪零軌道・等方表現」(平成14年2月) の内容も一部とり入れている．

本書執筆中，ハイゼンベルグ代数の表現について貴重な情報を新井朝雄氏 (北海道大学) からご提供いただいた．また，落合啓之氏 (名古屋大学)，西山享氏 (京都大学)，和地輝仁氏 (北海道工業大学) には，原稿を読んでいただき貴重なご意見を頂いた．厚く御礼を申し上げる．

平成15年10月
北海道にて
第 II 部著者

第7章
行列とリー代数

この章では，リー代数 (またはリー環) とは何であるかを，正方行列のなすリー代数の例を用いて，具体的に解説する．読者にリー群に関する知識があれば，本章の内容をより深く理解できることになるのは当然であるが，そういった予備知識は仮定せずに話を進める．

本章と次章は，第 9 章以降でリー代数の表現論を展開するために必要な「基礎工事」にあたる．基礎に手抜きがあっては，本論の表現論の部分が「砂上(さじょう)の楼閣(ろうかく)」と化してしまおう．かといって，過度に入念な準備を行っていては，本論に到達する前に紙面が尽きてしまうし，読者も面白いところに行き着く前に疲れ果ててしまうかもしれない．そこで本書では系統的なリー代数の構造理論には深入りせず，必要な概念を定式化した後は，実際に手を動かして，身近なリー代数の具体的な取り扱いに慣れることに重きをおくことにする．後章の準備を兼ねて，古典リー代数とハイゼンベルグ代数およびワイル代数を詳しく扱う．

7.1 線形空間と双 1 次形式

まず，リー代数を具体的に取り扱うために，線形空間 (またはベクトル空間) 上の非退化な双1次(そういちじ)形式やエルミート形式についての必要事項を整理しておくことから始める．これは，線形代数学への理解を深めるためにも，格好の機会となろう．

7.1.1 シンプレクティック基底と直交基底

$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし，V と F を $\mathbb{K}$ 上の $\{0\}$ でない線形空間とする．ここで，可換体とは (積が) 交換法則を満たす四則演算が定義された集合のことであり，$\mathbb{K}$ の標数が 0 であるとは，積に関する単位元 $1 \in \mathbb{K}$ を n 倍 $(n = 1, 2, \ldots)$ しても決して 0 にはならないことを意味する．こういった概念に不慣れな読者は，$\mathbb{K}$ は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ あるいは複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と思っても，本書を読む上で支障はない．

写像 $f : V \to F$ が条件

$$f(av + bv') = af(v) + bf(v') \quad (v, v' \in V,\ a, b \in \mathbb{K})$$

を満たすとき f を V から F への**線形写像**という．とくに $F = V$ のとき，線形写像 $f : V \to V$

を V 上の**線形変換** (または **1 次変換**) とよぶ．また，集合 $V \times V$ から F への写像 B が条件

$$B(av + bv', w) = aB(v, w) + bB(v', w)$$
$$B(v, aw + bw') = aB(v, w) + bB(v, w')$$
$$(v, v', w, w' \in V,\ a, b \in \mathbb{K})$$

を満たすとき，B を $V \times V$ から F への**双 1 次写像**という．とくに $F = \mathbb{K}$ のとき，f を V 上の**線形形式** (または **1 次形式**)，B を V 上の**双 1 次形式**とよぶ．V 上の線形形式全体は自然に線形空間となる．これを V^* で表し，V の**双対空間**（そうつい）という．V が有限次元のときには，V^* の次元は V の次元に等しい．

線形空間 V の基底 $(v_i)_{i \in I}$ (I は添字集合) に対して，$a_{ij} := B(v_i, v_j)$ を第 (i,j)-成分にもつ正方行列 $A := (a_{ij})$ を，双 1 次形式 $B : V \times V \to \mathbb{K}$ の基底 $(v_i)_{i \in I}$ に関する**表現行列**という．$v = \sum_i x_i v_i$，$w = \sum_i y_i v_i \in V$ ($x_i, y_i \in \mathbb{K}$) のとき，

$$B(v, w) = \sum_{i,j \in I} a_{ij} x_i y_j$$

となって，双 1 次形式 B はその表現行列 A から復元される．

V 上の双 1 次形式 B が条件

$$B(v, w) = B(w, v) \quad (v, w \in V)$$

を満たすとき，B は**対称**であるという．一方，

$$B(v, w) = -B(w, v) \quad (v, w \in V)$$

なる B を**反対称** (あるいは**交代**) 双 1 次形式とよぶ．B が対称 (あるいは反対称) であるためには，対応する表現行列 A が対称 (あるいは反対称)：${}^tA = A$ (あるいは ${}^tA = -A$) であることが必要十分条件となる．ここに，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

以下，双 1 次形式 B は対称あるいは反対称のいずれかであるものとする．このような双 1 次形式 B が**非退化**であるとは，すべての $w \in V$ に対して $B(v, w) = 0$ なる $v \in V$ が零ベクトル $v = 0$ に限るときをいう．

V の部分空間 W に対して，

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid \text{すべての } w \in W \text{ に対し } B(v, w) = 0\} \tag{7.1}$$

は V の部分空間になる．$W^{\perp}$ を W の (B に関する) **直交部分空間**という．

直交部分空間に関する基本的なことがらを次の補題にまとめておこう．

補題 7.1. V を非退化な対称 (あるいは反対称) 双 1 次形式 B をもつ有限次元線形空間とする．V の部分空間 W, W_1, W_2 につき，次の等式がなりたつ．

(i) $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$.
(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
(iii) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.
(iv) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

証明. (i) 任意の $v \in V$ に対して，$\varphi(v) \in V^*$ を，

$$(\varphi(v))(x) := B(v, x) \quad (x \in V)$$

により定義する．このとき，B の非退化性から，φ は V から V^* への単射な線形写像であることがわかる．さらに，双対空間 V^* の次元は V の次元に等しいので，φ は全射，よって，線形同型 $V \cong V^*$ を与えることになる．

W を V の部分空間とする．V 上の線形形式を W に制限する写像

$$\pi_W : V^* \ni \xi \longmapsto \pi_W(\xi) := \xi_{|W} \in W^*$$

は V^* から W^* への全射な線形写像になることに注意せよ．このとき，合成写像 $\pi_W \circ \varphi$ は V から W^* の上への線形写像であり，その核は W の直交部分空間 $W^{\perp}$ に他ならない．したがって，

$$\dim W^* = \dim V - \dim W^{\perp}$$

を得る．これと $\dim W = \dim W^*$ から (i) が従う．

(ii) 定義から明らかに $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である．一方 $(W^{\perp})^{\perp}$ と $W^{\perp}$ に対して (i) を2回使うと，

$$\dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim W^{\perp} = \dim W$$

がわかる．このふたつをあわせて，$W = (W^{\perp})^{\perp}$ が得られる．

(iii) は直交部分空間の定義から明らかである．また，(iv) は (ii) と (iii) から直ちに従う． □

定義 7.1. V 上の非退化な反対称双1次形式 B を**シンプレクティック形式** (または**斜交形式**) という．シンプレクティック形式 B を備えた線形空間 (V, B) を**シンプレクティック線形空間** (または**斜交線形空間**) とよぶ．

シンプレクティック基底

(V, B) を $\mathbb{K}$ 上の有限次元シンプレクティック線形空間とする．

命題 7.2. シンプレクティック線形空間 V は

$$B(p_i, p_j) = B(q_i, q_j) = 0, \quad B(p_i, q_j) = -B(q_j, p_i) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

なる基底 $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ をもつ．ここに

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

は**クロネッカーのデルタ**である．とくに $\dim V = 2n$ は偶数である．

上の条件を満たす基底を V の (B に関する) **シンプレクティック基底** (または**斜交基底**) という．この基底に関する B の表現行列は，

$$J := \begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix} \quad (E_n \text{ は } n \text{ 次の単位行列}) \tag{7.2}$$

となる．

命題 7.2 の証明． V の次元に関する数学的帰納法により証明する．

V の 0 でないベクトル p_1 をとる．B は非退化ゆえ，$B(p_1, q_1) \neq 0$ なる $q_1 \in V$ が存在する．q_1 を適当に定数倍することにより，$B(p_1, q_1) = 1$ となるように正規化しておく．B は反対称であることから，p_1 と q_1 は 1 次独立であることがわかり，$W := \mathbb{K}p_1 \oplus \mathbb{K}q_1$ は V の 2 次元部分空間となる．

いま，W の直交部分空間 $W^{\perp}$ を考える．

$$W^{\perp} = \{u \in V \mid B(u, p_1) = B(u, q_1) = 0\}$$

であるから，$v \in V$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して，$v - cp_1 - dq_1 \in W^{\perp}$ となるためには，

$$c = B(v, q_1), \quad d = -B(v, p_1)$$

であることが必要十分条件であることが容易に検証できる．このことは，V が部分空間 W と $W^{\perp}$ の直和であることを示している： $V = W \oplus W^{\perp}$.

この結果より，B を $W^{\perp} \times W^{\perp}$ に制限して得られる $W^{\perp}$ 上の反対称形式は非退化であることがわかる．したがって，帰納法の仮定より，シンプレクティック線形空間 $(W^{\perp}, B_{|W^{\perp} \times W^{\perp}})$ は

$$B(p_i, p_j) = B(q_i, q_j) = 0, \quad B(p_i, q_j) = -B(q_j, p_i) = \delta_{ij} \quad (i, j = 2, \dots, n)$$

なる基底 $p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n$ をもつ．これと，W の基底 p_1, q_1 をあわせて，$V = W \oplus W^{\perp}$ のシンプレクティック基底 $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ を得る． □

V のベクトル v, v' をシンプレクティック基底の 1 次結合

$$v = \sum_{i=1}^{n} (x_i p_i + y_i q_i), \quad v' = \sum_{i=1}^{n} (x_i' p_i + y_i' q_i) \quad (x_i, x_i', y_i, y_i' \in \mathbb{K}) \tag{7.3}$$

にそれぞれ表すとき，双 1 次形式 B は,

$$B(v, v') = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i' - y_i x_i') \tag{7.4}$$

と書き表される.

直交基底

次に，非退化な対称双 1 次形式を備えた線形空間の直交基底について論じる．命題 7.2 の証明と全く同様にして，次のことを示すことができる.

命題 7.3. V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元線形空間とし，B を V 上の非退化な対称双 1 次形式とする．このとき，零でないスカラー $\kappa_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$ と V の基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在して,

$$B(v_i, v_j) = \kappa_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n) \tag{7.5}$$

を満たす．すなわち，基底 $v_1, \dots, v_n$ に関する B の表現行列は，$\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ として,

$$I(\kappa) = \mathrm{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n) := \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

で与えられる.

問題 7.1. 命題 7.3 を証明せよ.

上記の基底 $v_1, \dots, v_n$ を，対称双 1 次形式 B に関する V の**直交基底**とよぶ．とくに，$\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 1$ であるとき，$v_1, \dots, v_n$ は V の**正規**直交基底であるという.

一般に，$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ $(a_n \neq 0)$ を係数とする n 次多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (n \geq 1)$$

が必ず $\mathbb{K}$ において零点をもつとき，すなわち，$f(x) = 0$ なる $x \in \mathbb{K}$ が存在するとき，$\mathbb{K}$ は**代数閉体**であるという．$x^2 + 1 > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ より，$\mathbb{R}$ は代数閉体ではない．一方，複素数体 $\mathbb{C}$ は代数閉である (**代数学の基本定理**，例えば [38, 附録 I 定理 2.1] 参照).

系 7.4. $\mathbb{K}$ が代数閉体 (例えば複素数体 $\mathbb{C}$) ならば，V は B に関する正規直交基底をもつ.

証明. $\mathbb{K}$ は代数閉だから，$x^2 - \kappa_i = 0$ なる $x \in \mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在する．そのひとつを $\sqrt{\kappa_i}$ とするとき，直交基底 $v_1, \dots, v_n$ を

$$\frac{v_1}{\sqrt{\kappa_1}}, \ \dots, \ \frac{v_n}{\sqrt{\kappa_n}}$$

と正規化することにより，V の正規直交基底を得る.　□

一方，例えば $\mathbb{K}$ が実数体 $\mathbb{R}$ の場合は，$\kappa_i \in \mathbb{R}$, $\kappa_i \neq 0$, の正負に注意する必要がある．$0 \leq p \leq n$ なる整数 p と $1 \leq i \leq n$ に対して，

$$\varepsilon(p)_i := \begin{cases} 1 & (1 \leq i \leq p \text{ のとき}) \\ -1 & (p < i \leq n \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7.7}$$

とおく．(7.5) を満たす V の直交基底 $v_1, \dots, v_n$ を $v_1/\sqrt{|\kappa_1|}, \dots, v_n/\sqrt{|\kappa_n|}$ で置き換え，さらに適当に順番を入れかえることにより，次の主張が得られる．

系 7.5. B が n 次元実線形空間 V 上の非退化な対称双 1 次形式であるとき，$0 \leq p \leq n$ なる整数 p があって，V には，

$$B(v_i, v_j) = \varepsilon(p)_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

なる V の直交基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在する．この基底に関する B の表現行列は，

$$I(p) := I(\varepsilon(p)) = \begin{pmatrix} E_p & O \\ O & -E_q \end{pmatrix} \quad (q := n - p) \tag{7.8}$$

となる．

線形代数学で学ぶように，上の系において，非負整数 p は，直交基底 $v_1, \dots, v_n$ の取り方にはよらず，B のみによって定まる (**シルヴェスタの慣性法則**，例えば [38, 第 5 章, 定理 4.2] を見よ)．p と q の組 (p, q) を非退化対称双 1 次形式 B の**符号**という．

7.1.2 ラグランジュ部分空間

定義 7.2. (V, B) を有限次元シンプレクティック線形空間とする．V の部分空間 W について，

(i) $W \subset W^{\perp}$，すなわち $B(w, w') = 0$ $(w, w' \in W)$ なるとき，W を**全等方**(ぜんとうほう)**部分空間**という．

(ii) $W = W^{\perp}$ なるとき，W を**ラグランジュ** (Lagrange) **部分空間**とよぶ．

シンプレクティック形式 B は反対称ゆえ，任意の $v \in V$ に対して $B(v, v) = 0$ がなりたつ．したがって，V の任意の 1 次元部分空間は全等方的である．

補題 7.6. V の全等方部分空間 W について，次の 3 条件 (a), (b), (c) は互いに同値である．

(a) W はラグランジュ部分空間である．

(b) W は極大全等方部分空間である．すなわち，$W \subset W_1$ なる V の全等方部分空間 W_1 は $W_1 = W$ のみである．

(c) $2 \dim W = \dim V$.

証明. (a) ⇒ (b): W_1 を $W \subset W_1$ なる全等方部分空間とする．このとき，$W_1 \subset W^\perp = W$，したがって $W = W_1$ となる．

(b) ⇒ (a): W はラグランジュ部分空間でないとする．このとき，$v \in W^\perp$ かつ $v \notin W$ なる v が存在し，$W_1 := W + \mathbb{K}v$ は，W を真に含む全等方部分空間になる．

(a) ⇔ (c): $W \subset W^\perp$ より，W と $W^\perp$ の次元の間には，不等号

$$\dim W \leq \dim W^\perp = \dim V - \dim W \tag{7.9}$$

がなりたつ．ここで，W がラグランジュ部分空間になる (すなわち $W = W^\perp$ となる) のは，(7.9) で等号が成立するときである． □

例 7.1. $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ を V のシンプレクティック基底とするとき，

$$W := \mathbb{K}p_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}p_n \quad および \quad W' := \mathbb{K}q_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}q_n$$

はともに V の n 次元全等方部分空間である．したがって，上の補題よりラグランジュ部分空間であることがわかる．

命題 7.7. V の任意のラグランジュ部分空間 W に対して，$V = W + W'$, $W \cap W' = \{0\}$ (すなわち V は部分線形空間 W と W' の直和) となるラグランジュ部分空間 W' が存在する．

証明. $W \cap U = \{0\}$ なる V の全等方部分空間 U たちのなかで極大なもの W' をとる．このとき，$V = W + W'$ を証明すればよい．

補題 7.1 (iv) と W がラグランジュ部分空間であることを用いて，$W \cap W' = \{0\}$ から $V = W^\perp + W'^\perp = W + W'^\perp$ を得る．したがって，命題の証明は，

$$W'^\perp \subset W + W' \tag{7.10}$$

を示すことに帰着される．

いま，任意の $v \in W'^\perp$ に対して，$\mathbb{K}v + W'$ は W' を含む全等方部分空間になることは容易にわかる．W' の極大性より，$v \notin W'$ のとき $(\mathbb{K}v + W') \cap W \neq \{0\}$ がなりたつ．$0 \neq \lambda v + u \in W$ $(\lambda \in \mathbb{K}, u \in W')$ とすると，もし $\lambda = 0$ ならば，$u \in W \cap W'$ となり矛盾．よって $\lambda \neq 0$ でなければならず，これより $v \in W + W'$ が従う．

以上により，包含関係 (7.10) が成立する． □

命題 7.7 から次の事実を導きだすことができる．その証明はちょうど手頃な頭の体操なので，練習問題としておこう．

問題 7.2. V の任意のラグランジュ部分空間 W に対して，$W = \mathbb{K}p_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}p_n$ となるシンプレクティック基底 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ が存在することを示せ．

さて，$B(f(v), f(v')) = B(v, v')$ $(v, v' \in V)$ を満たす V 上の 1 次変換 f を**シンプレクティック変換**とよぶ．言い換えれば，シンプレクティック変換とは，シンプレクティック形式 B を保存する，あるいは，V のシンプレクティック基底をまたシンプレクティック基底に移す V 上の線形同型のことである．シンプレクティック変換全体のなす集合 $Sp(V)$ は写像の合成を積演算として群をつくる．これを V 上の**シンプレクティック群**とよぶ．問題 7.2 より，W_1, W_2 を V のラグランジュ部分空間とするとき，$f(W_1) = W_2$ なる $f \in Sp(V)$ が存在する，すなわち，群 $Sp(V)$ は V のラグランジュ部分空間全体の集合に推移的に作用することがわかる．

7.1.3 実シンプレクティック形式と非退化エルミート形式

いま，(V, B) を実数体 $\mathbb{R}$ 上のシンプレクティック線形空間とし，$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ を V のシンプレクティック基底とする．

$$\varepsilon := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i = \pm 1 \ (i = 1, \ldots, n)$$

に対して，V 上の線形変換 $J = J_\varepsilon$ を

$$J(p_i) = \varepsilon_i q_i, \ J(q_i) = -\varepsilon_i p_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.11}$$

で定めると，J は

$$J^2 = -\mathrm{id}_V, \quad B(Jv, Jv') = B(v, v') \quad (v, v' \in V) \tag{7.12}$$

を満たすことが容易にわかる．ただし，id_V は V 上の恒等変換を表す．

一般に，実線形空間 V 上に $J^2 = -\mathrm{id}_V$ なる線形変換 J が与えられたとき，V に複素線形空間の構造を，

$$(a + \sqrt{-1}b) \cdot v := av + bJv \quad (a, b \in \mathbb{R}, \, v \in V) \tag{7.13}$$

により定めることができる．ここに，$\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．逆に，任意の複素線形空間 V は，スカラー倍を実数に限って考えることにより，自然に実線形空間となる．これを $V_\mathbb{R}$ で表す．このとき，$Jv := \sqrt{-1}v$ $(v \in V_\mathbb{R})$ とおけば，J は $V_\mathbb{R}$ 上の線形変換で，$J^2 = -\mathrm{id}_{V_\mathbb{R}}$ を満たす．以上のことから，複素線形空間とは $J^2 = -\mathrm{id}_V$ なる線形変換 J を備えた実線形空間 V のことに他ならないことがわかった．これは非常に単純なことを述べているにすぎないが，初学者が納得するには多少の時間が必要になるかもしれない．最も簡単な例 $V = \mathbb{C}$, $Jz = \sqrt{-1}z$ $(z \in \mathbb{C})$ をもとに考えてみるとよいだろう．

いま，V を複素線形空間とするとき，

$$h(\alpha v + \beta v', w) = \alpha h(v, w) + \beta h(v', w), \quad h(w, v) = \overline{h(v, w)}$$
$$(v, v', w \in V, \, \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

なる写像 $h : V \times V \to \mathbb{C}$ を V 上の**エルミート形式**という．ここに，$z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し，$\overline{z} = x - \sqrt{-1}y$ は z の複素共役(きょうやく)を表す．エルミート形式 h が**非退化**であるとは，(双1次形式の場合と同様に) すべての $w \in V$ に対して $h(v, w) = 0$ となるベクトル $v \in V$ は $v = 0$ のみであるときをいう．非退化なエルミート形式を V 上の (エルミート) **内積**ともよぶ．また，零でない任意の $v \in V$ に対して $h(v, v) > 0$ となるとき，エルミート内積 h は**正定値**であるという．

シンプレクティック実線形空間は，非退化なエルミート形式をもつ複素線形空間と次のように対応している．

命題 7.8. (i)　シンプレクティック実線形空間 (V, B) 上の線形変換 J が条件 (7.12) を満たすとき，(7.13) により V に複素線形空間の構造を入れる．このとき，

$$h_J(v, v') := B(Jv, v') + \sqrt{-1}B(v, v') \quad (v, v' \in V)$$

は，複素線形空間 V 上の非退化なエルミート形式を与える．

(ii)　h を複素線形空間 V 上の非退化なエルミート形式とする．$h(v, v')$ の虚部 $B(v, v') := \mathcal{I}m(h(v, v'))$ $(v, v' \in V)$ は，V を自然に $\mathbb{R}$ 上の線形空間とみなした $V_{\mathbb{R}}$ 上のシンプレクティック形式 B を定める．したがって，$(V_{\mathbb{R}}, B)$ はシンプレクティック実線形空間になる．

証明の方針. (i)　$h_J : V \times V \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$-双1次写像であることは明らかなので，h_J が V 上のエルミート形式であることを示すには，

$$h_J(Jv, v') = \sqrt{-1}h_J(v, v'), \quad h_J(v', v) = \overline{h_J(v, v')} \quad (v, v' \in V) \tag{7.14}$$

のふたつを，条件 (7.12) を用いて検証すればよい．また，h_J の非退化性は $h_J(v, v')$ の虚部が $B(v, v')$ に等しいことから直ちに従う．

(i) の証明の詳細，および (ii) の証明は読者に委ねる．　□

問題 7.3. 命題 7.8 を証明せよ．

例 7.2. シンプレクティック実線形空間 V のベクトル v, v' を (7.3) のようにシンプレクティック基底を用いて表すとき，(7.11) で定まる $J = J_\varepsilon$ に対応するエルミート形式 h_{J_ε} は，

$$h_{J_\varepsilon}(v, v') = \sum_{i=1}^{n}(-\varepsilon_i) \times (x_i + \sqrt{-1}\varepsilon_i y_i)(x'_i - \sqrt{-1}\varepsilon_i y'_i) \quad (v, v' \in V)$$

となる．これより，$p_1, \ldots, p_n$ は，h_{J_ε} に関して，複素線形空間 (V, J_ε) の直交基底をなすことがわかる:

$$h_{J_\varepsilon}(p_i, p_j) = -\varepsilon_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

とくに，$\varepsilon = (-1, \dots, -1)$ のとき，

$$h_{J_\varepsilon}(v, v) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + \sqrt{-1}\varepsilon_i y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$$

ゆえ，エルミート形式 h_{J_ε} は正定値であり，$p_1, \dots, p_n$ は V の正規直交基底をなす.

一般に，h を有限次元複素線形空間 V 上の非退化なエルミート形式とする．対称双 1 次形式の場合 (7.1.1 節後半) と同様，V には h に関する直交基底が存在する:

命題 7.9. $0 \le p \le n$ なる整数 p があって，V には，

$$h(v_i, v_j) = \varepsilon(p)_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n) \tag{7.15}$$

なる V の基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在する．ここに，$\varepsilon(p)_i = \pm 1$ は (7.7) により定まる定数である.

この命題は，(実) 対称形式に関する命題 7.3 および 系 7.5 と同様の考え方で証明することができる.

なお，上の命題に現れる整数 p は，直交基底 $v_1, \dots, v_n$ の取り方によらず，エルミート形式 h のみにより定まる (エルミート形式に対するシルヴェスタの慣性法則)．p, $q := n - p$, の組 (p, q) を h の**符号** という.

最後に，V の直交基底から，対応するシンプレクティック線形空間 $(V_{\mathbb{R}}, B)$ (命題 7.8 (ii) 参照) のシンプレクティック基底が得られることを示しておこう.

命題 7.10. h を有限次元複素線形空間 V 上の非退化エルミート形式とする．等式 (7.15) を満たす直交基底 $v_1, \dots, v_n$ に対し，

$$p_i := v_i, \quad q_i := -\sqrt{-1}\varepsilon(p)_i \cdot v_i \qquad (i = 1, \dots, n)$$

はシンプレクティック線形空間 $(V_{\mathbb{R}}, B)$, $V_{\mathbb{R}} = V$, $B = \mathcal{I}m\, h$ のシンプレクティック基底をなす.

証明. (7.15) より，$i, j = 1, \dots, n$ に対して，

$$h(p_i, p_j),\ h(q_i, q_j) \in \mathbb{R}, \quad h(p_i, q_j) = \sqrt{-1}\delta_{ij}$$

がなりたつ．これらの数の虚部をとることにより，$p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ が $V_{\mathbb{R}}$ のシンプレクティック基底であることがわかる. □

7.2 いろいろなリー代数

いよいよリー代数に登場願おう．この節では，まず，リー代数という代数系の定義を与え，部分リー代数，イデアル，直和，準同型など，この代数系に関する基本用語を用意する．また，リー代数が実際にどのような文脈で現れるかを，一般的見地から解説する (例 7.3–7.5)．これを踏まえて，単純リー代数や冪零・可解リー代数のうちのいくつかを，行列のなすリー代数として具体的に実現する．ごく簡単な例は 3.7, 4.5, 5.3 の各節でも扱ったが，ここではいろいろなリー代数に接して，この代数系に関する感覚を養っておこう．

7.2.1 リー代数の定義，基本的な諸概念

定義 7.3. $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．$\mathbb{K}$ 上の**リー代数** (あるいは**リー環**) とは，次の 2 条件 (7.16) および (7.17) を満たす双 1 次写像

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

を備えた $\mathbb{K}$ 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ のことをいう．

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\textbf{交代性}), \tag{7.16}$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\textbf{ヤコビ恒等式}). \tag{7.17}$$

$[X, Y]$ を X と Y の**括弧積**とよぶ．

定義 7.4. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする．

(i) $\mathfrak{g}$ の部分線形空間 $\mathfrak{h}$ が括弧積に関して閉じているとき，すなわち，

$$X, Y \in \mathfrak{h} \quad ならば \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

を満たすとき，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の**部分リー代数**という．このとき，$\mathfrak{g}$ 上の括弧積の $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ への制限を考えることにより，$\mathfrak{h}$ は $\mathbb{K}$ 上のリー代数となる．

(ii) $\mathfrak{g}$ の部分線形空間 $\mathfrak{m}$ が，条件

$$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{m} \quad ならば \quad [X, Y] \in \mathfrak{m}$$

を満たすとき，$\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{g}$ の**イデアル**という．なお，括弧積の交代性 (7.16) より，イデアルに左右の区別はない．

定義から，明らかに，イデアルは部分リー代数である．部分リー代数 (またはイデアル) たちの共通部分もまた部分リー代数 (またはイデアル) になる．

さて，リー代数がどのようにして得られるのかを一般的な観点から述べてみよう．$\mathbb{K}$ 上の線形空間 R が**分配的代数**であるとは，R に積の演算が定義されていて，

$$R \times R \ni (a, b) \longmapsto ab \in R$$

が $\mathbb{K}$ 上の双 1 次写像であるときをいう．さらに，乗法の演算が結合法則

$$(ab)c = a(bc) \quad (a, b, c \in R)$$

を満たすとき，R を ($\mathbb{K}$ 上の) **結合代数**あるいは**多元環**(たげんかん)という．

例 7.3. $\mathbb{K}$ 上の結合代数 R は，括弧積

$$[a, b] := ab - ba \quad (a, b \in R)$$

により $\mathbb{K}$ 上のリー代数になる．以降，結合代数をリー代数とみなすときには，断らないかぎりこの方法をとる．

V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする (有限次元である必要はない)．V 上の線形変換全体のなす線形空間 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ は，線形変換の和と積 (合成) について，結合代数，したがってリー代数の構造をもつ．これを V 上の**一般線形リー代数**とよび，記号 $\mathfrak{gl}(V)$ を用いて表す．

例 7.4. Q を $\mathbb{K}$ 上の分配的代数とする．$D \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(Q)$ が Q 上の**微分**であるとは，

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \quad (a, b \in Q)$$

を満たすときをいう．Q 上の微分全体を $\mathrm{Der}(Q)$ で表す．$\mathrm{Der}(Q)$ は $\mathfrak{gl}(Q)$ の部分リー代数である．

例えば，M が C^∞-多様体であるとき，M 上の C^∞-関数全体 $C^\infty(M)$ が関数の和，スカラー倍，および積に関してつくる多元環について，$C^\infty(M)$ 上の微分のなすリー代数 $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ は M 上の C^∞-ベクトル場全体と一致する (例えば [34, 1.8 節 定理 1] を参照)．

次の簡単な練習問題をとおして，微分のなすリー代数 $\mathrm{Der}(Q)$ に対する理解を深めておこう．

問題 7.4. $\mathbb{K}[x]$ を $\mathbb{K}$ に係数にもつ x の多項式全体がなす結合代数とする．

(i) $\mathbb{K}[x]$ 上の任意の微分 D は，$a(x) \in \mathbb{K}[x]$ を用いて，

$$(Df)(x) = a(x)\left(\frac{d}{dx}f\right)(x) \quad (f(x) \in \mathbb{K}[x])$$

と表されることを示せ．ここに，d/dx は，$(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ なる $\mathbb{K}[x]$ 上の線形写像である．

(ii) リー代数 $\mathrm{Der}(\mathbb{K}[x])$ における交換関係式

$$\left[a(x)\frac{d}{dx}, b(x)\frac{d}{dx}\right] = \left\{a(x)\left(\frac{d}{dx}b\right)(x) - b(x)\left(\frac{d}{dx}a\right)(x)\right\}\frac{d}{dx}$$

を確かめよ．

本書で詳しく扱うリー代数は，次の例で述べる手続きに従って，一般線形リー代数からつくられるものである．

例 7.5. V を $\mathbb{K}$ 上の任意の線形空間とする．

(i) B を V 上の双1次形式とする．このとき，

$$B(f(v), v') + B(v, f(v')) = 0 \quad (v, v' \in V) \tag{7.18}$$

を満たす $f \in \mathfrak{gl}(V)$ たち全体のなす集合を $\mathfrak{h}(B)$ で表す．このとき，$\mathfrak{h}(B)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数になる．

また，複素線形空間 V 上のエルミート形式 h についても，h の実部・虚部を，それぞれ，V 上の実双1次形式とみなすことにより，

$$\mathfrak{u}(h) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid h(f(v), w) + h(v, f(w)) = 0 \ (v, w \in V)\} \tag{7.19}$$

は，$\mathfrak{gl}(V)$ の**実**部分リー代数 (定義 8.1 (a) 参照) になる．

(ii) V の部分線形空間の増大列

$$\mathcal{F} : \{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \cdots$$

に対し，

$$\mathfrak{b}(\mathcal{F}) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(V_m) \subset V_m \ (m = 0, 1, \ldots)\} \tag{7.20}$$

は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数になる．さらに，

$$\mathfrak{n}(\mathcal{F}) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(V_{m+1}) \subset V_m \ (m = 0, 1, \ldots)\} \tag{7.21}$$

は $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ のイデアルをなす．7.3 節で取り扱うハイゼンベルグ代数はリー代数 $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ たちのなかで特殊な $\mathcal{F}$ に対応するものである．

問題 7.5. 上の例 7.3–7.5 で述べた主張を検証せよ．

定義 7.5. $\mathbb{K}$ 上のリー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ に対し，線形写像 $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g}_1)$$

を満たすとき，φ を $\mathfrak{g}_1$ から $\mathfrak{g}_2$ への (リー代数としての) **準同型写像**という．さらに φ が全単射のとき，φ を $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の間の**同型写像**とよぶ．

ふたつのリー代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が**同型**であるとは，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の間に同型写像が存在するときをいい，これを $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ で表す．

例 7.6. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする．括弧積に関して $\mathfrak{g}$ は分配的代数であることに注意する．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{g}$ 上の線形変換 $\mathrm{ad}\, X$ を

$$(\mathrm{ad}\, X)(Y) := [X, Y] \quad (Y \in \mathfrak{g}) \tag{7.22}$$

により定める．ヤコビ恒等式 (7.17) から，$\mathrm{ad}\, X$ は $\mathfrak{g}$ 上の微分である:

$$(\mathrm{ad}\, X)([Y, Z]) = [(\mathrm{ad}\, X)(Y), Z] + [Y, (\mathrm{ad}\, X)(Z)] \quad (Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

さらに，対応

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longmapsto \mathrm{ad}\, X \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

は，リー代数としての準同型写像を与えることがわかる．このようにして，$\mathrm{ad}\, X$ $(X \in \mathfrak{g})$ によりリー代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 自身に作用することになる．この作用 ad を $\mathfrak{g}$ の**随伴作用**あるいは**随伴表現** (adjoint representation) という．ここで，リー代数の作用・表現という言葉を用いたが，これについては，第 9 章以降で詳しく扱う．

問題 7.6. $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} := \{\mathrm{ad}\, X \mid X \in \mathfrak{g}\}$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルであることを示せ．

定義 7.6. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする．

(i) $[X, Y] = 0$ がなりたつとき，$\mathfrak{g}$ の要素 X と Y は**可換**であるという．

(ii) すべての $Y \in \mathfrak{g}$ と可換である $X \in \mathfrak{g}$ 全体の集合 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる．$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**中心**とよぶ．

(iii) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ なるとき，$\mathfrak{g}$ を**可換リー代数**という．

定義 7.7. リー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ に対して，線形空間としての直和

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \{(X_1, X_2) \mid X_i \in \mathfrak{g}_i \ (i = 1, 2)\}$$

に，括弧積を

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] := ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$$

により定めると，$\mathfrak{g}$ はリー代数になる．これを，リー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ の**直和**という．

このとき，

$$\tilde{\mathfrak{g}}_1 := \{(X_1, 0) \mid X_1 \in \mathfrak{g}_1\}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_2 := \{(0, X_2) \mid X_2 \in \mathfrak{g}_2\}$$

は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，それぞれ，$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ と自然に同型になる．さらに，$\mathfrak{g}$ は，部分線形空間 $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ と $\tilde{\mathfrak{g}}_2$ の (線形空間としての) 直和に同型であり，$\tilde{\mathfrak{g}}_1$ の各要素は，$\tilde{\mathfrak{g}}_2$ の各要素と可換になる:

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2, \quad [\tilde{\mathfrak{g}}_1, \tilde{\mathfrak{g}}_2] = \{0\}.$$

問題 7.7. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_2)$ を示せ．

なお，n 個のリー代数 $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ の直和も全く同様に定義することができる．

7.2.2 古典リー代数

ここで，正方行列のなすリー代数の古典的な例を紹介する．

例 7.7. $\mathbb{K}$ に成分をもつ n 次正方行列全体のなす線形空間 $M_n(\mathbb{K})$ は，括弧積

$$[X,Y] := XY - YX \quad (X, Y \in M_n(\mathbb{K}))$$

により $\mathbb{K}$ 上のリー代数になる．これを $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ と書き，$\mathbb{K}$ 上の n 次一般線形リー代数という．リー代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ は，n 次元線形空間 V 上の一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}(V)$ と同型である．実際，線形空間 V の基底 $\mathcal{E} = (v_1, \ldots, v_n)$ を定めたとき，V 上の線形変換 $f \in \mathfrak{gl}(V)$ に，基底 $\mathcal{E}$ に関する表現行列 $A_f = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ を

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

により対応させる．このとき，表現行列を対応させる写像

$$R_{\mathcal{E}} : f \longmapsto A_f \tag{7.23}$$

は，

$$R_{\mathcal{E}}(f \circ g) = R_{\mathcal{E}}(f) R_{\mathcal{E}}(g) \quad (f, g \in \mathfrak{gl}(V))$$

を満たし，したがって，リー代数の同型 $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ を与える．

例 7.8. 行列 $X = (x_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{K})$ のトレースを $\operatorname{tr} X = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ とするとき，

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$$

は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ のイデアル（したがって部分リー代数）になる．$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ を，$\mathbb{K}$ 上の n 次**特殊線形リー代数**という．また，同型写像 (7.23) による $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ の逆像

$$\mathfrak{sl}(V) := R_{\mathcal{E}}^{-1} \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$$

は $\mathfrak{gl}(V)$ のイデアルであり，V の基底 $\mathcal{E}$ の取り方によらずに定まる．$\mathfrak{sl}(V)$ を V 上の特殊線形リー代数とよぶ．

とくに，$n = 2$ のとき，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ は，

$$X_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

を基底とする3次元線形空間であり，

$$[H, X_+] = 2X_+, \quad [H, X_-] = -2X_-, \quad [X_+, X_-] = H \tag{7.25}$$

がなりたつ．この交換関係を満たす3つ組 (X_+, H, X_-) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の**標準トリプル**という．(3.7 節の3つ組 $(Y_+, 2H, Y_-)$ は標準トリプルをなす．)

例 7.9. (V, B) を体 $\mathbb{K}$ 上の $2n$ 次元シンプレクティック線形空間とする．シンプレクティック形式 B に付随した $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数 $\mathfrak{h}(B)$ (例 7.5 (i) 参照) を V 上の**シンプレクティックリー代数** (または**斜交リー代数**) とよび，記号 $\mathfrak{sp}(V, B)$ あるいは単に $\mathfrak{sp}(V)$ で表す．$\mathcal{E} = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ を V のシンプレクティック基底とするとき，同型写像 $R_{\mathcal{E}} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K})$ による $\mathfrak{sp}(V)$ の像は次のような行列のなすリー代数になる．

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid {}^tXJ + JX = 0\}. \tag{7.26}$$

ここに，J はシンプレクティック形式 B の表現行列 (7.2) である．具体的には，$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ に属する行列 X は，$X_{11}, X_{12}, X_{21} \in M_n(\mathbb{K})$ を用いて，

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -{}^tX_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし,} \quad {}^tX_{12} = X_{12},\ {}^tX_{21} = X_{21},$$

の形をしている．

ここで，$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ の n はこのリー代数の「階数」を表す．行列のサイズ $2n$ とは異なるので注意が必要 (文献によっては，これを $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K})$ と書くこともある)．

例 7.10. B を n 次元線形空間 V 上の非退化な対称双 1 次形式とする．このとき，$\mathfrak{h}(B)$ を B に付随する V 上の**直交リー代数**とよび，$\mathfrak{o}(V, B)$ あるいは $\mathfrak{o}(V)$ と書く．V の B に関する直交基底 $\mathcal{E} = (v_1, \ldots, v_n)$:

$$B(v_i, v_j) = \kappa_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

をとる ((7.5) 参照)．このとき，同型写像 $R_{\mathcal{E}} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ による $\mathfrak{o}(V, B)$ の像は，基底 $\mathcal{E}$ に関する B の表現行列 $I(\kappa)$, $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ ((7.6) 参照) を用いて，

$$\mathfrak{o}(\kappa; \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid {}^tXI(\kappa) + I(\kappa)X = 0\} \tag{7.27}$$

と書き表される．とくに，$\kappa = (1, \ldots, 1)$ のとき，リー代数 $\mathfrak{o}(\kappa; \mathbb{K})$ は n 次反対称行列 (または交代行列) 全体からなる．これを単に

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid {}^tX + X = 0\} \tag{7.28}$$

と書くことにする．

注意 7.1. (i) $\mathbb{K}$ が代数閉体のときには，V 上には B に関する正規直交基底が存在する (系 7.4)．このとき，直交リー代数 $\mathfrak{o}(V, B)$ は $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ と同型であることがわかる．

(ii) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，対称形式 B の符号 (p, q), $q = n - p$, によって，κ を，

$$\varepsilon(p) := (\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{q}), \quad p = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.29}$$

のいずれかにとることができる (系 7.5)．この場合，$\mathbb{R}$ 上の直交リー代数 $\mathfrak{o}(\varepsilon(p); \mathbb{R})$ を記号 $\mathfrak{o}(p, q)$ で表す．

定義 7.8. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$, および $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$ を体 $\mathbb{K}$ 上の**古典リー代数**(classical Lie algebra) という.

古典リー代数の基本的性質のうち，容易に確認ができるものを，3 題ばかり，練習問題として提示しておこう.

問題 7.8. $\mathfrak{sp}(V) \subset \mathfrak{sl}(V)$, $\mathfrak{o}(V,B) \subset \mathfrak{sl}(V)$ を示せ.

問題 7.9. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$, および $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$ の $\mathbb{K}$ 上の線形空間としての次元は，それぞれ，n^2-1, $2n^2+n$, $(n^2-n)/2$ に等しいことを確かめよ.

問題 7.10. 直交リー代数 $\mathfrak{o}(p,q)$ に属する行列 X は,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ {}^tX_{12} & X_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし，} X_{11} \in \mathfrak{o}(p,\mathbb{R}),\ X_{22} \in \mathfrak{o}(q,\mathbb{R}), X_{12} \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \tag{7.30}$$

の形であることを示せ．ただし，$M_{p,q}(\mathbb{K})$ は体 $\mathbb{K}$ に成分をもつ $p\times q$ 行列全体の集合を表す.

注意 7.2. $\mathfrak{o}(V,B) \subset \mathfrak{sl}(V)$ を反映して，直交リー代数 $\mathfrak{o}(V,B)$, $\mathfrak{o}(\kappa;\mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(p,q)$ を，それぞれ，$\mathfrak{so}(V,B)$, $\mathfrak{so}(\kappa;\mathbb{K})$, $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{so}(p,q)$ と表記することもある (3.7, 5.3 節参照).

7.2.3 単純リー代数

定義 7.9. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする．$\mathfrak{g}$ が可換でなく，かつ, $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 自身以外にイデアルをもたないとき，$\mathfrak{g}$ を**単純リー代数**という．また，単純リー代数のいくつかの直和と同型なリー代数を**半単純**という.

半単純リー代数の中心は $\{0\}$ である (問題 7.7 参照)．しかしこの逆は成立しない.
次の定理は重要である.

定理 7.11. 古典リー代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$ $(n \geq 1)$, および $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$ $(n \geq 3, n \neq 4)$ はみな $\mathbb{K}$ 上単純である.

ここでは，最も基本的な $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の場合に上の定理を証明しよう．他の古典リー代数についても，($\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$ の場合は $\mathbb{K}$ を代数閉体に係数拡大して) リー代数の**ルート空間分解**を用いることにより，同様の考え方で単純性を示すことができる．複素古典リー代数のルート空間分解については，第 11 章で詳しく論じる.

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ が単純であることの証明． 交換関係 (7.25) より，リー代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ は可換でない．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の零でないイデアルとして，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ を示す.
そのため，標準トリプル (X_+, H, X_-) に属する対角行列 H が定める $\mathfrak{g}$ 上の随伴作用:

$$\operatorname{ad} H : \mathfrak{g} \ni X \longmapsto (\operatorname{ad} H)(X) = [H,X] \in \mathfrak{g}$$

を考える. (7.25) より, $\mathrm{ad}\,H$ は $\mathbb{K}$ 上対角化可能である. 実際, $\mathrm{ad}(H)$ の固有値は, $2, 0, -2$ の 3 個であり, $\mathbb{K}X_+$, $\mathbb{K}H$, $\mathbb{K}X_-$ が, それぞれ対応する固有空間になっている. 一方, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルなので,

$$(\mathrm{ad}\,H)\mathfrak{h} = [H, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$$

となる. つまり $\mathrm{ad}\,H$ は $\mathfrak{h}$ を不変にする (さらに, $\mathrm{ad}\,H$ の $\mathfrak{h}$ 上への制限もまた $\mathbb{K}$ 上対角化可能になることもわかる : 問題 7.11). よって, $\mathfrak{h}$ には $\mathrm{ad}\,H$ の零でない固有ベクトルが少なくともひとつ存在する. つまり, X_+, H, X_- の少なくともひとつは $\mathfrak{h}$ に属する.

いま, $X_- \in \mathfrak{h}$ とすると,

$$H = [X_+, X_-] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad X_+ = -\frac{1}{2}[X_+, H] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$$

となって, $X_+ \in \mathfrak{h}$ がわかる. $H \in \mathfrak{h}$ としても同様である. 結局, いずれの場合も $X_+ \in \mathfrak{h}$ が従う.

結局, $X_+ \in \mathfrak{h}$ に注意して, 再び交換関係 (7.25) をみると, $H, X_- \in \mathfrak{h}$ を得る. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の基底を含むので, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ となる. □

問題 7.11. 線形空間 V 上の線形変換 f は ($\mathbb{K}$ 上で) 対角化可能であるとし, $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda)$ を V の f-固有空間分解とする. ここに, $V(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ は固有値 $\lambda \in \mathbb{K}$ に対応する f の固有空間を表す. このとき, V の部分空間 W が f で不変 (すなわち $f(W) \subset W$) ならば, $W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} W \cap V(\lambda)$ であることを示せ. これより, f を W へ制限して得られる W 上の線形変換も対角化可能であることがわかる.

◆トピックス 1 (ディンキン図形). ……………………………………………………

代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の単純リー代数は, 同型を除き, 対応するルート系のデータから定まる**ディンキン図形**(Dynkin diagram) により分類できることが知られている. 分類に現れるディンキン図形は図 7.1 の 9 種類である.

A_ℓ, B_ℓ C_ℓ, D_ℓ 型の単純リー代数は, それぞれ, $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{K})$ と同型である. これらの単純リー代数を**古典型**とよぶ. また, 残りの 5 種類のディンキン図形 E_ℓ ($\ell = 6, 7, 8$), F_4, G_2 をもつ単純リー代数を**例外型**という.

なお, 次元の低い古典リー代数については, 次の同型関係がある:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(3, \mathbb{K}) &\cong \mathfrak{sp}(1, \mathbb{K}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}), \\ \mathfrak{o}(4, \mathbb{K}) &\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}), \\ \mathfrak{o}(5, \mathbb{K}) &\cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{K}). \end{aligned} \tag{7.31}$$

とくに, $\mathfrak{o}(4, \mathbb{K})$ は単純ではなく, 単純なリー代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ のふたつの直和と同型になる.

リー代数やルート系については, 入門的なものから専門書に至るまで, 現在では多くの教科書が出版されている ([3], [22], [33], [42], [43], [49] などなど).

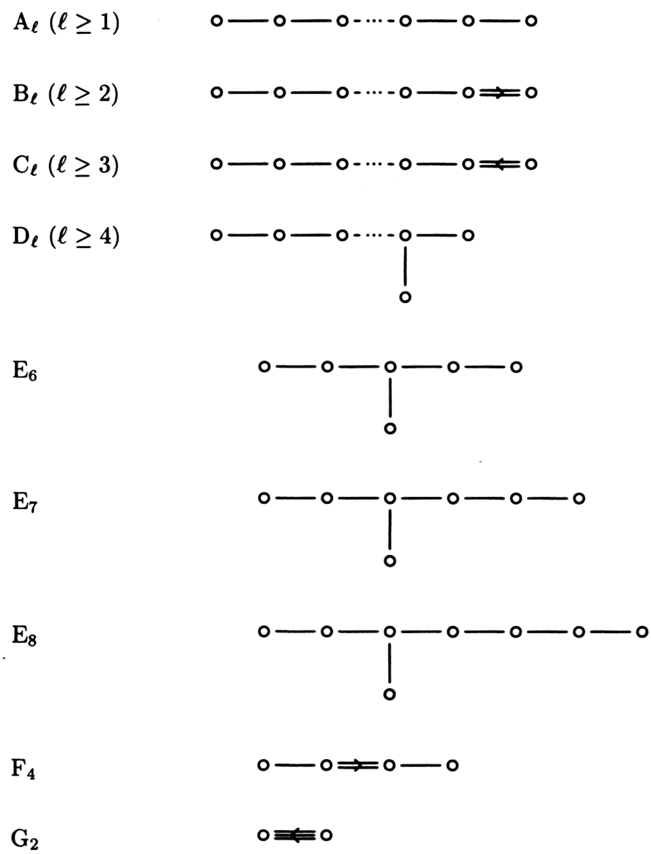


図 7.1. ディンキン図形

7.2.4 可解リー代数と冪零リー代数

$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ がリー代数 $\mathfrak{g}$ のイデアルであるとき，$[X_1, X_2]$ ($X_1 \in \mathfrak{m}_1$, $X_2 \in \mathfrak{m}_2$) たちが生成する $\mathfrak{g}$ の部分空間を $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]$ で表す．ヤコビ恒等式 (7.17) から，$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルをなすことがわかる．とくに，$D(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を $\mathfrak{g}$ の**導来イデアル**とよぶ．いま，

$$D^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad D^k(\mathfrak{g}) := [D^{k-1}(\mathfrak{g}), D^{k-1}(\mathfrak{g})],$$
$$N^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad N^k(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, N^{k-1}(\mathfrak{g})] \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

により $D^k(\mathfrak{g})$ と $N^k(\mathfrak{g})$ を帰納的に定めると，$\mathfrak{g}$ のイデアルの (広義) 減少列:

$$\mathfrak{g} = D^0(\mathfrak{g}) \supset D^1(\mathfrak{g}) \supset D^2(\mathfrak{g}) \supset \cdots,$$
$$\mathfrak{g} = N^0(\mathfrak{g}) \supset N^1(\mathfrak{g}) \supset N^2(\mathfrak{g}) \supset \cdots,$$

が得られる．定義から，$D^k(\mathfrak{g}) \subset N^k(\mathfrak{g})$ であることに注意しよう．

定義 7.10. $D^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ なる k が存在するとき，リー代数 $\mathfrak{g}$ は**可解**であるという．また，$N^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ なる k が存在するとき，$\mathfrak{g}$ は**冪零**リー代数であるという．

◆トピックス 2 (べきという字). ....

《巾　冪　羃　[音：ベキ　訓：(用いない)]》冪の字の本来の意味は，'おおう (to cover)'，'おおうもの (cover, curtain)' であるが，1940 年代以前には，累乗の意味に用いられていた．羃はその俗字であり，巾は，和算家が用いた略字であるが，数学以外でこれらの文字を用いることがほとんどないため，1950 年代よりこの漢字は用いないことになり，代わりに累乗を用いることになった．以来，'冪' を伴う用語は，学校数学では，すべて '累乗' を伴なう用語におきかえられている．例えば，冪指数⇒累乗指数，冪根⇒累乗根．しかし，大学程度の数学では，'power series' をベキ級数といったりして一部にベキという語は残っている．この場合，学術用語集では 'べき' と平仮名で表記している．一方，岩波の数学辞典では 'ベキ' と片仮名で表記している．(『数学用語の漢字』数学言語研究会，執筆 島田茂氏より引用)

なお，巾は「雑巾(ぞうきん)」や「磯巾着(いそぎんちゃく)」の「きん (ぎん)」であり，幅 (はば) の代用字としても用いられる．著者 (山下) はある時期まで「巾零」と表記していたのだが，何かのきっかけで『はばれい』なる誤読が気になりはじめ，それ以降「べき零」あるいは「冪零」と書くことにしている．ここでは「冪」の字を用いることにする．

問題 7.12. 次のことを示せ．

(i) 冪零リー代数は可解である．

(ii) $\{0\}$ でない冪零リー代数の中心は零でない要素を含む．

(iii) リー代数 $\mathfrak{g}$ が半単純ならば，$D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ である．したがって，半単純リー代数は可解ではない．

問題 7.13. リー代数 $\mathfrak{g}$ について，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が冪零ならば $\mathfrak{g}$ は可解であることを証明せよ．

例 7.11. V を n 次元線形空間とし，V の m 次元部分空間 V_m $(m = 0, 1, \dots, n)$ の増大列

$$\mathcal{F} : V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

を考える．このような $\mathcal{F}$ を V の**旗**(はた)とよぶ．旗 $\mathcal{F}$ に対応して定まる $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数 $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$, $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ (例 7.5 (ii) 参照) はそれぞれ可解，冪零であることがわかる．さらに，$v_1, \dots, v_m$ が各 V_m の基底となるように V の基底 $\mathcal{E} = (v_1, \dots, v_n)$ を選べば，リー代数の同型写像 $R_{\mathcal{E}} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ (例 7.7 参照) をとおして，$\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ は上半三角行列全体のつくる $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の部分リー代数と同型になる．また，$\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ は対角成分がすべて零であるような上半三角行列たちのなすリー代数と同型になる．

$$\mathfrak{b}(\mathcal{F}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \right\},$$

$$\mathfrak{n}(\mathcal{F}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \right\}.$$

問題 7.14. 上の例 7.11 で述べたことがらを検証せよ.

問題 7.15. 例 7.11 における $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$, $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ の中心をそれぞれ求めよ.

注意 7.3. 任意の有限次元リー代数 $\mathfrak{g}$ は，包含関係に関して最大の可解イデアル $\mathfrak{r}$ (**根基**（こんき）) をもつ. さらに，$\mathfrak{g}$ の半単純部分リー代数 $\mathfrak{s}$ で，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \{0\} \qquad (\textbf{レビ分解})$$

を満たすものが存在することが知られている (例えば [25, Appendix B], [42, 第 6 章] を参照せよ). したがって，リー代数の構造に関する問題は，可解リー代数と半単純リー代数の場合の話に帰着する.

7.3 ハイゼンベルグ代数とその拡大

ハイゼンベルグ代数は，可換でない冪零リー代数のなかで最も簡単な構造をもつ. にもかかわらず，ワイル代数への埋め込みをとおして得られるハイゼンベルグ代数の無限次元既約表現は，量子力学の数学的構造を制御し，後の章で調べるように，エルミート型の実リー代数 AIII, CI, DIII のユニタリ最低ウェイト表現の構成にも本質的に用いられる. 本節では，ハイゼンベルグ代数およびワイル代数とそのシンプレクティックリー代数による拡大について論じる.

7.3.1 ハイゼンベルグ代数

(V, B) を標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上の $2n$ 次元シンプレクティック線形空間とする. V と 1 次元線形空間 $\mathbb{K}e$ の直和線形空間 $\mathfrak{n}(V) := V \oplus \mathbb{K}e$ 上に，括弧積を

$$[v + te, v' + t'e] := B(v, v')e \quad (v, v' \in V,\ t, t' \in \mathbb{K}) \tag{7.32}$$

により定める. シンプレクティック形式 B は反対称な双 1 次形式であるから，上の括弧積は $\mathfrak{n}(V) \times \mathfrak{n}(V)$ から $\mathfrak{n}(V)$ への双 1 次写像を定め，かつ条件 (7.16) を満たす. また，定義から $[\mathfrak{n}(V), \mathfrak{n}(V)] = \mathbb{K}e$, $[\mathfrak{n}(V), [\mathfrak{n}(V), \mathfrak{n}(V)]] = \{0\}$ なので，ヤコビ恒等式 (7.17) も自明に成立する. これより，$\mathfrak{n}(V)$ は $N^2(\mathfrak{n}(V)) = \{0\}$ なる冪零リー代数の構造をもつことがわかる. さらに，$\mathfrak{n}(V)$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}(V))$ は，1 次元イデアル $\mathbb{K}e$ と一致すること：$\mathfrak{z}(\mathfrak{n}(V)) = \mathbb{K}e$，も容易に確かめることができる.

定義 7.11. リー代数 $\mathfrak{n}(V) = V \oplus \mathbb{K}\boldsymbol{e}$ を $r := 2n+1$ 次元**ハイゼンベルグ代数**という.

ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ を行列のなすリー代数として実現しよう. $\mathbb{K}$ に成分をもつ n 次の行ベクトル全体のなす線形空間を $\mathbb{K}^n_{\mathrm{row}}$ で表す. $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n_{\mathrm{row}}$, および $t \in \mathbb{K}$ に対して, $n+2$ 次正方行列 $Z(x, y, t)$ を,

$$Z(x,y,t) := \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.33}$$

により定める. 行列の括弧積を直接計算することにより,

$$[Z(x,y,t), Z(x',y',t')] = Z(0, 0, x\,{}^t y' - x'\,{}^t y) \quad (x, x', y, y' \in \mathbb{K}^n_{\mathrm{row}},\ t, t' \in \mathbb{K}) \tag{7.34}$$

がなりたつことがわかる (右辺において ${}^t y$, ${}^t y'$ はそれぞれ行ベクトル y, y' の転置を表す). したがって,

$$\mathfrak{n}_r(\mathbb{K}) := \{Z(x,y,t) \mid x, y \in \mathbb{K}^n_{\mathrm{row}}, t \in \mathbb{K}\} \quad (r = 2n+1) \tag{7.35}$$

は $\mathfrak{gl}(n+2, \mathbb{K})$ の部分リー代数になる.

いま, $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ を V のシンプレクティック基底 (命題 7.2 参照) とする. $v + t\boldsymbol{e} \in \mathfrak{n}(V)$, $v = \sum_{i=1}^{n} (x_i p_i + y_i q_i)$ に対して, $Z(x, y, t) \in \mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ を対応させる. このとき, 等式 (7.4) および (7.34) から次の命題を得る.

命題 7.12. 写像

$$\iota : \mathfrak{n}(V) \ni v + t\boldsymbol{e} \longmapsto Z(x,y,t) \in \mathfrak{n}_r(\mathbb{K}) \tag{7.36}$$

はハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ から $\mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ の上へのリー代数としての同型写像である.

問題 7.16. U を $\mathbb{K}$ 上 $n+2$ 次元の線形空間とし, U の部分空間の増大列

$$\mathcal{F} : U_0 = \{0\} \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 = U$$

を, $\dim U_1 = 1, \dim U_2 = n+1$ なるようにえらぶ. このとき, (7.21) により定まる $\mathfrak{gl}(U)$ の部分リー代数 $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ は $\mathfrak{n}_r(\mathbb{K}) (\cong \mathfrak{n}(V))$ と同型であることを示せ.

ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の基底 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \boldsymbol{e}$ は括弧積に関して次の交換関係をもつ : $i, j = 1, \ldots, n$ として,

$$\begin{cases} [p_i, q_j] = \delta_{ij}\boldsymbol{e}, \\ [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0, \\ [p_i, \boldsymbol{e}] = [q_i, \boldsymbol{e}] = 0. \end{cases} \tag{CCR}$$

これらの関係式は正準交換関係(canonical commutation relation, 略して CCR), あるいはハイゼンベルグの交換関係とよばれるものである.

問題 7.17. ベクトル

$$\frac{p_1+q_1}{\sqrt{2}},\dots,\ \frac{p_n+q_n}{\sqrt{2}},\ \frac{-p_1+q_1}{\sqrt{2}},\dots,\ \frac{-p_n+q_n}{\sqrt{2}},\ \boldsymbol{e},$$

も $\mathfrak{n}(V)$ の基底をなし, (CCR) を満たすことを確かめよ.

7.3.2 ワイル代数

交換関係 (CCR) に着目して, $\mathfrak{n}(V)$ を微分作用素のなすリー代数として実現してみよう. $\mathbb{K}[z_1,\dots,z_n]$ を $\mathbb{K}$ 上の n 変数多項式環とする. 簡単のためこれを $\mathbb{K}[z]$, $z=(z_1,\dots,z_n)$ と略記する. $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ を非負整数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ のなす**多重指数**とするとき, 単項式 $z^\alpha := z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ たちは, $\mathbb{K}[z]$ の線形空間としての基底をなす. いま, $\mathbb{K}[z]$ 上の線形変換 $\partial_i, m(z_i)\in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[z])$ $(i=1,\dots,n)$ を, それぞれ

$$\partial_i\cdot z^\alpha := \alpha_i z^{\alpha-\delta(i)},\quad m(z_i)\cdot z^\alpha = z^{\alpha+\delta(i)} \tag{7.37}$$

により定義する. ここで, $\delta(i)=(\delta_{1i},\dots,\delta_{ni})$ は第 i 成分のみが 1, 他の成分は 0 なる多重指数である. ∂_i は z_i に関する**偏微分作用素**, $m(z_i)$ は多項式に 1 次式 z_i を掛けるという**掛け算作用素**である. 以降, 誤解の恐れがないときには, $m(z_i)$ を単に z_i で表すことにする. $\mathbb{K}[z]$ 上の恒等変換を $\mathbf{1}=\mathrm{id}_{\mathbb{K}[z]}$ と書くとき, 作用素 ∂_i, z_j $(i,j=1,\dots,n)$ および $\mathbf{1}$ は, リー代数 $\mathfrak{gl}(\mathbb{K}[z])$ のなかで, 正準交換関係

$$\begin{cases} [\partial_i, z_j]=\delta_{ij}\mathbf{1}, \\ [\partial_i,\partial_j]=[z_i,z_j]=0, \\ [\partial_i,\mathbf{1}]=[z_j,\mathbf{1}]=0, \end{cases} \tag{7.38}$$

を満たすことが容易に確かめられる. したがって,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{K}\partial_i + \sum_{i=1}^n \mathbb{K}z_i + \mathbb{K}\mathbf{1} \tag{7.39}$$

は, ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ と同型なリー代数をなすことがわかる.

$\mathbb{K}[z]$ 上の線形変換全体 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[z])$ は, 線形変換の合成を積演算として, $\mathbb{K}$ 上の結合代数の構造をもつ. このなかで, ∂_i, z_i $(i=1,\dots,n)$ および $\mathbf{1}$ から生成される部分代数を n 次の**ワイル代数**とよび, 記号 $A_n(\mathbb{K})$ で表す. 交換関係 (7.38) より, $A_n(\mathbb{K})$ は多項式係数の n 変数微分作用素:

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} z^\alpha \partial^\beta \quad (c_{\alpha,\beta}\in\mathbb{K},\ \text{有限個の多重指数}\ \alpha,\beta\ \text{を除き}\ c_{\alpha,\beta}=0)$$

たち全体の集合に等しいことがわかる．ここで，

$$\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

である．結合代数 $A_n(\mathbb{K})$ はリー代数 $\mathfrak{gl}(\mathbb{K}[z])$ の部分リー代数でもある (例 7.3)．後の章で詳しく扱うヴェイユ表現の作用素は，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合に，シンプレクティックリー代数 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ をワイル代数 $A_n(\mathbb{C})$ のなかに次のような形で実現することをとおして得られるものである：

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cong \sum_{i,j} \mathbb{C} z_i z_j + \sum_{i,j} \mathbb{C}\Big(z_i \partial_j + \frac{1}{2}\Big) + \sum_{i,j} \mathbb{C} \partial_i \partial_j \subset A_n(\mathbb{C}). \tag{7.40}$$

この同型は定理 10.17 で詳しく取り上げるが，その予備的考察として，ここでは次の練習問題に取り組んでおこう．

問題 7.18. $1 \leq i \leq n$ なる自然数 i を固定する．このとき，

$$\mathbb{C} z_i^2 + \mathbb{C}\Big(z_i \partial_i + \frac{1}{2}\Big) + \mathbb{C} \partial_i^2 \ (\subset A_n(\mathbb{K}))$$

は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$ と同型な $A_n(\mathbb{C})$ の部分リー代数をなすことを，交換関係

$$[z_i \partial_i + (1/2),\ \sqrt{-1} z_i^2/2] = 2\left(\sqrt{-1} z_i^2/2\right),$$
$$[z_i \partial_i + (1/2),\ \sqrt{-1} \partial_i^2/2] = -2\left(\sqrt{-1} \partial_i^2/2\right),$$
$$[\sqrt{-1} z_i^2/2,\ \sqrt{-1} \partial_i^2/2] = z_i \partial_i + (1/2),$$

を確かめることにより示せ．

ワイル代数の性質やその表現については，教科書 [17, 第 5 章] あるいは [4, Chap. V] などを参照されたい．

7.3.3 ハイゼンベルグ代数の拡大

一般に，$\mathfrak{n}$ を体 $\mathbb{K}$ 上のリー代数とするとき，$\mathfrak{n}$ をイデアルとして含むリー代数 $\tilde{\mathfrak{n}} \supset \mathfrak{n}$ のことを，$\mathfrak{n}$ の**拡大**という．ここでは，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ のシンプレクティックリー代数 $\mathfrak{sp}(V)$ による自然な拡大を与えよう．

そのために，リー代数の拡大の一般的な構成法を用意する．

命題 7.13. $\mathfrak{g}, \mathfrak{n}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とし，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{n}$ の微分全体のなすリー代数 $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ への準同型写像 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ が与えられたとせよ．このとき，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{n}$ の線形空間としての直和空間 $\tilde{\mathfrak{n}} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}$ は，括弧積

$$[X + Y, X' + Y'] := [X, X'] + \{\rho(X)Y' - \rho(X')Y + [Y, Y']\} \qquad (X, X' \in \mathfrak{g},\ Y, Y' \in \mathfrak{n}) \tag{7.41}$$

によりリー代数となり，$\mathfrak{n}$ の拡大を与える．($\tilde{\mathfrak{n}}$ を $\mathfrak{n}$ の $(\rho, \mathfrak{g})$ による**半直積**とよび，$\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ と書く.)

証明. まず，$\tilde{\mathfrak{n}}$ が括弧積 (7.41) によりリー代数となることを確かめる．括弧積が $\tilde{\mathfrak{n}}$ 上の交代双1次写像であることは直ちにわかるので，ヤコビ恒等式 (7.17) を示せばよい．$Z = X + Y$, $Z = X' + Y'$, $Z'' = X'' + Y'' \in \tilde{\mathfrak{n}}$ $(X, X', X'' \in \mathfrak{g},\ Y, Y', Y'' \in \mathfrak{n})$ とする．このとき，$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ が準同型であることを用いて括弧積 $[Z, [Z', Z'']]$ を計算すると，

$$\begin{aligned}[Z,[Z',Z'']] = [X,[X',X'']] &+ [Y,[Y',Y'']] \\ &+ \rho(X)\rho(X')Y'' - \rho(X)\rho(X'')Y' \\ &- \rho(X')\rho(X'')Y + \rho(X'')\rho(X')Y \\ &- [Y'', \rho(X)Y'] + [Y', \rho(X)Y''] \\ &+ [Y, \rho(X')Y''] - [Y, \rho(X'')Y']\end{aligned}$$

を得る．次に，$Z \to Z' \to Z''$ と巡回的に置き換えて，括弧積 $[Z', [Z'', Z]]$ と $[Z'', [Z, Z']]$ を同様に書き下す．このようにして得られる3つの等式の右辺を足し合わせると結局零になり，$\tilde{\mathfrak{n}}$ においてヤコビ恒等式がなりたつことがわかる (あるいは，括弧積の双1次性より，Z, Z', Z'' のそれぞれが $\mathfrak{g}$ または $\mathfrak{n}$ に属するとして，場合分けをして調べることもできる)．また，$\mathfrak{n}$ が $\tilde{\mathfrak{n}}$ のイデアルであることは，括弧積の定義から明らかである．□

さて，$f \in \mathfrak{sp}(V)$ に対して，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ 上の1次変換 $\rho(f)$ を

$$\rho(f)(v + t\boldsymbol{e}) := f(v) \quad (v \in V,\ t \in \mathbb{K}) \tag{7.42}$$

により定める．このとき，$v + t\boldsymbol{e}, v' + t'\boldsymbol{e} \in \mathfrak{n}(V)$ について，

$$\rho(f)([v + t\boldsymbol{e},\ v' + t'\boldsymbol{e}]) = \rho(f)(B(v, v')\boldsymbol{e}) = 0$$

であり，一方で，

$$\begin{aligned}&[\rho(f)(v + t\boldsymbol{e}),\ v' + t'\boldsymbol{e}] + [v + t\boldsymbol{e},\ \rho(f)(v' + t'\boldsymbol{e})] \\ &\quad = \{B(f(v), v') + B(v, f(v'))\} \cdot \boldsymbol{e} = 0 \qquad ((7.18)\ \text{参照})\end{aligned}$$

であることから，$\rho(f)$ は $\mathfrak{n}(V)$ 上の微分を与える．また，対応 $f \mapsto \rho(f)$ がリー代数 $\mathfrak{sp}(V)$ から $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}(V))$ への準同型写像であることは，$\rho(f)$ の定義から直ちに従う．したがって，命題7.13より，この準同型 ρ から，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V) \cong \mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ のシンプレクティックリー代数 $\mathfrak{sp}(V) \cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ による拡大

$$\tilde{\mathfrak{n}}(V) := \mathfrak{sp}(V) \ltimes \mathfrak{n}(V) \quad (\text{行列形では } \tilde{\mathfrak{n}}_r(\mathbb{K}) := \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) \ltimes \mathfrak{n}_r(\mathbb{K})) \tag{7.43}$$

が得られる．

7.3.4 ハイゼンベルグ群

ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ に対応する群について，基本的な事柄を解説しておこう．

$\mathbb{K}$ に成分をもつ正方行列 Z が冪零であるとは，ある自然数 l が存在して $Z^l=0$ なるときをいう．このとき，指数行列 $\exp Z$ を

$$\exp Z := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z^k}{k!} = E + Z + \frac{1}{2}Z^2 + \cdots + \frac{1}{(l-1)!}Z^{l-1} \tag{7.44}$$

により定義することができる（E は単位行列）．ふたつの冪零行列 Z, Z' が互いに可換であれば，

$$\exp(Z+Z') = \exp Z \exp Z' \tag{7.45}$$

がなりたつことは，指数行列の定義を用いて容易にわかる．これより，とくに，

$$\exp Z \exp(-Z) = \exp(-Z)\exp Z = E, \quad \exp 0 = E,$$

が従う．よって，行列 $\exp Z$ は正則であり，その逆行列は $\exp(-Z)$ で与えられる．

いま，$Z(x,y,t)\in\mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ とする．$Z(x,y,t)^3=0$ ゆえ，$n+2$ 次正方行列 $Z(x,y,t)$ は冪零行列である．対応する指数行列は，簡単な計算により，

$$\exp Z(x,y,t) = E + Z(x,y,t+(1/2)\cdot x\,{}^t y) \tag{7.46}$$

になる．これを用いて行列の積を計算すると，$Z(x,y,t), Z(x',y',t')\in\mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ に対し，等式

$$\begin{aligned}&\exp Z(x,y,t)\exp Z(x',y',t') = \\ &\qquad \exp Z(x+x',\ y+y',\ t+t'+(1/2)\cdot(x{}^t y' - x'\,{}^t y))\end{aligned} \tag{7.47}$$

がなりたつことがわかる．

問題 7.19. 等式 (7.46) および (7.47) を示せ．

さて，$n+2$ 次正方行列の集合 $N_r(\mathbb{K})$ を，

$$N_r(\mathbb{K}) := E + \mathfrak{n}_r(\mathbb{K}) = \left\{\begin{pmatrix}1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \tag{7.48}$$

により定める．(7.46) と (7.47) から次の命題が直ちに得られる．

命題 7.14. (i) 指数写像 $\exp : Z(x,y,t) \mapsto \exp Z(x,y,t)$ は集合 $\mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ から集合 $N_r(\mathbb{K})$ への全単射を与える.

(ii) $N_r(\mathbb{K})$ は行列の積に関して群をなす.

再び (V,B) をシンプレクティック線形空間とし，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の要素たちが定める集合

$$N(V) := \{\exp(v+t\boldsymbol{e}) \mid v+t\boldsymbol{e} \in \mathfrak{n}(V)\} \tag{7.49}$$

を考える．すなわち，$N(V)$ は記号 $\exp(v+t\boldsymbol{e})$ たちを要素とし，$\mathfrak{n}(V) \ni v+t\boldsymbol{e} \mapsto \exp(v+t\boldsymbol{e}) \in N(V)$ が全単射であるような集合である．ここでは exp は単なる記号として用いており，(結局はそうなるのだが) あらかじめ指数写像を意味しているわけではない． $\mathfrak{n}(V)$ はリー代数の構造をすでにもっているため，それと区別するために別の集合 $N(V)$ を用意するのである.

このとき，命題 7.12 と命題 7.14 により，

$$N(V) \ni \exp(v+t\boldsymbol{e}) \longmapsto \exp Z(x,y,t) \in N_r(\mathbb{K}),$$
$$\text{ただし } v = \sum_{i=1}^{n}(x_i p_i + y_i q_i),$$

は $N(V)$ から $N_r(\mathbb{K})$ への全単射写像を与える．(7.4) と (7.47) に注意して，この全単射が群同型写像になるように集合 $N(V)$ に群の積演算を定義することができて，それは次のようになる：

$$\begin{aligned}\exp(v+t\boldsymbol{e})\exp(v'+t'\boldsymbol{e}) := \exp\{v+v'+(t+t'+(1/2)\cdot B(v,v'))\boldsymbol{e}\}\\ (v,v' \in V, t,t' \in \mathbb{K}).\end{aligned} \tag{7.50}$$

定義 7.12. 群 $N(V) \cong N_r(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ 上の r 次元**ハイゼンベルグ群**とよぶ.

命題 7.15. ハイゼンベルグ群 $N(V)$ について次がなりたつ.

(i) $N(V)$ の中心 $Z(N(V))$ は，$\exp t\boldsymbol{e}$ $(t \in \mathbb{K})$ たちからなる.

(ii) W, W' を V のラグランジュ部分空間とする (命題 7.7 参照)．このとき，$\exp W'$ と $P := \exp(W \oplus \mathbb{K}\boldsymbol{e})$ はともに $N(V)$ の可換な部分群である．さらに，部分群 P は $N(V)$ において正規である.

(iii) $V = W \oplus W'$ のとき，$N(V)$ は $\exp W'$ と P の半直積に等しい: $N(V) = \exp W' \ltimes P$.

証明. (i) $N(V)$ における積の定義 (7.50) より，$\exp(v+t\boldsymbol{e})$ $(v \in V, t \in \mathbb{K})$ が $N(V)$ の中心に属するためには，$B(v,v') = B(v',v)$ がすべての $v' \in V$ に対してなりたつことが必要十分条件である．B は V 上で非退化かつ反対称だから，後者の条件が満たされるのは $v = 0$ のときに限る．よって，$Z(N(V)) = \exp \mathbb{K}\boldsymbol{e}$ を得る.

(ii) シンプレクティック形式 B はラグランジュ部分空間 W, W' 上でそれぞれ零であることに注意すれば，$\exp W'$ と P が $N(V)$ の可換な部分群であることは，(7.50) から直ちにわかる．また，交換関係

$$nn' = n'n \cdot \exp B(v, v')\boldsymbol{e} \quad (n = \exp(v + t\boldsymbol{e}),\ n' = \exp(v' + t'\boldsymbol{e})) \tag{7.51}$$

から，$N(V)$ の交換子群 $[N(V), N(V)]$ は $\exp \mathbb{K}\boldsymbol{e}$ に一致することがわかる．したがって，交換子群を含む部分群 P は $N(V)$ の正規部分群である (問題 7.20).

(iii) $v \in V$ を $v = w + w'$ ($w \in W, w' \in W'$) と表すとき，

$$\exp(v + t\boldsymbol{e}) = \exp w' \cdot \exp(w + (t - (1/2)B(w', w))\boldsymbol{e})$$

より，$N(V) = (\exp W')P$ がわかる．また，$\exp W' \cap P = \{1\}$ ($1 := \exp 0$ は $N(V)$ の単位元) は明らかだから，$N(V)$ は $\exp W'$ と P との半直積に等しい． □

問題 7.20. 群 G の部分群 H が G の交換子群 $[G, G]$ を含むならば，H は G において正規であることを示せ．ここに，$[G, G]$ は $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ ($g_1, g_2 \in G$) たちが生成する G の部分群のことである．

7.3.5 余随伴軌道

最後に，ハイゼンベルグ群 $N(V)$ の余随伴(よずいはん)軌道を具体的に書き下しておこう．詳しくは第 10 章 (トピックス 8, p. 280) で触れるが，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合，余随伴軌道は実ハイゼンベルグ群の既約ユニタリ表現の同値類と 1 対 1 に対応している．

まず，$N(V)$ の要素 $n = \exp(v + t\boldsymbol{e})$ ($v \in V, t \in \mathbb{K}$) に対して，$\mathfrak{n}(V)$ 上の 1 次変換 $\mathrm{Ad}(n)$ を

$$\mathrm{Ad}(n)(v' + t'\boldsymbol{e}) := v' + (t' + B(v, v'))\boldsymbol{e} \quad (v' + t'\boldsymbol{e} \in \mathfrak{n}(V)) \tag{7.52}$$

で定義する．このとき，$(\mathrm{Ad}, \mathfrak{n}(V))$ は群 $N(V)$ の $\mathbb{K}$ 上の表現を定めることが容易にわかる (群の表現の一般的な定義は 2.2 節を参照).

補題 7.16. (i) $\exp \mathrm{Ad}(n)(v' + t'\boldsymbol{e}) = n \cdot \exp(v' + t'\boldsymbol{e}) \cdot n^{-1}$ がなりたつ．

(ii) $\mathrm{Ad}(n)$ はリー代数 $\mathfrak{n}(V)$ の自己同型写像である．

(iii) 対応 $\mathrm{Ad} : n \mapsto \mathrm{Ad}(n)$ は，$N(V)$ から $\mathfrak{n}(V)$ 上の正則な 1 次変換全体のなす群 $GL(\mathfrak{n}(V))$ への群準同型写像である．Ad を $N(V)$ のリー代数 $\mathfrak{n}(V)$ 上への**随伴表現**とよぶ．

問題 7.21. 上の補題を示せ．

次に，$\mathfrak{n}(V)$ の双対空間 $\mathfrak{n}(V)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{n}(V), \mathbb{K})$ に群 $N(V)$ を自然に働かせよう．すなわち，$n \in N(V)$ と $\psi \in \mathfrak{n}(V)^*$ に対して，

$$(\mathrm{Ad}^*(n)\psi)(v' + t'\boldsymbol{e}) := \psi(\mathrm{Ad}(n)^{-1}(v' + t'\boldsymbol{e}')) \tag{7.53}$$

により，$N(V)$ の $\mathfrak{n}(V)^*$ 上の表現 Ad^* を定義する．この表現を随伴表現 Ad の「反傾（はんけい）」とよび，$N(V)$ の**余随伴表現** (coadjoint representation) という．また，この作用に関する群 $N(V)$ の $\mathfrak{n}(V)^*$ における軌道のことを**余随伴軌道** (coadjoint orbit) という．

命題 7.17. $\mathbb{K}e$ の $\mathfrak{n}(V)^*$ における直交空間を $(\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp := \{\phi \in \mathfrak{n}(V)^* \mid \phi(\boldsymbol{e}) = 0\}$ とするとき，$\psi \in \mathfrak{n}(V)^*$ をとおる余随伴軌道 $\mathrm{Ad}^*(N(V))\psi$ は次のようになる．

$$\mathrm{Ad}^*(N(V))\psi = \begin{cases} \{\psi\} = (\text{一点}) & (\psi \in (\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp \text{のとき}) \\ \psi + (\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp & (\psi \notin (\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp \text{のとき}) \end{cases} \tag{7.54}$$

ここに，$\psi + (\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp = \{\phi \in \mathfrak{n}(V)^* \mid \phi(\boldsymbol{e}) = \psi(\boldsymbol{e})\}$ は ψ をとおり $(\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp$ と平行な超平面である．

証明. $v \in V$ に対して $\beta_v \in (\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp$ を $\beta_v(v' + t'\boldsymbol{e}) := B(v', v)$ により定める．このとき，B の非退化性より，$v \mapsto \beta_v$ は V と $(\mathbb{K}\boldsymbol{e})^\perp$ の間の線形同型を与える．これと (7.52) および (7.53) から $\mathrm{Ad}^*(n)\psi = \psi + \psi(\boldsymbol{e})\beta_v$ $(n = \exp(v + t\boldsymbol{e}))$ がわかり，命題を得る．　□

例 7.12. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 1$ のとき，$\mathfrak{n}(V)$ の基底 $p_1, q_1, \boldsymbol{e}$ の双対基底を $p_1^*, q_1^*, \boldsymbol{e}^*$ とする．$\psi = xp_1^* + yq_1^* + z\boldsymbol{e}^*$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ により $\mathfrak{n}(V)^*$ を (x, y, z) 空間と同一視する．このとき，ハイゼンベルグ群 $N(V)$ の余随伴軌道を (x, y, z) 空間内に図示すると次のようになる．

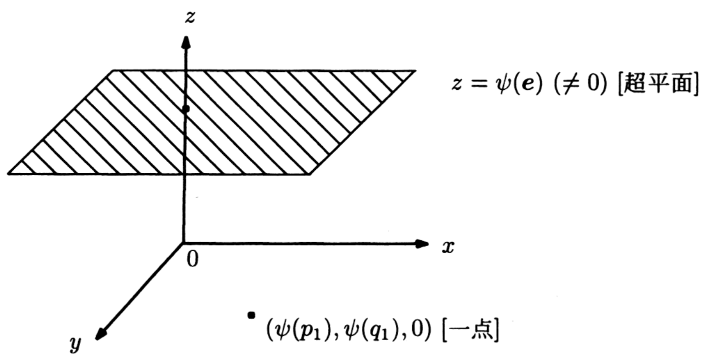


図 7.2. 3次元実ハイゼンベルグ群の余随伴軌道

第8章 実単純リー代数

本章では，実数体 $\mathbb{R}$ 上の単純リー代数を考察する．$\mathbb{C}$ 上の古典リー代数の実型(じつけい)として，どのような実単純リー代数が得られるかを，具体的に調べてみよう．とりわけエルミート型実型の構成と分類を詳しく解説する．エルミート型実型は，有界対称領域 (単位円板の一般化) に対応し，正則な保型形式や最低ウェイトをもつ既約ユニタリ表現の研究の舞台を与える．なかでも，実シンプレクティックリー代数は，他の種類のエルミート型実型 (AIII, DIII) を自然に含んでいる．いわば，親玉的な存在であって，面白くかつ重要である．

8.1 古典型実単純リー代数

8.1.1 複素リー代数の実型

$\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元リー代数とする．

定義 8.1. 次の 2 条件 (a), (b) を満たす $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{g}_0$ を複素リー代数 $\mathfrak{g}$ の**実型**という．また，$\mathfrak{g}_0$ からみて，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_0$ の**複素化**とよび，$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$ で表すことにする．

(a) $\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{g}$ の実部分リー代数である．すなわち，

$$X, Y \in \mathfrak{g}_0,\ a, b \in \mathbb{R} \quad \text{ならば} \quad aX + bY \in \mathfrak{g}_0,\ [X, Y] \in \mathfrak{g}_0.$$

(b) $\mathfrak{g}$ の実部分線形空間 $\mathfrak{g}_0$ の基底は，複素線形空間 $\mathfrak{g}$ の基底をなす．

任意の実リー代数 $\mathfrak{g}_0$ に対して，その複素化は次のように構成できる．実線形空間 $\mathfrak{g}_0$ の $\mathbb{C}$ への係数拡大 $\mathfrak{g} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$ は，括弧積

$$[\lambda \otimes X, \mu \otimes Y] := (\lambda\mu) \otimes [X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{g}_0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

により複素リー代数の構造をもち，標準的な埋め込み $\mathfrak{g}_0 \ni X \mapsto 1 \otimes X \in \mathfrak{g}$ をとおして，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_0$ の複素化を与える．なお，実リー代数の複素化は同型を除き一意的であるが，複素リー代数に対して，その実型には一般に (互いに同型でない) さまざまなものがある．

実一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ は複素一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の実型である．7.2.2 節で扱った他の古典リー代数についても，$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ が，それぞれ $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ の実型であることは明らかであろう．これらの実型を，**自然な実型**とよぼう．

命題 8.1. 複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0$ は $\mathbb{R}$ 上単純である．

証明. この命題は，実型と単純リー代数の定義からほとんど明らかであるが，考え方に慣れるため，丁寧に証明してみよう．

$\mathfrak{h}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ の零でないイデアルとし，$\mathfrak{g}_0$ の基底 $X_1,\dots,X_n$ を，最初の r 個 $X_1,\dots,X_r$ $(1 \leq r \leq n)$ が $\mathfrak{h}_0$ の基底となるようにとる．定義 8.1 (b) より，$X_1,\dots,X_n$ は複素線形空間 $\mathfrak{g}$ の基底をなす．いま，$\mathfrak{h}_0$ から生成される $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}$-部分空間を $\mathfrak{h}$ で表す：$\mathfrak{h} := \mathbb{C}X_1 + \cdots + \mathbb{C}X_r$. そのとき，$1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$ なる (i,j) に対して，$[X_i, X_j] \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0] \subset \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$ であり，$\mathfrak{g}$ の括弧積は $\mathbb{C}$-双 1 次であることから，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになることがわかる．仮定より $\mathfrak{g}$ は単純なので，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ を得る．ゆえに，$r = n$, すなわち $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}_0$ が従う．

また，もし $\mathfrak{g}_0$ が可換ならば，$[X_i, X_j] = 0$ $(i,j = 1,\dots,n)$ から，$\mathfrak{g} = \mathbb{C}X_1 + \cdots + \mathbb{C}X_n$ も可換になり，これは $\mathfrak{g}$ の単純性に反する． □

注意 8.1. 命題 8.1 の逆「実リー代数 $\mathfrak{g}_0$ が単純のとき，その複素化 $(\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$ も単純である」はなりたたない．実際，$\mathfrak{g}$ を複素単純リー代数としたとき，$\mathfrak{g}$ を自然に実リー代数とみなして得られるリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上単純になることが知られている (問題 8.1 も参照)．一方，$\mathfrak{g}$ において虚数単位を掛けるという線形変換を j とし，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の複素化における虚数単位を $\sqrt{-1}$ で表すとき，対応

$$(X,Y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \sqrt{-1}jX) + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - \sqrt{-1}jY) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}) \tag{8.1}$$

は，直和リー代数 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の複素化 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ への同型を与える (問題 8.2)．よって，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上半単純ではあるが，単純ではない．

問題 8.1. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ は実リー代数として単純であることを証明せよ．

問題 8.2. 写像 (8.1) が $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ と $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ の間の同型写像であることを示せ．

◆トピックス 3 (実単純リー代数の分類). ……………………………………………

一般に，$\mathbb{R}$ 上の有限次元単純リー代数は，その複素化が単純であるかどうかに応じて，

(i)　複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0$（実型タイプ，複素化 $\mathfrak{g}$ は単純），
(ii)　$\mathfrak{g}$ を実リー代数とみなした $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (複素タイプ，複素化 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ は単純でない)，

の 2 種類に分かれる．(i) のタイプの実単純リー代数 $\mathfrak{g}_0$ は，複素化 $\mathfrak{g}$ のディンキン図形に然るべき情報：頂点の塗りつぶしと矢印，を付加した**佐武図形**を用いて分類することができる．多少異なった観点からの，**ヴォーガン図形**による分類もある．一方，(ii) のタイプのリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は，複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と 1 対 1 に対応しており，したがって，7.2.3 節で述べたディンキン図形を用いて分類できる．これらについては，例えば [25, Chap. VI] (ヴォーガン図形による分類) が参考になろう．歴史的には，実単純リー代数の分類を最初に与えたのはカルタン (É. Cartan; 5.7.1 節参照) である．

以下，本節 8.1 の残り部分と次節 8.2 で，$\mathfrak{g}$ を古典型の複素単純リー代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ として，$\mathfrak{g}$ のさまざまな実型とその構造を調べていこう．

8.1.2 コンパクト実型

n 次複素正方行列 X に対して，

$$\theta(X) := -X^* \quad (\text{ただし } X^* := \overline{{}^tX})$$

とおく．このとき，θ は，$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の実リー代数としての**対合的** (すなわち $\theta^2 = \mathrm{id}$) な同型写像を定める (対合は「たいごう」あるいは「ついごう」と読む)．実際，

$$\theta^2(X) = -(-X^*)^* = (X^*)^* = X,$$
$$\theta([X,Y]) = -(XY - YX)^* = -Y^*X^* + X^*Y^* = [\theta(X), \theta(Y)],$$

となっている．θ を $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の**カルタン対合**という．θ の固定点全体

$$\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \theta(X) = X\} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \tag{8.2}$$

は歪(わい)エルミート行列全体からなる実部分リー代数であり，これを n 次**ユニタリ (リー) 代数**とよぶ．

任意の $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ は，歪エルミート行列

$$Y = \frac{1}{2}(X + \theta(X)) \in \mathfrak{u}(n)$$

とエルミート行列

$$Z = \frac{1}{2}(X - \theta(X)) \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(n)$$

の和 $X = Y + Z$ に，ただ一通りの方法で書き表される．よって，

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{u}(n) \quad (\text{実線形空間の直和}). \tag{8.3}$$

したがって $\mathfrak{u}(n)$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の実型である．この直和分解は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の θ-固有空間分解 (**カルタン分解**) を与え，$\mathfrak{u}(n)$, $\sqrt{-1}\,\mathfrak{u}(n)$ は，それぞれ θ の固有値 1, -1 に属する固有空間に等しい．

さて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ とし，自然数 m を，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ のときには $m := n$，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ のときには $m := 2n$，により定める．このとき，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の部分リー代数である．

命題 8.2. (i) $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ のカルタン対合 θ は，上にあげた部分リー代数 $\mathfrak{g}$ を安定にする：$\theta(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$．$\theta$ の $\mathfrak{g}$ への制限を $\mathfrak{g}$ の**カルタン対合**とよび，これも同じ記号 θ で表すことにする．

(ii) $\mathfrak{g}_u := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(m)$ は $\mathfrak{g}$ の実型であり，$\mathfrak{g}$ は実線形空間として，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_u \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_u \tag{8.4}$$

と直和分解する．

証明. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ の場合に証明する (他の場合も同様である).

(i)　$X\in\mathfrak{g}$ とする．すなわち，$X\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ は，${}^tXJ+JX=0$ を満たす (例 7.9 参照). この両辺に θ を施すと，$\theta(J)=J$ に注意して，

$$0=\theta({}^tXJ+JX)=-J\theta({}^tX)-\theta(X)J=-J^t\theta(X)-\theta(X)J$$

を得る．これと $J^2=-E_m$ から，

$${}^t\theta(X)J+J\theta(X)=-J(J^t\theta(X)+\theta(X)J)J=0,$$

すなわち，$\theta(X)\in\mathfrak{g}$ がわかる．

(ii)　(i) の結果より，θ は $\mathfrak{g}$ 上の対合的同型写像を誘導し，

$$\mathfrak{g}=(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{u}(m))\oplus(\mathfrak{g}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{u}(m)),\qquad \mathfrak{g}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{u}(m)=\sqrt{-1}(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{u}(m))$$

は，θ に関する $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を与える．これより (ii) は直ちに従う．□

定義 8.2. $\mathfrak{g}_u=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{u}(m)$ を $\mathfrak{g}$ の**コンパクト実型**とよび，$\mathfrak{g}_u=\mathfrak{su}(n)$ ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ のとき)，$\mathfrak{sp}(n)$ ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ のとき)，$\mathfrak{o}(n)$ ($\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ のとき)，と表記する．

注意 8.2. $\mathfrak{o}(n)$ は，$\mathbb{R}$ 上の n 次交代行列全体のなす直交リー代数 $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})=\mathfrak{o}(n,0)$ (例 7.10) に等しい．

例 8.1. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のコンパクト実型 $\mathfrak{su}(2)$ において，

$$F_1:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}&0\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{-1}}{2}(X_++X_-),$$
$$F_2:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(-X_++X_-),$$
$$F_3:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\ 0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{-1}}{2}H,$$

は，交換関係

$$[F_1,F_2]=F_3,\quad [F_2,F_3]=F_1,\quad [F_3,F_1]=F_2 \tag{8.5}$$

を満たす $\mathfrak{su}(2)$ の基底をなす．ここに，(X_+,H,X_-) は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の標準トリプルである (例 7.8)．なお，$(-2\sqrt{-1}F_1,2\sqrt{-1}F_2,-2\sqrt{-1}F_3)$ はパウリの σ 行列とよばれている (4.1 節).

8.1.3 θ-安定な実型とそのカルタン分解

古典型複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0$ が $\theta(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{g}_0$ を満たすとき，$\mathfrak{g}_0$ を **θ-安定な実型**であるという．ここに，θ は $\mathfrak{g}$ のカルタン対合 (命題 8.2 (i) 参照) である．$\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}'_0$ を任意に取ったとき，$\mathfrak{g}'_0$ を θ-安定な実型 $\mathfrak{g}_0=\eta(\mathfrak{g}'_0)$ に移す $\mathfrak{g}$ の同型写像 η が存在することが知られている．この事実に基づき，以下では θ-安定な実型 $\mathfrak{g}_0$ を扱うことにする．このとき，

$$\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u, \quad \mathfrak{p}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \sqrt{-1}\mathfrak{g}_u, \tag{8.6}$$

とおけば，$\mathfrak{k}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の部分リー代数であり，(8.4) から $\mathfrak{g}_0$ の分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0, \quad [\mathfrak{k}_0,\mathfrak{k}_0] \subset \mathfrak{k}_0,\ [\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0,\ [\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{k}_0, \tag{8.7}$$

が得られる．これを実リー代数 $\mathfrak{g}_0$ の**カルタン分解**とよび，$\mathfrak{k}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ の**極大コンパクト部分リー代数**という．$\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0$ から $\mathbb{C}$ 上生成される $\mathfrak{g}$ の部分空間を，それぞれ $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ とすれば，(8.7) は，複素線形空間 $\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k},\ [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p},\ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \tag{8.8}$$

を引き起こす．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}_0$ の**複素カルタン分解**という．なお，$\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0$ は，複素カルタン分解に現れる $\mathfrak{k},\mathfrak{p}$ とコンパクト実型 $\mathfrak{g}_u$ から次のように復元することができる:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_u \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_u).$$

例 8.2. (i) $\mathfrak{g}$ のコンパクト実型 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_u$ は θ-安定であり，$\mathfrak{k}_0=\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{p}_0=\{0\}$ となる．

(ii) $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ の自然な実型 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})=\mathfrak{o}(n)$ は，それぞれ θ-安定である．対応する極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}_0$ は，それぞれ，

$$\mathfrak{k}_0 = \begin{cases} \mathfrak{o}(n) & (\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \text{ のとき}) \\ \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{o}(2n) \cong \mathfrak{u}(n) & (\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \text{ のとき}) \\ \mathfrak{o}(n) & (\mathfrak{g}_0=\mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) \text{ のとき}) \end{cases} \tag{8.9}$$

で与えられる．なお，同型 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})\cap\mathfrak{o}(2n)\cong\mathfrak{u}(n)$ については，8.2.1 節で詳しく論じる．

(iii) 符号 (p,q), $n=p+q$, の直交リー代数 $\mathfrak{o}(p,q)$ は，$\mathfrak{o}(\varepsilon(p),\mathbb{C})\cong\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ (例 7.10 および注意 7.1(ii) 参照) の θ-安定な実型であり，部分リー代数 $\mathfrak{k}_0=\mathfrak{o}(p,q)\cap\mathfrak{u}(n)$ は，

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & O \\ O & X_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, X_1 \in \mathfrak{o}(p),\ X_2 \in \mathfrak{o}(q) \right\} \cong \mathfrak{o}(p) \oplus \mathfrak{o}(q) \tag{8.10}$$

と書き表される．

8.2 エルミート型実型

本節では，複素古典リー代数 $\mathfrak{g}$ の実型がエルミート型であるという概念を導入し，エルミート型実型 $\mathfrak{g}_0$ を具体的に構成 (分類) する．幾何学的には，$\mathfrak{g}_0$ は不変複素構造をもつエルミート対称空間に対応する実単純リー代数のことであるが，ここでは，それと同値だが，代数的でより扱いやすい定義 (定義 8.3) を採用し，カルタンの分類記号 AIII, CI, DIII, BDI などを用いる．

8.2.1 定義および実例 (AIII, CI, DIII, BDI)

定義 8.3. 複素単純 (古典) リー代数 $\mathfrak{g}$ の θ-安定な実型 $\mathfrak{g}_0$ が**エルミート型**であるとは，$\mathfrak{g}_0$ の極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}_0$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0)$ が $\{0\}$ でないときをいう．

例えば，実特殊線形リー代数 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ については，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{o}(n)$ であるから，$\mathfrak{g}_0$ がエルミート型になるのは，$n = 2$ のときだけである (定理 7.11 参照).

本節では，古典リー代数のエルミート型実型 $\mathfrak{g}_0$ を列挙し，カルタン分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ および中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0)$ を具体的に書き下してみよう．さらに，後の章の準備をかねて，異なるエルミート型実型 AIII, CI, DIII の間の相互関係 (埋め込み) も論じる．

AIII 型: $\mathfrak{su}(p,q)$, $n = p + q \geq 2$ $(p, q > 0)$

$n \geq 2$ とする．h が n 次元複素線形空間 V 上の非退化なエルミート形式であるとき，h を不変にする V 上の線形変換全体のなすリー代数 $\mathfrak{u}(h)$ ((7.19) 参照) を h に付随した**ユニタリ (リー) 代数**という．また，$\mathfrak{u}(h)$ のイデアル

$$\mathfrak{su}(h) := \mathfrak{u}(h) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \tag{8.11}$$

を，h に付随した**特殊**ユニタリ (リー) 代数 とよぶ．

いま，(p,q) をエルミート形式 h の符号とし，V の直交基底 $\mathcal{E} = (v_1, \ldots, v_n)$ を (7.15) のようにとる．このとき，基底 $\mathcal{E}$ に関して V 上の線形変換の行列表示を与える写像 $R_{\mathcal{E}}$: $\mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ をとおして，$\mathfrak{u}(h)$ および $\mathfrak{su}(h)$ を n 次正方行列のなす実リー代数として実現すると，

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(p,q) &:= \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* I(p) + I(p)X = 0\} \cong \mathfrak{u}(h), \\ \mathfrak{su}(p,q) &:= \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(h), \end{aligned} \tag{8.12}$$

が得られる．ここに $I(p)$ は (7.8) で定まる対角行列である．$\mathfrak{u}(p,q)$ に属する行列 X は，$X_{11} \in M_p(\mathbb{C})$, $X_{12} \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, および $X_{22} \in M_{q,p}(\mathbb{C})$ を用いて，

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}, \quad ただし，X_{11}^* = -X_{11}，X_{22}^* = -X_{22}, \tag{8.13}$$

の形に表される．$X \in \mathfrak{su}(p,q)$ となるのは，さらに $\operatorname{tr} X_{11} + \operatorname{tr} X_{22} = 0$ がなりたつ場合である．これから，$\mathfrak{u}(p,q)$, $\mathfrak{su}(p,q)$ はそれぞれ $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の θ-安定な実型であることがわかる．$\mathfrak{su}(p,q)$ は**AIII** 型の実単純リー代数とよばれている．$p = 0, n$ のとき，$\mathfrak{su}(p,q)$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ のコンパクト実型 $\mathfrak{su}(n)$ に他ならない．

再び (8.13) をみると，$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{su}(p,q)$ のカルタン分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ は，

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_0 &= \left\{ X_e := \begin{pmatrix} X_{11} & O \\ O & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \right\} =: \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q)), \\ \mathfrak{p}_0 &= \left\{ X_o := \begin{pmatrix} O & X_{12} \\ X_{12}^* & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \right\}, \end{aligned} \tag{8.14}$$

により与えられることがわかる．これから，$X_e \in \mathfrak{k}_0$ が $\mathfrak{k}_0$ の中心に属するためには，X_{11}, X_{22} がともにスカラー行列であることが必要十分条件になる．よって，$p \neq 0, n$ のとき，$\mathfrak{k}_0$ の中心は，

$$Z_0 := \frac{\sqrt{-1}}{n} \begin{pmatrix} qE_p & O \\ O & -pE_q \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}_0 \tag{8.15}$$

を用いて，$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0) = \mathbb{R} Z_0$ と表される．さらに，

$$\mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathbb{R} \ni (A, D, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} + \lambda Z_0 \in \mathfrak{k}_0$$

は，リー代数の同型

$$\mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathbb{R} \cong \mathfrak{k}_0 \tag{8.16}$$

を定める ($\mathbb{R}$ は 1 次元可換リー代数)．なお，$p = 0, n$ のときは，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{su}(n)$ は単純なので (命題 8.1)，その中心は零行列のみからなる．

以上の議論をまとめて，次の命題を得る．

命題 8.3. $0 < p < n$ のとき，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p,q)$ $(q = n - p)$ の極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$ は 1 次元の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0) = \mathbb{R} Z_0$ をもつ．したがって，$\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ のエルミート型実型である．

さて，任意の $f \in \mathfrak{u}(h)$ は，h の虚部が定める $V_{\mathbb{R}}$ 上のシンプレクティック形式 $B = \mathcal{I}m\, h$ (命題 7.8 (ii) 参照) を不変にする．したがって，$\mathfrak{u}(h)$ や $\mathfrak{su}(h)$ はシンプレクティックリー代数 $\mathfrak{sp}(V_{\mathbb{R}}, B)$ の部分リー代数と自然にみなすことができる:

$$\mathfrak{su}(h) \subset \mathfrak{u}(h) \subset \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{R}}, B). \tag{8.17}$$

この包含関係は，対応する行列のリー代数の埋め込みを自然に引き起こす．実際，h に関する V の直交基底 $\mathcal{E}=(v_1,\dots,v_n)$ から，$V_{\mathbb{R}}$ のシンプレクティック基底 $\mathcal{E}'=(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)$ を命題 7.10 のように構成する．このとき，線形変換にその表現行列を対応させる写像

$$R_{\mathcal{E}}:\mathfrak{u}(h)\longrightarrow\mathfrak{u}(p,q),\qquad R_{\mathcal{E}'}:\mathfrak{sp}(V_{\mathbb{R}})\longrightarrow\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$$

は，それぞれ，リー代数の同型を与える．よって $\iota:=R_{\mathcal{E}'}\circ R_{\mathcal{E}}^{-1}$ により，リー代数の埋め込み

$$\mathfrak{su}(p,q)\subset\mathfrak{u}(p,q)\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$$

が得られる．この埋め込み ι を具体的に書き下すと次のようになる．

補題 8.4. $X=X^{(1)}+\sqrt{-1}X^{(2)}\in\mathfrak{u}(p,q)$ $(X^{(1)},X^{(2)}\in M_n(\mathbb{R}))$ に対して，

$$\iota(X)=\begin{pmatrix}X^{(1)} & X^{(2)}I(p)\\ -I(p)X^{(2)} & I(p)X^{(1)}I(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X^{(1)} & X^{(2)}I(p)\\ -I(p)X^{(2)} & -{}^tX^{(1)}\end{pmatrix}\tag{8.18}$$

がなりたつ (行列 X のサイズは $n\times n$ であるのに対し，$\iota(X)$ は $2n$ 次の正方行列であることに注意せよ)．

証明. 実行列 $X^{(k)}$ $(k=1,2)$ の第 (i,j) 成分を $x_{ij}^{(k)}$ と書くとき，V 上の 1 次変換 $f:=R_{\mathcal{E}}^{-1}(X)$ は，

$$f(v_j)=\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}^{(1)}+\sqrt{-1}x_{ij}^{(2)})v_i\quad(j=1,\dots,n)$$

により定まる．$p_j=v_j$, $q_j=-\sqrt{-1}\varepsilon(p)_jv_j$ を用いて，上の式から，

$$\begin{aligned}f(p_j)&=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{(1)}p_i+\sum_{i=1}^{n}(-\varepsilon(p)_ix_{ij}^{(2)})q_i,\\ f(q_j)&=\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}^{(2)}\varepsilon(p)_j)p_i+\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(p)_ix_{ij}^{(1)}\varepsilon(p)_j)q_i,\end{aligned}\tag{8.19}$$

を得る．これは，$R_{\mathcal{E}'}(f)=\iota(X)$ が (8.18) の中央の行列に等しいことを示している．また，この行列は $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ に属するので，$I(p)X^{(1)}I(p)=-{}^tX^{(1)}$ でなければならない． □

CI 型: $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, $n\geq 1$

次に，複素シンプレクティックリー代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ の自然な実型 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ を考察する．$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ を**CI** 型の実単純リー代数という．$\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$ は，

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_0&=\left\{\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ -X_{12} & X_{11}\end{pmatrix}\ \middle|\ {}^tX_{11}=-X_{11},\ {}^tX_{12}=X_{12}\right\},\\ \mathfrak{p}_0&=\left\{\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12} & -X_{11}\end{pmatrix}\ \middle|\ {}^tX_{11}=X_{11},\ {}^tX_{12}=X_{12}\right\},\end{aligned}\tag{8.20}$$

により与えられるが (ここに $X_{11}, X_{12} \in M_n(\mathbb{R})$)，これはあまり見やすい形とはいえない．しかし，次のようにして定まる $\mathfrak{g}_0$ と同型な実型 $\mathfrak{g}_0'$ を ($\mathfrak{g}_0$ の代わりに) 考えることにより，カルタン分解をより見やすく表示することが可能になる．

正則な $2n$ 次複素正方行列 $\boldsymbol{c}$ を，

$$\boldsymbol{c} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_n & -\sqrt{-1}E_n \\ -\sqrt{-1}E_n & E_n \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

により定める．${}^t\boldsymbol{c}J\boldsymbol{c} = J$ と $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}^{-1}$ に注意すれば，

$$\tilde{\boldsymbol{c}}(X) := \boldsymbol{c}X\boldsymbol{c}^{-1} \quad (X \in \mathfrak{g}) \tag{8.22}$$

は，リー代数の同型写像 $\tilde{\boldsymbol{c}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を与え，さらに，$\tilde{\boldsymbol{c}}$ は θ と可換であることがわかる．($\tilde{\boldsymbol{c}}$ を $\mathfrak{g}$ 上の**ケーリー変換**とよぶ.) これより，

$$\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})' := \tilde{\boldsymbol{c}}(\mathfrak{g}_0) \cong \mathfrak{g}_0 \tag{8.23}$$

は，$\mathfrak{g}$ の θ-安定な実型を与える．

さて，$X \in \mathfrak{g}$ のケーリー変換 $\tilde{\boldsymbol{c}}(X)$ を具体的に書き下すと次のようになる:

$$\tilde{\boldsymbol{c}}\left(\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -{}^tX_{11} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X_e^- + \sqrt{-1}X_o^- & X_o^+ + \sqrt{-1}X_e^+ \\ X_o^+ - \sqrt{-1}X_e^+ & X_e^- - \sqrt{-1}X_o^- \end{pmatrix}. \tag{8.24}$$

ただし，

$$X_e^{\pm} := \frac{1}{2}(X_{11} \pm {}^tX_{11}), \quad X_o^{\pm} := \frac{1}{2}(X_{12} \pm X_{21}) \quad (\text{複号同順})$$

である．したがって，とくに

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_0' &:= \tilde{\boldsymbol{c}}(\mathfrak{k}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} Z & O \\ O & \overline{Z} \end{pmatrix} \;\middle|\; Z \in \mathfrak{u}(n) \right\} \cong \mathfrak{u}(n), \\ \mathfrak{p}_0' &:= \tilde{\boldsymbol{c}}(\mathfrak{p}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} O & W \\ \overline{W} & O \end{pmatrix} \;\middle|\; W \in M_n(\mathbb{C}),\ {}^tW = W \right\}, \end{aligned} \tag{8.25}$$

が得られ，$\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{k}_0' \oplus \mathfrak{p}_0'$ が $\mathfrak{g}_0'$ のカルタン分解を与える．

以上のことを，次の命題にまとめておこう．

命題 8.5. *$\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})' (\cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}))$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ のエルミート型実型であり，極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}_0' \cong \mathfrak{u}(n)$ は 1 次元の中心:*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0') = \mathbb{R}Z_0, \quad Z_0 := \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & -E_n \end{pmatrix}, \tag{8.26}$$

をもつ．

ここで，$\mathfrak{u}(p,q)$ の $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ への埋め込み ι (補題 8.4) とケーリー変換 $\tilde{\mathbf{c}}$ の合成 $\tilde{\iota} := \tilde{\mathbf{c}} \circ \iota$, つまり，

$$\tilde{\iota}:\ \mathfrak{u}(p,q) \ \overset{\iota}{\hookrightarrow}\ \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \ \overset{\tilde{\mathbf{c}}}{\longrightarrow}\ \mathfrak{g}_0'$$

を記述しておこう．この埋め込み $\tilde{\iota}$ の具体形は結構見やすい形になり，第 11 章で $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ のヴェイユ表現 (フォック模型) の $\mathfrak{u}(p,q)$ への制限を扱う際に必要になる．

命題 8.6. 行列 $X = \begin{pmatrix} Z & P \\ P^* & W \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(p,q)$ ($Z \in M_p(\mathbb{C})$, $W \in M_q(\mathbb{C})$, $P \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, $Z^* = -Z$, $W^* = -W$) の $\tilde{\iota}$ による像は，

$$\tilde{\iota}(X) = \left(\begin{array}{cc|cc} Z & O & O & \sqrt{-1}P \\ O & \overline{W} & \sqrt{-1}\,{}^tP & O \\ \hline O & -\sqrt{-1}\,\overline{P} & \overline{Z} & O \\ -\sqrt{-1}P^* & O & O & W \end{array}\right) \tag{8.27}$$

と書き表される．

この命題より，$\tilde{\iota}$ を複素線形に拡張して得られる複素リー代数の埋め込み：

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(p,q) \ \overset{\tilde{\iota}}{\hookrightarrow}\ \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0'$$

(これも同じ記号 $\tilde{\iota}$ で表す) は，

$$\tilde{\iota}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} A & O & O & \sqrt{-1}B \\ O & -{}^tD & \sqrt{-1}\,{}^tB & O \\ \hline O & -\sqrt{-1}\,{}^tC & -{}^tA & O \\ -\sqrt{-1}C & O & O & D \end{array}\right) \tag{8.28}$$

で与えられることがわかる (ここに，A, B, C, D はそれぞれ $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ 複素行列である)．なぜなら，(8.28) は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ から $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ への複素線形写像であって，実型 $\mathfrak{u}(p,q)$ 上では (8.27) と一致しているからである．

命題 8.6 の証明. $X = X^{(1)} + \sqrt{-1}X^{(2)} \in \mathfrak{u}(p,q)$ ($X^{(i)} \in M_n(\mathbb{R})$, $i = 1,2$) の対称・反対称部分を，それぞれ，

$$X_+^{(i)} := \frac{1}{2}(X^{(i)} + {}^tX^{(i)}), \quad X_-^{(i)} := \frac{1}{2}(X^{(i)} - {}^tX^{(i)})$$

と書く．$X^*I(p) + I(p)X = 0$ の実部・虚部を考えて，

$${}^tX^{(1)}I(p) + I(p)X^{(1)} = 0, \quad -{}^tX^{(2)}I(p) + I(p)X^{(2)} = 0$$

がなりたつことに注意し，補題 8.4 と等式 (8.24) を適用すれば，

$$\tilde{\iota}(X) = \begin{pmatrix} U & V \\ \overline{V} & \overline{U} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} U := X_-^{(1)} + \sqrt{-1}X_+^{(2)} I(p), \\ V := X_-^{(2)} I(p) + \sqrt{-1}X_+^{(1)}, \end{array} \tag{8.29}$$

を得る.

一方，Z, W, P の実部・虚部への分解を，同様に $Z = Z^{(1)} + \sqrt{-1}Z^{(2)}$ などと書く．行列 $Z^{(1)}$, $W^{(1)}$ は反対称，$Z^{(2)}$, $W^{(2)}$ は対称であることに留意して，

$$X_+^{(1)} = \begin{pmatrix} O & P^{(1)} \\ {}^tP^{(1)} & O \end{pmatrix}, \quad X_-^{(1)} = \begin{pmatrix} Z^{(1)} & O \\ O & W^{(1)} \end{pmatrix},$$
$$X_+^{(2)} = \begin{pmatrix} Z^{(2)} & O \\ O & W^{(2)} \end{pmatrix}, \quad X_-^{(2)} = \begin{pmatrix} O & P^{(2)} \\ -{}^tP^{(2)} & O \end{pmatrix},$$

がわかる．これを (8.29) に代入して整理すると，等式 (8.27) が得られる． □

デュアルペア. 一般に，リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{a}$ に対して，

$$\mathfrak{a}^\vee = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, A] = 0 \ (\forall A \in \mathfrak{a})\}$$

は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数をなす．$\mathfrak{a}^\vee$ を $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{g}$ における**中心化リー代数**という．明らかに，$\mathfrak{a}^\vee$ の中心化リー代数は $\mathfrak{a}$ を含む: $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a}^\vee)^\vee$．ここで等号が成立するとき，$\mathfrak{g}$ の部分リー代数の対 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^\vee$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^\vee$, は $\mathfrak{g}$ において**デュアルペア**(dual pair) をなすという．なお，対 $(\mathfrak{a}^\vee, (\mathfrak{a}^\vee)^\vee)$ はつねに $\mathfrak{g}$ におけるデュアルペアとなることに注意する (検証してみよう).

埋め込み $\tilde{\iota}$ はリー代数 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ におけるデュアルペアの一例を与える.

命題 8.7. (i) 埋め込み $\tilde{\iota}$ により，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ を $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の部分リー代数とみなすとき，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の中心化リー代数 $\mathfrak{c} := \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^\vee$ は，

$$\mathfrak{c} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} I(p) & O \\ O & -I(p) \end{pmatrix} \cong \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

で与えられ，対 $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{c})$ は $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ においてデュアルペアをなす.

(ii) $\mathfrak{u}(p, q)$ と $\mathfrak{c}_0 := \mathfrak{c} \cap \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})' \cong \mathfrak{u}(1)$ は実リー代数 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})'$ においてデュアルペアをなす.

等式 (8.28) からこの命題を導くのは容易である．詳細は読者に委ねる.

問題 8.3. 命題 8.7 を証明せよ.

DIII 型: $\mathfrak{o}^*(2n)$, $n \geq 3$

今度は直交リー代数のエルミート型実型を構成しよう．V を $2n$ 次元複素線形空間とする．V 上の非退化対称双1次形式 B に関する直交リー代数 $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V, B)$ は，表現行列を対応させる写像 $R_{\mathcal{E}}$ によって，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ と同型であった (注意 7.1(i))．ここで，$\mathcal{E} = (v_1, \ldots, v_{2n})$ は V の B に関する正規直交基底である．以下で構成するエルミート型実型のカルタン分解を見やすく表示するため，ここでは，

$$v_i' := \frac{1}{\sqrt{2}}(v_i + \sqrt{-1}v_{n+i}), \quad v_{n+i}' := \frac{1}{\sqrt{2}}(v_i - \sqrt{-1}v_{n+i}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

たちがなす V の基底 $\mathcal{E}' := (v_1', \ldots, v_{2n}')$ を考える．この基底に関して $\mathfrak{o}(V)$ を行列表示すると，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ と同型なリー代数

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}' = \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})' := \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^tXJ' + J'X = 0\} \cong \mathfrak{g}, \\ &\text{ただし } J' := \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.30}$$

が得られる．具体的には，リー代数 $\mathfrak{g}'$ の要素 X は，$X_{11}, X_{12}, X_{21} \in M_n(\mathbb{C})$ を用いて，

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -{}^tX_{11} \end{pmatrix}, \quad X_{12}, X_{21} \text{ は交代行列}, \tag{8.31}$$

の形になる．また，行列

$$\boldsymbol{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_n & -\sqrt{-1}E_n \\ E_n & \sqrt{-1}E_n \end{pmatrix}$$

は ${}^t\boldsymbol{a}J'\boldsymbol{a} = E_{2n}$ を満たすことから，写像

$$\mathfrak{g} \ni X \longmapsto Y := \boldsymbol{a}X\boldsymbol{a}^{-1} \in \mathfrak{g}' \tag{8.32}$$

が $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への同型写像を与えることもわかる．さらに，$\mathfrak{g}'$ は θ-安定であり，$\theta(Y) = -Y^*$ は，リー代数 $\mathfrak{g}'$ のカルタン対合となる．なぜなら，$X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\theta(\boldsymbol{a}X\boldsymbol{a}^{-1}) = (\boldsymbol{a}^{-1})^*\theta(X)\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a}\theta(X)\boldsymbol{a}^{-1} \in \mathfrak{g}'$$

であるから，同型 (8.32) をとおして θ (の $\mathfrak{g}$ への制限) から引き起こされる $\mathfrak{g}'$ の対合的な同型はやはり θ に他ならない．

さて，$\mathfrak{g}_0' := \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{su}(n, n)$ とおく．(8.13) と (8.31) から，$\mathfrak{g}_0'$ は行列

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ -\overline{X_{12}} & \overline{X_{11}} \end{pmatrix}, \quad X_{11}^* = -X_{11}, \ {}^tX_{12} = -X_{12}, \tag{8.33}$$

からなり，$\mathfrak{g}'$ の θ-安定な実型であることがわかる．$\mathfrak{g}'_0$ を $\mathfrak{o}^*(2n)$ で表し，**DIII** 型の実単純リー代数とよぶ．$\mathfrak{g}'_0$ のカルタン分解を $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{k}'_0 \oplus \mathfrak{p}'_0$ とするとき，θ-固有空間 $\mathfrak{k}'_0$, $\mathfrak{p}'_0$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}'_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & O \\ O & \overline{X_{11}} \end{pmatrix} \;\middle|\; X_{11} \in \mathfrak{u}(n) \right\}, \\ \mathfrak{p}'_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} O & X_{12} \\ -\overline{X_{12}} & O \end{pmatrix} \;\middle|\; {}^tX_{12} = -X_{12} \right\}, \end{aligned} \tag{8.34}$$

と書き表される．とくに極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}'_0$ はユニタリリー代数 $\mathfrak{u}(n)$ と自然に同型である．

命題 8.8. $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{o}^*(2n)$ は $\mathfrak{g}' = \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})'$ のエルミート型実型であり，極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}'_0 \cong \mathfrak{u}(n)$ は，$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})'$ の場合と同一の 1 次元中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}'_0)$ ((8.26) 参照) をもつ．

さて，定義より $\mathfrak{o}^*(2n)$ は $\mathfrak{su}(n,n)$ の部分リー代数であるから，埋め込み $\tilde{\iota} : \mathfrak{su}(n,n) \hookrightarrow \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})'$ をとおして，$\mathfrak{o}^*(2n)$ は $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})'$ の部分リー代数と同型になる．また，$\tilde{\iota}$ を複素線形に拡張して，$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})' \overset{\tilde{\iota}}{\hookrightarrow} \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ を得る．(8.28) と (8.31) より，$\tilde{\iota}(\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})')$ に属する行列 X は，$A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$, ${}^tB = -B$, ${}^tC = -C$ を用いて，

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc} A & O & O & \sqrt{-1}B \\ O & A & -\sqrt{-1}B & O \\ \hline O & \sqrt{-1}C & -{}^tA & O \\ -\sqrt{-1}C & O & O & -{}^tA \end{array} \right) \tag{8.35}$$

の形に表され，$X \in \tilde{\iota}(\mathfrak{o}^*(2n))$ となるのは，

$$A^* = -A \quad \text{かつ} \quad C = B^*$$

のときである．

以下，$\mathfrak{o}^*(2n)$, $\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})'$ を，それぞれ $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})'$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ の部分リー代数と同一視し，$\mathfrak{o}^*(2n)$, $\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})'$ をメンバーの一方とするデュアルペアを具体的に構成しよう．このことは第 11 章で大いに役立つことになろう．

$X_{\mathfrak{s},+}, H_{\mathfrak{s}}, X_{\mathfrak{s},-} \in \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ を，それぞれ，

$$X_{\mathfrak{s},+} := \left(\begin{array}{cc|cc} O & E_n & O & O \\ O & O & O & O \\ \hline O & O & O & O \\ O & O & -E_n & O \end{array}\right), \quad H_{\mathfrak{s}} := \left(\begin{array}{cc|cc} E_n & O & O & O \\ O & -E_n & O & O \\ \hline O & O & -E_n & O \\ O & O & O & E_n \end{array}\right),$$

$$X_{\mathfrak{s},-} := \left(\begin{array}{cc|cc} O & O & O & O \\ E_n & O & O & O \\ \hline O & O & O & -E_n \\ O & O & O & O \end{array}\right),$$

で定める．明らかに $(X_{\mathfrak{s},+}, H_{\mathfrak{s}}, X_{\mathfrak{s},-})$ は $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ における標準トリプルをなし，

$$\mathfrak{s} := \mathbb{C}X_{\mathfrak{s},+} \oplus \mathbb{C}H_{\mathfrak{s}} \oplus \mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-} \cong \mathfrak{sp}(1,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \tag{8.36}$$

は $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ の 3 次元部分リー代数となる．

埋め込み $\mathfrak{u}(p,q) \hookrightarrow \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})'$ に対する命題 8.7 と同様に，行列の可換性に関して具体的な計算を行うことで，次のことがわかる．

命題 8.9. (i) $\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})'$ の $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ における中心化リー代数は $\mathfrak{s} = \mathbb{C}X_{\mathfrak{s},+} \oplus \mathbb{C}H_{\mathfrak{s}} \oplus \mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-}$ と一致し，対 $(\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})', \mathfrak{s})$ は $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ においてデュアルペアをなす．

(ii) $\mathfrak{o}^*(2n)$ と $\mathfrak{s}_0 := \mathfrak{s} \cap \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})' \cong \mathfrak{sp}(1) = \mathfrak{su}(2)$ は，実リー代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})'$ においてデュアルペアをなす．

問題 8.4. 上の命題を証明せよ．

◆トピックス 4 (デュアルペア). ……………………………………………………

一般に，CI, AIII, DIII 型のエルミート実型に対応して，実シンプレクティックリー代数のなかに次の 3 種類のデュアルペアをとることができる：

$$\begin{aligned} &\mathfrak{sp}(nk,\mathbb{R})' \text{ における } (\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})', \mathfrak{o}(k)) \text{ と } (\mathfrak{u}(p,q), \mathfrak{u}(k)) \ (p+q=n), \\ &\mathfrak{sp}(2nk,\mathbb{R})' \text{ における } (\mathfrak{o}^*(2n), \mathfrak{sp}(k)), \text{ ただし } k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{8.37}$$

とくに $k=1$ としたものが，命題 8.7 と命題 8.9 で与えた例になっている ($\mathfrak{o}(1) = \{0\}$ ゆえ，CI の場合は自明なデュアルペアになる)．上記のデュアルペアでは，2 番目の構成要素 $\mathfrak{o}(k)$, $\mathfrak{u}(k)$, $\mathfrak{sp}(k)$ がコンパクトリー代数になっているが，これらを $\mathfrak{o}(k_1,k_2)$, $\mathfrak{u}(k_1,k_2)$, $\mathfrak{sp}(k_1,k_2)$ ($k = k_1+k_2$, $k_1, k_2 > 0$) と置き換えると，いずれの構成要素もコンパクトでないデュアルペアが得られる．

シンプレクティックリー代数 (あるいはシンプレクティック群) における簡約なデュアルペアは，半単純リー代数 (リー群) の無限次元表現の研究において大切な働きをしている．これはハウ (R. Howe [19], [20]) による独創的なアイデアに基づくものであり，デュアルペアは，とくに，サイズの小さな無限次元ユニタリ表現の構成や冪零軌道の量子化に威力を発揮する．ハウの理論は，いわば，シュア - ワイル理論 (9.1.2 節参照) の無限次元表現版にあたり，その鍵を握るのがヴェイユ表現である．ま

た，デュアルペアの構成メンバーのうち一方がコンパクトリー代数であるときには，ハウの理論は非常にきれいな形になる．この話題には，第 10, 11 章でより詳しく触れることにしたい．乞うご期待！

なお，デュアルペアは，波動方程式やマックスウェル方程式などをはじめ，物理学ともさまざまな形で深く関わり面白い ([18])．また，複素リー代数のレベルでの簡約なデュアルペアたちは，リューベンタレール (H. Rubenthaler [37]) により完全に分類されている．

BDI ($q=2$) 型: $\mathfrak{o}(p,2)$, $p \geq 3$

直交リー代数は DIII 型以外にもエルミート型実型をもつ．これを説明しよう．7.2.2 節で定義した符号 (p,q), $n=p+q$, に対応する実直交リー代数 $\mathfrak{o}(p,q)$ (注意 7.1 と (7.30) 参照) は，複素リー代数

$$\mathfrak{g}'' := \mathfrak{o}(\varepsilon(p),\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid {}^tXI(p) + I(p)X = 0\} \tag{8.38}$$

の実型 $(\mathfrak{g}'')_0$ となる．一方で，${}^t\boldsymbol{b}I(p)\boldsymbol{b} = E_n$ なるユニタリ行列

$$\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} E_p & O \\ O & \sqrt{-1}E_q \end{pmatrix}$$

が定める共役変換

$$\tilde{\boldsymbol{b}} : X \longmapsto \boldsymbol{b}X\boldsymbol{b}^{-1}$$

は，リー代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ から $\mathfrak{g}''$ の上への同型写像であり，$\tilde{\boldsymbol{b}}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ のカルタン対合 θ と可換になっている: $\theta \circ \tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{b}} \circ \theta$．そこで，DIII 型の場合と同様に，$\mathfrak{g}$ の代わりに，それと同型なリー代数 $\mathfrak{g}''$ とその θ-安定な実型を扱う．$n \geq 5$ のとき，複素単純リー代数 $\mathfrak{g}''$ の実型 $(\mathfrak{g}'')_0 = \mathfrak{o}(p,q)$ を**BDI 型**の実単純リー代数という．(7.30) から直ちにわかるように，$(\mathfrak{g}'')_0$ は θ-安定であり，カルタン分解 $(\mathfrak{g}'')_0 = (\mathfrak{k}'')_0 \oplus (\mathfrak{p}'')_0$ は，

$$\begin{aligned} (\mathfrak{k}'')_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & O \\ O & X_{22} \end{pmatrix} \middle| X_{11} \in \mathfrak{o}(p),\ X_{22} \in \mathfrak{o}(q) \right\}, \\ (\mathfrak{p}'')_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} O & X_{12} \\ {}^tX_{12} & O \end{pmatrix} \middle| X_{12} \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \right\}, \end{aligned} \tag{8.39}$$

により定まる．ここで，$(\mathfrak{k}'')_0$ は直和 $\mathfrak{o}(p) \oplus \mathfrak{o}(q)$ と自然に同型である．

いま，$p \geq 3$, $q=2$ とする．$p \neq 4$ ならば，リー代数 $\mathfrak{o}(p)$ は単純である (定理 7.11)．また，$p=4$ のとき，$\mathfrak{o}(4)$ の複素化 $\mathfrak{o}(4,\mathbb{C})$ は A_1 型単純リー代数の直和 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型である ((7.31) 参照)．よって，$\mathfrak{o}(p)$ $(p \geq 3)$ の中心は $\{0\}$ である．$\mathfrak{o}(2)$ が 1 次元の可換リー代数であることとあわせて，次の命題を得る．

命題 8.10. $p \geq 3$ のとき，実直交リー代数 $(\mathfrak{g}'')_0 = \mathfrak{o}(p,2)$ は，$\mathfrak{g}'' \cong \mathfrak{o}(p+2,\mathbb{C})$ のエルミート型実型であり，極大コンパクト部分リー代数 $(\mathfrak{k}'')_0 \cong \mathfrak{o}(p) \oplus \mathfrak{o}(2)$ は，1 次元の中心

$$\mathfrak{z}((\mathfrak{k}'')_0) = \mathbb{R}Z_0, \quad Z_0 := \begin{pmatrix} O & O \\ O & -J \end{pmatrix}, \tag{8.40}$$

をもつ．ただし，$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(2)$ は 2 次の交代行列である．

8.2.2 分類定理

前節 8.2.1 では，古典型複素単純リー代数は，エルミート型実型:

$$\mathfrak{su}(p,q),\ \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\ \mathfrak{o}^*(2n)\,(n \geq 3)\ \text{および}\ \mathfrak{o}(p,2)\,(p \geq 3), \tag{8.41}$$

をもつことを示した．逆に，カルタンによる実単純リー代数の分類結果から，次のことがわかる．

定理 8.11. 古典型複素単純リー代数のエルミート型実型は，上記 (8.41) のリー代数のいずれかに同型である．

また，例外型の複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ には，$\mathfrak{g}$ が E_6 型，E_7 型のときのみ，エルミート型実型 $\mathfrak{g}_0$ が (同型を除き) それぞれ 1 個ずつあることもわかっている (もっとも，例外型の $\mathfrak{g}$ に対してカルタン対合をどのように定義するかは問題であるが，ここでは触れない)．カルタンの分類記号によると，これらは，それぞれ **EIII** 型，**EVII** 型とよばれている．

結局，エルミート型の実単純リー代数は，

AIII, CI, DIII, BDI $(q = 2)$, EIII, EVII,

の 6 種類に分類されることになる．これについては [12, Ch. X, §6.3] を参照．

8.2.3 不変複素構造と三角型分解

$\mathfrak{g}_0$ を古典型複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の θ-安定なエルミート型実型とし，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解とする．8.2.1 節においてエルミート型実型を具体的に構成したときには，互いに同型なリー代数を別の方法で実現したものを厳密に区別し，$\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$, $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{k}'_0 \oplus \mathfrak{p}'_0$, $(\mathfrak{g}'')_0 = (\mathfrak{k}'')_0 \oplus (\mathfrak{p}'')_0$, といったの別の記号を用いて表したが，ここでは統一的に，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ と書くことにする．

さて，$[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0$ であるから，リー代数 $\mathfrak{k}_0$ は，実線形空間 $\mathfrak{p}_0$ に随伴表現により働く．$X \in \mathfrak{k}_0$ に対し，$\mathfrak{g}_0$ 上の線形変換 $\mathrm{ad}\,X$ の $\mathfrak{p}_0$ への制限を $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0}X$ で表す．このとき，

命題 8.12. 極大コンパクト部分リー代数 $\mathfrak{k}_0$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0)$ は 1 次元である．さらに，$Z_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0)$ が存在して，$j := \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0}Z_0$ は $\mathfrak{p}_0$ 上の $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0}\mathfrak{k}_0)$-不変な複素構造を定める．すなわち，

$$j^2 = -\mathrm{id}_{\mathfrak{p}_0}, \quad j \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0} X) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0} X) \circ j \ \ (X \in \mathfrak{k}_0),$$

がなりたつ．

証明. $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0)=1$ は，命題 8.3, 8.5, 8.8, 8.10 から直ちにわかる．これらの命題で具体的に与えた $Z_0\in\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_0)$ が，$\mathfrak{p}_0$ 上に複素構造を定めることを確かめるのも容易である．さらに，$\boldsymbol{j}=\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0}Z_0$ が $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0}X$ $(X\in\mathfrak{k}_0)$ と可換であることは，Z_0 が $\mathfrak{k}_0$ の中心元であることから明らかである． □

さて，$\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_0$ の $\mathfrak{g}$ における複素化 $\mathfrak{k},\mathfrak{p}$ を考え，$\boldsymbol{j}$ を $\mathfrak{p}$ 上の複素線形変換に自然に拡張する:

$$\boldsymbol{j}(X+\sqrt{-1}Y):=\boldsymbol{j}(X)+\sqrt{-1}\boldsymbol{j}(Y)\quad (X,Y\in\mathfrak{p}_0).$$

このとき，

$$\mathfrak{p}_\pm:=\{X\mp\sqrt{-1}\boldsymbol{j}(X)\mid X\in\mathfrak{p}_0\} \tag{8.42}$$

は，それぞれ，$\boldsymbol{j}$ の固有値 $\pm\sqrt{-1}$ に対応する固有空間に等しく，$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{p}_-$ は $\mathfrak{p}$ の $\boldsymbol{j}$-固有空間分解を与えることがわかる．これと複素カルタン分解 (8.8) をあわせて，$\mathfrak{g}$ の分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}_- \tag{8.43}$$

が得られる．これを，エルミート型実型 $\mathfrak{g}_0$ に付随した $\mathfrak{g}$ の**三角型分解**という．この分解の名前の意味は，例 8.3 に与える $\mathfrak{p}_+,\mathfrak{k},\mathfrak{p}_-$ の行列表示をみれば自然に理解できよう．

命題 8.13. (i) 分解 (8.43) に現れる $\mathfrak{p}_+,\mathfrak{k},\mathfrak{p}_-$ は，次の交換関係を満たす：

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{p}_\pm]\subset\mathfrak{p}_\pm,\quad [\mathfrak{p}_\pm,\mathfrak{p}_\pm]=\{0\}\quad (\text{複号同順}),$$
$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\quad [\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-]\subset\mathfrak{k}.$$

(ii) σ を実型 $\mathfrak{g}_0$ に関する $\mathfrak{g}$ 上の複素共役作用素とする：$\sigma(X+\sqrt{-1}Y):=X-\sqrt{-1}Y$ $(X,Y\in\mathfrak{g}_0)$．このとき，

$$\sigma(\mathfrak{k})=\mathfrak{k},\quad \sigma(\mathfrak{p}_+)=\mathfrak{p}_-,\quad \sigma(\mathfrak{p}_-)=\mathfrak{p}_+,$$

がなりたつ．

証明. (i) Z_0 が定める $\mathfrak{g}$ 上の微分 $\tilde{\jmath}:=\mathrm{ad}\,Z_0\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を考える (例 7.6 参照)．$\tilde{\jmath}$ の $\mathfrak{p}$ への制限は $\boldsymbol{j}$ に他ならない．Z_0 が $\mathfrak{k}$ の中心に属することに注意すれば，三角型分解 (8.43) は $\tilde{\jmath}$ による $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を与えていることがわかる．つまり，$\mathfrak{p}_-,\mathfrak{k},\mathfrak{p}_+$ は，それぞれ，$\tilde{\jmath}$ の固有値 $-\sqrt{-1},0,\sqrt{-1}$ に対応する固有空間である．

いま，$X,Y\in\mathfrak{g}$ が $\tilde{\jmath}$ の固有ベクトルであるとき，$\tilde{\jmath}(X)=\lambda X$, $\tilde{\jmath}(Y)=\mu Y$ とすれば，$\tilde{\jmath}$ が $\mathfrak{g}$ 上の微分であることから，

$$\tilde{\jmath}([X,Y])=(\lambda+\mu)[X,Y]$$

が従う．つまり，$[X,Y]$ は，(それが零ベクトルでなければ) 固有値 $\lambda+\mu$ に対応する固有ベクトルとなる．

示すべき交換関係は，以上の議論から直ちに従う．

(ii) $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0+\sqrt{-1}\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}_0\subset\mathfrak{g}_0$, より $\sigma(\mathfrak{k})=\mathfrak{k}$ がわかる．一方，$\sigma(\mathfrak{p}_\pm)=\mathfrak{p}_\mp$ (複号同順) は，(8.42) と σ の定義から明らか． □

問題 8.5. $[\mathfrak{k},\mathfrak{q}]\subset\mathfrak{q}$ なる $\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{q}$ は，$\mathfrak{q}=\{0\},\mathfrak{p}_\pm,\mathfrak{p}$ のみであることを示せ．

例 8.3. (i) $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{su}(p,q)$ $(n=p+q,\ 0<p<n)$ の場合，

$$M_{p,q}(\mathbb{C})\ni X_{12}\longmapsto X_o=\begin{pmatrix} O & X_{12}\\ X_{12}^* & O\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_0$$

は，$M_{p,q}(\mathbb{C})$ から複素線形空間 $(\mathfrak{p}_0,\boldsymbol{j})$ への線形同型写像を与える．また，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する三角型分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}_-$ は，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_+&=\left\{\begin{pmatrix} O & X_{12}\\ O & O\end{pmatrix}\ \middle|\ X_{12}\in M_{p,q}(\mathbb{C})\right\},\\
\mathfrak{k}&=\left\{\begin{pmatrix} X_{11} & O\\ O & X_{22}\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}\ \middle|\ X_{11}\in M_p(\mathbb{C}),\ X_{22}\in M_q(\mathbb{C})\right\},\\
\mathfrak{p}_-&=\left\{\begin{pmatrix} O & O\\ X_{21} & O\end{pmatrix}\ \middle|\ X_{21}\in M_{q,p}(\mathbb{C})\right\},
\end{aligned}\tag{8.44}$$

により与えられる．

(ii) 次に $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})'$ の場合を考える．n 次複素対称行列全体のなす線形空間を $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ で表すとき，

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\ni W\longmapsto\begin{pmatrix} O & W\\ \overline{W} & O\end{pmatrix}\in(\mathfrak{p}_0,\boldsymbol{j})$$

は，複素線形空間の同型である．対応して，$\mathfrak{g}$ の三角型分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}_-$ は，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_+&=\left\{\begin{pmatrix} O & W\\ O & O\end{pmatrix}\ \middle|\ W\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\right\},\\
\mathfrak{k}&=\left\{\begin{pmatrix} Z & O\\ O & -{}^tZ\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}\ \middle|\ Z\in M_n(\mathbb{C})\right\},\\
\mathfrak{p}_-&=\left\{\begin{pmatrix} O & O\\ U & O\end{pmatrix}\ \middle|\ U\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\right\},
\end{aligned}\tag{8.45}$$

により与えられる．

問題 8.6. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}^*(2n)$, $\mathfrak{o}(p,2)$ $(p \geq 3)$ の場合に，複素リー代数 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$ の三角型分解を行列を用いて具体的に書き下せ．

注意 8.3. 対称対 $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$ に付随したリーマン対称空間を G/K とする．すなわち，G は $\mathfrak{g}_0$ をリー代数にもつ連結リー群であり，K は $\mathfrak{k}_0$ に対応する G の連結部分リー群 (極大コンパクト部分群) である．このとき，$\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ をとおして，$\mathfrak{p}_0$ を多様体 G/K の原点 eK における接空間と同一視することができる．そして，接空間 $\mathfrak{p}_0$ 上の $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_0}\mathfrak{k}_0)$-不変な複素構造 $\boldsymbol{j}$ は，対称空間 G/K に G-不変な複素構造を誘導する．このように G-不変複素構造を備えた対称空間 G/K を**エルミート対称空間**という．

最も簡単な例は，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(1,1)$, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1))$ に対応するリー群

$$\begin{aligned} G = SU(1,1) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}, \\ K = S(U(1) \times U(1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1 \right\}, \end{aligned} \tag{8.46}$$

が与える対称空間 G/K である．群 G は複素数平面内の単位開円板 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に 1 次分数変換によって推移的に作用し，原点 $0 \in D$ の G における固定部分群が K に他ならない (6.4 節)．したがって，エルミート対称空間 G/K は円板 D と (G が作用する等質空間として) 同型である．群 G の元

$$a_t := \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad n_y := \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{-1}\,y & -\sqrt{-1}\,y \\ \sqrt{-1}\,y & 1 - \sqrt{-1}\,y \end{pmatrix} \quad (t, y \in \mathbb{R}) \tag{8.47}$$

がつくる G の**岩澤部分群** $S := \{n_y a_t \mid t, y \in \mathbb{R}\}$ は D に単純かつ推移的に作用する (図 8.1)．

有界対称領域やエルミート対称空間の構造を詳しく扱った文献には，例えば，[12, Chap. VIII], [25, Chap. VII], [41] などがある．

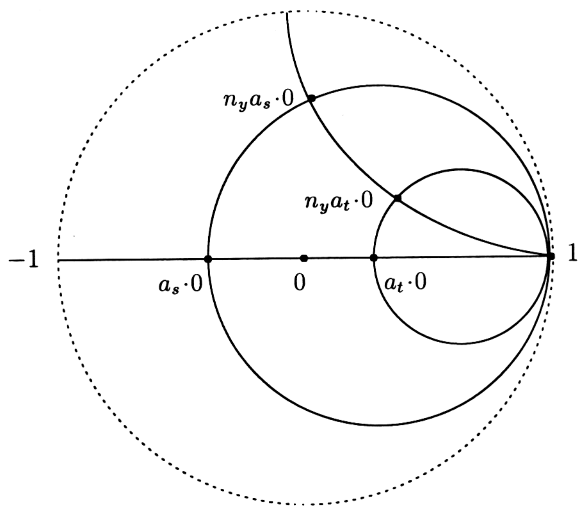


図 8.1. 岩澤部分群 S の作用 $(t > 0,\ s, y < 0)$

第9章
リー代数の表現論 — 事始め

以下では，つねに体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すものとし，$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数とする．第I部では 3 次元単純リー代数 $\mathfrak{o}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現を具体的に扱ったが，この章では，リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現についての入門的な解説をより系統的に行う．表現という代数系にかかわる基本概念を導入し，既約表現を扱うために重要なシュアの補題 (リー代数版) を証明する．そして，この補題が表現論にどのように役に立つかを具体的に論じる．さらには，実リー代数の表現のユニタリ化可能性について議論する．

本章では，単なる一般論にとどまらず，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ や $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の興味深い無限次元表現を例を手元に用意して，表現の取り扱いに慣れ親しみたい．とくに，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の実型 $\mathfrak{su}(1,1)$ に付随した既約 (ユニタリ) ハリシュ-チャンドラ加群を分類・構成してみせる．なお，この加群は，コンパクトでない特殊ユニタリ群 $SU(1,1)$ の連続な既約 (ユニタリ) 表現と対応している (注意 9.4 参照).

9.1 リー代数の表現

9.1.1 表現という概念

リー代数の表現とは何か，まず，その定義から始めよう．

定義 9.1. $\boldsymbol{V}$ を $\{0\}$ でない複素線形空間とする．$\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{V}$ 上への**表現** π とは，$\mathbb{K}$ 上のリー代数としての準同型写像 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ のことである．すなわち，$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\boldsymbol{V}$ 上の 1 次変換 $\pi(X)$ が定まっていて，

$$\pi(aX + bY) = a\pi(X) + b\pi(Y),$$
$$\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \quad (a, b \in \mathbb{K},\ X, Y \in \mathfrak{g}),$$

を満たす．このとき，$\mathfrak{g}$ の作用 $\mathfrak{g} \times \boldsymbol{V} \ni (X, v) \longmapsto \pi(X)v \in \boldsymbol{V}$ を備えた線形空間 $\boldsymbol{V}$ のことを **$\mathfrak{g}$-加群**ともよぶ．

注意 9.1. $\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ と $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{V}$ は，同一の概念を別の視点から述べた用語である．すなわち，作用する主体 $\mathfrak{g}$ とその作用に力点をおいたものが「$\mathfrak{g}$ の表現」であり，作用される線形空間 $\boldsymbol{V}$ の立場にたつと「$\mathfrak{g}$-加群」という言葉遣いになる (第I部「閑話休題 7」参照)．なお，第I部では，作用する主体が群である場合の表現についていろいろと論じている．

注意 9.2. 第 II 部では，リー代数が作用する表現空間を，太文字を用いて $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ などと表記する．これは，ひとつには，本書の中心テーマである表現・加群をことさら意識して扱うためである．さらに，リー代数 $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{sp}(V)$, $\mathfrak{n}(V)$ などを定める特別の線形空間 V と，これらのリー代数の表現一般を区別し，混同を避けるためでもある．

実リー代数に対しては $\mathbb{R}$ 上の線形空間への実表現も考えられるが，以降，表現といえばつねに $\mathbb{C}$ 上の線形空間に働くものとする．

線形空間 $\boldsymbol{V}$ が n 次元のときには，リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現とは，$\mathfrak{g}$ における 1 次結合や括弧積が，行列の 1 次結合や交換子積に対応するように，$\mathfrak{g}$ の各要素を n 次の複素行列で実現することに他ならない．つまり，表現は数の並びである行列に息吹(いぶき)を与え，活躍の場を提供することになる．

天下り式だが，$\mathfrak{g}$ の表現という代数系の構造を調べるために基本となる概念をいくつか導入しよう．以下の一連の定義では，$(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{g}$ の表現とする．

定義 9.2. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\pi(X)\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{W}$ となる $\boldsymbol{V}$ の部分空間 $\boldsymbol{W}$ を，$\boldsymbol{V}$ の **$\mathfrak{g}$-不変部分空間** (あるいは **$\mathfrak{g}$-部分加群**) という．このとき，表現作用素 $\pi(X)$ の $\boldsymbol{W}$ 上への制限 $\pi_W(X) := \pi(X)|\boldsymbol{W}$ は，$\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{W}$ 上への表現 π_W を引き起こす．π_W を π の **部分表現** という．

定義 9.3. $\boldsymbol{W}$ が $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群であるとき，$\boldsymbol{V}$ の $\boldsymbol{W}$ による商線形空間

$$\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W} = \{v + \boldsymbol{W} \mid v \in \boldsymbol{V}\}$$

は，π から自然に誘導される $\mathfrak{g}$ の作用

$$\pi_{V/W}(X)(v + \boldsymbol{W}) := \pi(X)v + \boldsymbol{W} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

により $\mathfrak{g}$-加群となる．このようにして得られる $\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi_{V/W}, \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W})$ を π の π_W による (または $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ 上の) **商表現** という．

定義 9.4. $\boldsymbol{W}_i$ $(i \in I)$ を $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群の族とするとき，和空間

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{W}_i = \left\{ \sum_{i \in I} w_i \;\middle|\; w_i \in \boldsymbol{W}_i,\ \text{有限個の } i \text{ を除き } w_i = 0 \right\}$$

も $\mathfrak{g}$-部分加群になる．とくに，線形空間の和 $\sum_{i \in I} \boldsymbol{W}_i$ が直和であるとき，

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{W}_i = \bigoplus_{i \in I} \boldsymbol{W}_i$$

を $\mathfrak{g}$-部分加群 $\boldsymbol{W}_i$ の **直和** とよび，対応する表現を $\bigoplus_{i \in I} \pi_{W_i}$ で表す．

定義 9.5. $\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ が **既約** であるとは，$\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-不変部分空間 $\boldsymbol{W}$ が，$\boldsymbol{W} = \{0\}$ と $\boldsymbol{V}$ に限るときをいう．

喩(たと)えるとすれば，既約な表現とは，もうこれ以上小さく分解できない表現，つまり物質を構成する原子のような存在であるといえよう．原子がどれだけ存在するのかを知ること (原子表を作ること) や，物質を構成する原子を特定することが重要であるように，表現論においては，既約な表現を分類すること，および，与えられた表現を既約表現に分解することが，基本的な問題となる．

注意 9.3. $\mathfrak{g}_0$ を実リー代数とし，$\mathfrak{g} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ の複素化とする．$\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ に対して，実リー代数の準同型写像 $\pi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ を，

$$\lambda \otimes X \longmapsto \lambda\pi(X) \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ X \in \mathfrak{g}_0)$$

によって，$\mathfrak{g}$ からの複素線形写像に拡張し，これを $\pi_{\mathbb{C}}$ で表す．このとき，$\pi_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{V}$ 上への表現を与え，これを π の複素化という．$\boldsymbol{V}$ の部分線形空間 $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{W}$ が $\mathfrak{g}_0$-不変であることと，$\mathfrak{g}$-不変であることとは同値になる．したがって，表現 π が既約であるためには，複素化 $\pi_{\mathbb{C}}$ が既約であることが必要十分条件になる．(このことは命題 3.11 の証明でも使われている.)

ここで，ふたつの表現の間の関係を調べる際に鍵となる言葉を用意しておく．

定義 9.6. リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi_1, \boldsymbol{V}_1)$ と $(\pi_2, \boldsymbol{V}_2)$ があるとせよ．

(i) $A\pi_1(X) = \pi_2(X)A$ $(X \in \mathfrak{g})$ を満たす線形写像 $A : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ を，π_1 から π_2 への**相関作用素** (intertwining operator)，あるいは **$\mathfrak{g}$-準同型写像**という．とくに，全単射な相関作用素を **$\mathfrak{g}$-同型写像**とよぶ．

(ii) $\boldsymbol{V}_1$ と $\boldsymbol{V}_2$ の間に $\mathfrak{g}$-同型写像が存在するとき，$\mathfrak{g}$ の表現 π_1 と π_2 は**同値**であるといって，$\pi_1 \cong \pi_2$ と書く．このとき，$\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{V}_1$ と $\boldsymbol{V}_2$ は**同型**である： $\boldsymbol{V}_1 \cong \boldsymbol{V}_2$，ともいう．

9.1.2　自然表現とそのテンソル積：シュア - ワイル理論

1 次変換 (行列) のなすリー代数は，その出立(いでた)ちから，自然な表現を伴っている．

例 9.1. (有限次元) 複素線形空間 $\boldsymbol{V}$ 上の一般線形リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ は，自然に $\boldsymbol{V}$ に働く．つまり，$\pi(X) := X$ $(X \in \mathfrak{g})$ により，$\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{V}$ 上の表現 (**自然表現**) が定まる．

この表現は既約である．実際，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の $\{0\}$ でない $\mathfrak{g}$-部分加群とし，ベクトル $w \in \boldsymbol{W}$, $w \neq 0$, をとる．このとき，任意の $v \in \boldsymbol{V}$ に対して，$Xw = v$ なる $X \in \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ が存在する (これは，(i) w を含む V の基底が存在すること，(ii) 基底の移り先を任意に指定して $\boldsymbol{V}$ 上の 1 次変換を定めることができること，の二点からわかる)．ゆえに $v = Xw \in \boldsymbol{W}$ となり，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}$ が従う．

同様に，他の古典リー代数 $\mathfrak{sl}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{sp}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{o}(\boldsymbol{V})$ も $\boldsymbol{V}$ 上に自然な表現をもつ．これは，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の自然表現を部分リー代数 $\mathfrak{sl}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{sp}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{o}(\boldsymbol{V})$ に制限したものに他ならない．

問題 9.1. $\mathfrak{sl}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{sp}(\boldsymbol{V})$ の $\boldsymbol{V}$ 上への自然表現は既約であることを証明せよ．

例 9.2. n 次元線形空間 $\boldsymbol{V}$ の旗 $\mathcal{F}$: $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \boldsymbol{V}$ を不変にする $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の可解部分リー代数 $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ (例 7.11) の $\boldsymbol{V}$ 上への自然な表現を考える．このとき，$\boldsymbol{V}$ の旗 $\mathcal{F}$ を構成する部分空間 $V_0, V_1, \ldots, V_n$ は，$\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$-部分加群をなす．

問題 9.2. $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$-部分加群は，旗 $\mathcal{F}$ を定める $\boldsymbol{V}$ の部分空間に限ることを証明せよ．

自然表現は，一見，ごく当たり前のものであるが，リー代数の表現の構成・分類に非常に役に立つ．例えば，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の有限次元既約表現の分類・構成を与える**シュア-ワイル理論**がそうである．ここでは，この理論の概略を (証明なしに) 紹介しよう．リー代数 $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の自然表現 $\boldsymbol{V}$ の m 階テンソル積空間 $\bigotimes^m \boldsymbol{V}$ には，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ が**テンソル積表現**

$$X \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_m) := \sum_{i=1}^{m} (v_1 \otimes \cdots \otimes X v_i \otimes \cdots \otimes v_m) \tag{9.1}$$

$$(X \in \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V}),\ v_i \in \boldsymbol{V})$$

により作用する．他方，m 次対称群 $\mathfrak{S}_m$ は，$\bigotimes^m \boldsymbol{V}$ に，テンソル積の順番の入れ替え

$$\tau \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(m)} \quad (\tau \in \mathfrak{S}_m)$$

により働くが，これらの 2 種類の表現は，互いに可換になっている．つまり，各 $\tau \in \mathfrak{S}_m$ の作用が $\mathfrak{g}$ の $\bigotimes^m \boldsymbol{V}$ 上の表現の相関作用素を与える．よって，(ρ, U_ρ) を群 $\mathfrak{S}_m$ の既約表現とすれば，U_ρ から $\bigotimes^m \boldsymbol{V}$ への $\mathfrak{S}_m$-相関作用素の空間

$$Y_\rho := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_m}(U_\rho, \textstyle\bigotimes^m \boldsymbol{V})$$

には，依然 $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ が自然に働いている．この表現を (θ_ρ, Y_ρ) と書こう．

このとき，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ と $\mathfrak{S}_m$ の表現空間 $\bigotimes^m \boldsymbol{V}$ は，

$$\textstyle\bigotimes^m \boldsymbol{V} \cong \displaystyle\bigoplus_{\rho} (Y_\rho \otimes U_\rho)$$

と直和分解し，対応 $\rho \mapsto \theta_\rho$ は，$\mathfrak{S}_m$ の既約表現の同値類全体の集合 $\hat{\mathfrak{S}}_m$ から，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の既約表現の同型類のある部分集合 $\Sigma(m)$ への 1 対 1 対応を与える:

$$\hat{\mathfrak{S}}_m \ni \rho \longleftrightarrow \theta_\rho \in \Sigma(m).$$

しかも，テンソルの階数 $m = 1, 2, \ldots$ を変化させることによって，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の有限次元既約表現を (中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})) \cong \mathbb{C}$ の 1 次元指標を法として) すべて構成・分類できることが知られている．また，上の対応は，対称群の既約表現をパラメトライズするヤング図形と $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の既約表現の最高ウェイトを結びつける役割をする．

要するに，自然表現のテンソル積を分解することで，$\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の有限次元既約表現は，(本質的に) すべて得られるのである．シュア-ワイル理論については，和書では [23] や [40, 第 V 章 研究課題] に解説がある．

9.2 無限次元表現に親しむ

表現論の面白さを体感するために，こんどは無限次元表現の例に親しんでみたい．

9.2.1 例 I：ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の場合

(V, B) を $\mathbb{K}$ 上のシンプレクティック線形空間とし，$p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ を V のシンプレクティック基底とする．零でない複素数 λ に対して，

$$a_1 b_1 = \cdots = a_n b_n = \lambda$$

なる $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, n)$ をとる．交換関係式 (7.38) より，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の $\boldsymbol{V} := \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 上への表現 π を，

$$\pi(p_i) = a_i \partial_i, \quad \pi(q_i) = b_i z_i, \quad \pi(\boldsymbol{e}) = \lambda \mathbf{1}, \tag{9.2}$$

により定めることができる．また，問題 7.17 に注意すれば，

$$\varpi(p_i) = a_i \left(\frac{\partial_i + z_i}{\sqrt{2}} \right), \quad \varpi(q_i) = b_i \left(\frac{-\partial_i + z_i}{\sqrt{2}} \right), \quad \varpi(\boldsymbol{e}) = \lambda \mathbf{1}, \tag{9.3}$$

も $\mathfrak{n}(V)$ の $\boldsymbol{V}$ 上への表現 ϖ を定めることがわかる．(なお，ϖ は π (パイ) の変形であり，ω (オメガ) とは異なる.)

命題 9.1. ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 上への表現 π および ϖ はともに既約である．しかし，表現 π と ϖ は同値ではない．

証明. まず，表現 π を考える．$\boldsymbol{W} \neq \{0\}$ を $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ の $\pi(\mathfrak{n}(V))$-不変な部分空間とする．$f \in \boldsymbol{W}$, $f \neq 0$, をとる．このとき，微分 $\pi(p_i)$ たちを何回か施すことで，定数関数 $c\mathbf{1} \in \boldsymbol{W}$, $c \neq 0$, を得る．これに，掛け算作用素 $\pi(q_i)$ たちを施すことで，$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ の単項式が (定数倍を除き) すべて得られる．したがって，$\boldsymbol{W} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ がわかる．よって，表現 π は既約である．

一方，表現 ϖ が既約であることは，等式

$$\varpi \left(\frac{a_i^{-1} p_i + b_i^{-1} q_i}{\sqrt{2}} \right) = z_i, \quad \varpi \left(\frac{a_i^{-1} p_i - b_i^{-1} q_i}{\sqrt{2}} \right) = \partial_i$$

に注意すれば，π の既約性を使ってわかる．

次に，π と ϖ が同値でないことを背理法により示そう．$\partial_i f = -z_i f$ なる多項式 f は $f = 0$ のみであることに注意しよう (両辺の多項式の次数を比べよ)．これから，$\varpi(p_i)$ は $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 上の単射線形写像であることがわかる．もし $\pi \cong \varpi$ ならば，$\pi(p_i) = a_i \partial_i$ も $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 上単射でなければならない．これは，$\pi(p_i)\mathbf{1} = 0$ に反する． □

9.2.2 例 II：$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(1,1)$ のハリシュ-チャンドラ加群の分類

次に，複素単純リー代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現を扱う．(X_+, H, X_-) を $\mathfrak{g}$ の標準トリプル ((7.25) 参照) とする．リー代数 $\mathfrak{g}$ は実型 $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{su}(1,1)$ をもつが，例 8.3 で調べたように，$\mathfrak{g}_0$ の複素カルタン分解は，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k} = \mathbb{C}H,\ \mathfrak{p} = \mathbb{C}X_+ + \mathbb{C}X_-,$$

となる．いま，$\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ が (この分解に対して) **許容的**であるとは，表現作用素 $\pi(H)$ が $\boldsymbol{V}$ 上対角化可能で，その固有値がすべて整数であるときをいう．$\pi(H)$ の固有値を表現 π の**ウェイト** (あるいは**重み**)，固有ベクトルのことを π の**ウェイトベクトル** (あるいは**重みベクトル**) とよぶ．許容的な $\mathfrak{g}$ の既約表現のことを，実型 $\mathfrak{g}_0$ に付随した**既約ハリシュ-チャンドラ (Harish-Chandra) 加群**という．本来ならば，群 $SU(1,1)$ に付随した既約ハリシュ-チャンドラ加群と書くべきなのであるが (下の注意を参照)，本書の範囲では誤解の恐れがないため，上のようによぶことにする．

注意 9.4. $\mathfrak{g}_0$ は特殊ユニタリ群 $G = SU(1,1)$ のリー代数であるが (注意 8.3)，$\mathfrak{g}_0$ に付随した既約ハリシュ-チャンドラ加群は，群 G の既約表現と対応している．その証明は難しくはないが，関数解析学などの知識を必要とし本書のレベルを超えているので割愛する．ここでは対応の様子をおおまかに紹介しておこう．

いま，τ を G のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上への連続な既約表現であって，次の条件 (a) と (b) を満たすものとする：

(a) G の極大コンパクト部分群 $K = S(U(1) \times U(1))$ の作用がユニタリである．
(b) K の既約表現の τ における重複度は高々有限である．

このような τ を (K-) **許容的**(admissible) という．群 G の既約ユニタリ表現は許容的である．

さて，許容的な G の既約表現 τ に対して，1 次元の可換なコンパクト部分群 K の作用に関する同時固有ベクトルたちが (代数的に) 生成する $\mathcal{H}$ の部分空間を $\mathcal{H}_K$ とすれば，G の表現 τ を微分して複素化することによって，$\mathcal{H}_K$ は $\mathfrak{g}_0$ に付随した既約ハリシュ-チャンドラ加群となることがわかる．逆に，任意の既約ハリシュ-チャンドラ加群はこのようにして得られる．しかも，対応 $\tau \leftrightarrow \mathcal{H}_K$ は，既約ユニタリ表現 については，表現のユニタリ同値を除いて 1 対 1 であることが知られている．このように，群 G の連続な既約許容表現とリー代数 $\mathfrak{g}$ の既約ハリシュ-チャンドラ加群は，(ユニタリでない表現の完備化に関わる位相的性質を除き) 等価であるといってよい．なお，実リー代数のユニタリ表現については，9.5 節で詳しく扱う．

以上のことは，より一般に，半単純リー群の既約許容表現に対して定式化されている ([10])．

ここでは，標準的な許容的 $\mathfrak{g}$-加群の族を与えて，それらを分解することにより，既約ハリシュ-チャンドラ加群を多数構成する．すなわち，整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}$ で表し，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を基底とする無限次元複素線形空間 $\boldsymbol{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e_n$ 上の 1 次変換 $\pi_\lambda(X_+)$,

$\pi_\lambda(H)$, $\pi_\lambda(X_-)$ を,

$$\begin{cases} \pi_\lambda(X_+)e_n = (\lambda + n)e_{n+1}, \\ \pi_\lambda(H)e_n = 2ne_n, \\ \pi_\lambda(X_-)e_n = (\lambda - n)e_{n-1}, \end{cases} \tag{9.4}$$

により定める．このとき，$(\pi_\lambda(X_+), \pi_\lambda(H), \pi_\lambda(X_-))$ は $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ において標準トリプルをなす．実際，

$$\begin{aligned} &[\pi_\lambda(X_+),\ \pi_\lambda(X_-)]\, e_n \\ &\qquad = \{\pi_\lambda(X_+)\pi_\lambda(X_-) - \pi_\lambda(X_-)\pi_\lambda(X_+)\}\, e_n \\ &\qquad = \{(\lambda + (n-1))(\lambda - n) - (\lambda - (n+1))(\lambda + n)\}e_n \\ &\qquad = 2ne_n = \pi_\lambda(H)e_n \end{aligned}$$

から，$[\pi_\lambda(X_+), \pi_\lambda(X_-)] = \pi_\lambda(H)$ を得る．残りのふたつの交換関係を確かめるのはよりやさしい．したがって，π_λ は $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{V}$ 上への表現を与えることがわかる．また，π_λ が許容的であるのは定義から明らかである．

作用素 $\pi_\lambda(X_\pm)$ は，ウェイトベクトルのウェイトを，それぞれ ± 2 だけ増減する働きをする**昇演算子・降演算子**である．以下，$\mathfrak{g}$ の表現 π_λ を備えた線形空間 $\boldsymbol{V}$ を，表現のパラメータを明示して $\boldsymbol{V}_\lambda$ と書くことにする．

この表現 π_λ は，ユニタリ群 G の**球**(きゅう)**主系列表現** (spherical principal series representation) を微分して得られる．ここに，表現 π_λ が球的 (spherical) であることは，零ウェイトベクトル $e_0 \in \boldsymbol{V}_\lambda : \pi_\lambda(H)e_0 = 0$, が存在することに対応している．ほとんどの $\lambda \in \mathbb{C}$ について，球主系列表現 π_λ は既約ハリシュ-チャンドラ加群を与える．正確には，次の定理がなりたつ．

定理 9.2. (i)　$\lambda \notin \mathbb{Z}$ のとき，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現 $(\pi_\lambda, \boldsymbol{V}_\lambda)$ は既約である．

(ii)　$\lambda, \mu \notin \mathbb{Z}$, $\lambda \neq \mu$, なる複素数 λ, μ について，表現 π_λ と π_μ が同値になるためには，$\lambda = 1 - \mu$ であることが必要十分条件である．

証明. (i)　$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}_\lambda$ の零でない $\mathfrak{g}$-部分加群とする．$\boldsymbol{W}$ は，$\boldsymbol{V}_\lambda$ 上対角化可能な 1 次変換 $\pi_\lambda(H)$ によって不変であるから，$\boldsymbol{W}$ はウェイトベクトルたちから生成される (問題 7.11)．とくに，ある番号 n_0 があって，$e_{n_0} \in \boldsymbol{W}$ となる．ところが，$\lambda \notin \mathbb{Z}$ であるから，e_{n_0} に $\pi_\lambda(X_\pm)$ を次々と施していけば，(零でない定数倍を除き) すべての e_n が得られる．これより，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $e_n \in \boldsymbol{W}$，すなわち，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_\lambda$ が従う．

(ii)　π_λ から π_μ への $\mathfrak{g}$-同型 A が存在するための条件を調べよう．いま，A を $\boldsymbol{V}$ 上の線形同型写像とする．$\pi_\lambda(H) = \pi_\mu(H)$ はウェイト $2n$ $(n \in \mathbb{Z})$ のウェイトベクトル e_n を重複度 1 でもつ対角型の 1 次変換であるから，$A\pi_\lambda(H) = \pi_\mu(H)A$ がなりたつためには，各 e_n が

A の固有ベクトルであることが必要十分条件となる．すなわち，零でない複素数 a_n が存在して，

$$Ae_n = a_n e_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となることである．このような A が

$$\pi_\mu(X_\pm)A = A\pi_\lambda(X_\pm)$$

を満たすための (a_n) に対する条件は，(9.4) から，

$$(\lambda + n)a_{n+1} = (\mu + n)a_n, \quad (\mu - 1 - n)a_{n+1} = (\lambda - 1 - n)a_n, \tag{9.5}$$

と書き表される．$a_n \neq 0$, $\lambda, \mu \notin \mathbb{Z}$ であることに注意して，比 a_{n+1}/a_n を考えると，上の 2 条件を満たす a_n が存在するためには，λ, μ が，すべての整数 n に対して，等式

$$(\lambda + n)(\lambda - 1 - n) = (\mu + n)(\mu - n - 1) \tag{9.6}$$

を満たすことが必要十分条件となる．$\lambda \neq \mu$ であって，等式 (9.6) がなりたつのは，$\mu = 1 - \lambda$ のときである．このとき，a_n は

$$a_n = a_{-n} = a_0 \prod_{k=1}^{|n|} \frac{(k - 1/2) - (\lambda - 1/2)}{(k - 1/2) + (\lambda - 1/2)} \tag{9.7}$$

で与えられ，したがって，$\mathfrak{g}$-同型 $A : \boldsymbol{V}_\lambda \to \boldsymbol{V}_{1-\lambda}$ は定数倍を除き一意に定まる． □

問題 9.3. $\boldsymbol{V}_\lambda$ 上の 1 次変換

$$C_{\pi_\lambda} := \pi_\lambda(X_+)\pi_\lambda(X_-) + \pi_\lambda(X_-)\pi_\lambda(X_+) + \frac{1}{2}\pi_\lambda(H)^2$$

は，$2(\lambda^2 - \lambda)$ 倍のスカラー変換であることを示せ．これから，$\pi_\lambda \cong \pi_\mu$ ならば，$\lambda = \mu$ または $\mu = 1 - \lambda$ であることを導け．(C_{π_λ} がスカラー変換になるのにはわけがある．定理 9.11 を参照せよ.)

では，λ が整数の場合には，球主系列表現 π_λ はどのような構造をしているだろうか？ これを調べるため，正の整数 ℓ に対して，$\boldsymbol{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e_n$ の部分空間 $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$, $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{\pm}$ を，

$$\boldsymbol{F}_{2\ell-1} := \bigoplus_{-\ell<n<\ell} \mathbb{C}e_n, \quad \boldsymbol{D}_{2\ell}^{\pm} := \bigoplus_{n\geq\ell} \mathbb{C}e_{\pm n}\ (\text{複号同順}), \tag{9.8}$$

により定める．線形空間 $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ は $(2\ell - 1)$ 次元である．一方，$\boldsymbol{D}_{2\ell}^{\pm}$ はウェイト $\pm 2n$ ($n = \ell, \ell+1, \dots$) のウェイトベクトルを基底にもつ無限次元線形空間である．

(i) $\lambda = \ell > 0$ の場合: $\pi_\ell(X_-)e_\ell = 0$, $\pi_\ell(X_+)e_{-\ell} = 0$ であるから，$\boldsymbol{D}_{2\ell}^{\pm}$ は，それぞれ，$\boldsymbol{V}_\ell$ の無限次元 $\mathfrak{g}$-部分加群であることがわかる．これらが既約であることも，定理 9.2 (i) の証明と同様な手法で確かめることができる．明らかに，$\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+}$ と $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$ の和は直和である：$\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} + \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-} = \boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$.

(ii) $\lambda = 1 - \ell \leq 0$ の場合: 今度は，$\pi_{1-\ell}(X_+)e_{\ell-1} = 0$, $\pi_{1-\ell}(X_-)e_{1-\ell} = 0$ となり，$\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ が $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ の $(2\ell - 1)$ 次元 $\mathfrak{g}$-部分加群になる．これもまた既約である．

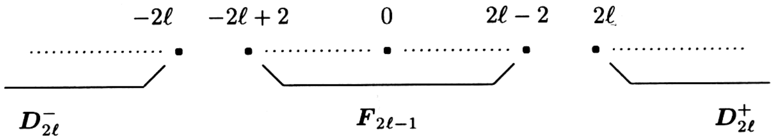


図 9.1. 部分空間 $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$, $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$, $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+}$ とそのウェイト

問題 9.4. 上の $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+}$, $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$, $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ が既約ハリシュ-チャンドラ加群であることを確かめよ.

上の考察から，π_λ $(\lambda \in \mathbb{Z})$ の既約分解 (あるいは組成因子への分解) は次のようになる.

定理 9.3. ℓ を正の整数とする.

(i) $\boldsymbol{V}_\ell$ は $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$ を $\mathfrak{g}$-部分加群として含む. さらに，商加群 $\boldsymbol{V}_\ell/(\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-})$ は，$(2\ell-1)$ 次元の既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ と同型である.

(ii) $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ は $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ を既約 $\mathfrak{g}$-部分加群として含む. さらに，商加群 $\boldsymbol{V}_{1-\ell}/\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ は，既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+}$ と $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$ の直和と同型である.

この定理の主張のうち，$\boldsymbol{V}_\ell$, $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ の商加群との $\mathfrak{g}$-同型

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_\ell/(\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}) &\cong \boldsymbol{F}_{2\ell-1}, \\ \boldsymbol{V}_{1-\ell}/\boldsymbol{F}_{2\ell-1} &\cong \boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}, \end{aligned} \tag{9.9}$$

は，定理 9.2 (ii) の証明と同様にして示すことができるので，読者に委ねる.

問題 9.5. $\mathfrak{g}$-加群の同型 (9.9) を証明せよ.

なお，$\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ の場合とは異なり，$\boldsymbol{V}_\ell$ の場合は部分空間 $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ は $\mathfrak{g}$-不変ではない. 実際，$e_{\ell-1} \in \boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ だが，$\pi_\ell(X_+)e_{\ell-1} = (2\ell-1)e_\ell \notin \boldsymbol{F}_{2\ell-1}$. したがって，$\boldsymbol{V}_\ell$ が，$\mathfrak{g}$-加群として，

$$\boldsymbol{V}_\ell \cong \boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-} \oplus \boldsymbol{F}_{2\ell-1}$$

と直和分解するのでは**ない**ことに注意せよ. つまり，$\mathfrak{g}$-加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{D}_{2\ell}^{+} \oplus \boldsymbol{D}_{2\ell}^{-} \longrightarrow \boldsymbol{V}_\ell \longrightarrow \boldsymbol{F}_{2\ell-1} \longrightarrow 0$$

は分裂しない. $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ についても同様である.

よい喩えかどうかはわからないが，可約な表現 $\boldsymbol{V}_\ell$ は2階建てのアパートで，1階に2部屋，2階に1部屋がある. 1階には $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{+}$ 君と $\boldsymbol{D}_{2\ell}^{-}$ さんが，それぞれ，1部屋ずつ借りている. 2階には，大家の $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ 氏が住んでいる. また，アパート $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ 荘の住人は，$\boldsymbol{V}_\ell$ と同じであるが，1階と2階が完全に入れ替わっている. すなわち，$\boldsymbol{V}_\ell$ と $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ は同一の既約成分をもつが，$\mathfrak{g}$-同型ではない.

以上により，球主系列表現 $(\pi_\lambda, \boldsymbol{V}_\lambda)$ の既約分解が完全にわかったことになる. 結果をまとめると，π_λ たちを分解して得られる既約ハリシュ-チャンドラ加群は，次の4種類である.

$$\boldsymbol{V}_\ell \cong \begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\boldsymbol{F}_{2\ell-1}} \\ \hline \boldsymbol{D}_{2\ell}^+ & \boldsymbol{D}_{2\ell}^- \\ \hline \end{array} \qquad \boldsymbol{V}_{1-\ell} \cong \begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{D}_{2\ell}^+ & \boldsymbol{D}_{2\ell}^- \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{\boldsymbol{F}_{2\ell-1}} \\ \hline \end{array}$$

図 9.2. 可約な球主系列 $\boldsymbol{V}_\ell$, $\boldsymbol{V}_{1-\ell}$ の構造

(PS) 既約な球主系列表現 $\boldsymbol{V}_\lambda$ ($\lambda \notin \mathbb{Z}$). ただし, $\boldsymbol{V}_\lambda \cong \boldsymbol{V}_{1-\lambda}$.

(D$^+$) 最低ウェイト 2ℓ をもつ無限次元の既約表現 $\boldsymbol{D}_{2\ell}^+$ ($\ell = 1, 2, \ldots$).

(D$^-$) 最高ウェイト -2ℓ をもつ無限次元の既約表現 $\boldsymbol{D}_{2\ell}^-$ ($\ell = 1, 2, \ldots$).

(FD) $(2\ell - 1)$ 次元の既約表現 $\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ ($\ell = 1, 2, \ldots$).

ここまでで解説したリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現 π_λ の既約分解は，特殊ユニタリ群 $SU(1,1)$ の球主系列表現の既約分解にちょうど対応している．また，上記の既約表現 **(PS)**, **(D$^\pm$)**, **(FD)** たちは，$\mathfrak{g}_0$ に付随した既約ハリシュ-チャンドラ加群全体の半分を占めることになる．

残りの半分は，$(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を基底とする線形空間 $\boldsymbol{V}^1 = \boldsymbol{V}_\lambda^1$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) 上に，

$$\begin{cases} \pi_\lambda^1(X_+) f_n = (\lambda + n + 1) f_{n+1}, \\ \pi_\lambda^1(H) f_n = (2n+1) f_n, \\ \pi_\lambda^1(X_-) f_n = (\lambda - n) f_{n-1}, \end{cases} \tag{9.10}$$

により定まる $\mathfrak{g}$ の表現 π_λ^1 (**球的でない主系列表現**) を，球主系列の場合と全く同様の手続きで既約分解することによって得られる．

詳細は読者の演習問題としておこう．

問題 9.6. (i) $\lambda \notin \mathbb{Z}$ のとき，$\mathfrak{g}$ の表現 π_λ^1 は既約であることを示せ．
(ii) π_λ^1, π_μ^1 ($\lambda, \mu \notin \mathbb{Z}$) が同値になるためには，$\lambda = -\mu$ が必要十分条件となる．これを証明せよ．
(iii) $\lambda \in \mathbb{Z}$ のとき，表現 π_λ^1 を既約分解せよ．

既約でない主系列表現 $\pi_{\pm\ell}^1$ ($\ell = 0, 1, \ldots$) の既約成分として，$2\ell + 1$ を最低ウェイトとする無限次元既約表現 $\boldsymbol{D}_{2\ell+1}^+$，$-(2\ell+1)$ を最高ウェイトとする無限次元既約表現 $\boldsymbol{D}_{2\ell+1}^-$，および，$2\ell$ 次元の既約表現 $\boldsymbol{F}_{2\ell}$ が現れる．

ここで，最低ウェイト p をもつ既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{D}_p^+$ ($p = 1, 2, \ldots$) の構造をまとめておこう．$\boldsymbol{D}_p^+$ にはウェイトベクトルからなる基底 $(v_{p+2k})_{k=0,1,\ldots}$ が存在し，$\mathfrak{g}$ における標準トリプル (X_+, H, X_-) はこの基底に，

$$\begin{cases} X_+ \, v_{p+2k} = (p+k) v_{p+2k+2}, \\ H \, v_{p+2k} = (p+2k) v_{p+2k}, \\ X_- \, v_{p+2k} = (-k) v_{p+2k-2}, \end{cases} \tag{9.11}$$

により作用する．これらの表現作用素を $\boldsymbol{D}_p^+$ の基底 $v_p, v_{p+2}, v_{p+4}, \ldots$ に関して (無限サイズの) 行列で表示すると次のようになる．

$$X_+ \quad \longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ p & 0 & & & \\ & p+1 & 0 & & \\ & & p+2 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{array}\right.$$

$$H \quad \longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{cccc} p & & & \\ & p+2 & & \\ & & p+4 & \\ & & & \ddots \end{array}\right.$$

$$X_- \quad \longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & & & \\ & 0 & -2 & & \\ & & 0 & -3 & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{array}\right.$$

問題 9.7. (i) $\boldsymbol{D}_p^+$ は (9.11) を満たす基底 $(v_{p+2k})_{k=0,1,\ldots}$ をもつことを示せ．
(ii) $\mathfrak{g}$ の表現 $\boldsymbol{D}_p^-$, $\boldsymbol{F}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ のそれぞれについても，ウェイトベクトルからなる基底に $X_+, H, X_- \in \mathfrak{g}$ がどのように作用するかを書き下せ．

注意 9.5. 既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{D}_p^{\pm}$ $(p \geq 2)$ たちは，2 乗可積分な行列要素をもつ G の**離散系列表現** (discrete series representation) に対応しており，群上のフーリエ解析に大変重要な役割をもつ．なお，G の離散系列表現については，第 6 章でも論じられている．

以上で役者はすべてそろい，既約ハリシュ-チャンドラ加群を次のように分類することができる．

定理 9.4. (i) $\mathfrak{su}(1,1)$ に付随した任意の既約ハリシュ-チャンドラ加群は次のいずれかに同型である：

$$\boldsymbol{V}_\lambda,\ \boldsymbol{V}_\lambda^1,\ \boldsymbol{D}_p^+,\ \boldsymbol{D}_p^-,\ \boldsymbol{F}_p \quad (\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\ p = 1, 2, \ldots).$$

これらの加群の間には，$\boldsymbol{V}_\lambda \cong \boldsymbol{V}_{1-\lambda}$ と $\boldsymbol{V}^1_\lambda \cong \boldsymbol{V}^1_{-\lambda}$ を除き，同値関係は存在しない．

(ii) $n \in \mathbb{Z}$ に対して，n をウェイトとする 1 次元の既約 $\mathfrak{k}$-加群を $\mathbb{C}_n$ で表す．このとき，(i) にあげた既約ハリシュ-チャンドラ加群は，$\mathfrak{k}$-加群として，それぞれ次のように既約分解する．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{V}_\lambda \cong \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}} \mathbb{C}_n, \quad \boldsymbol{V}^1_\lambda \cong \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}+1} \mathbb{C}_n, \\
&\boldsymbol{D}^{\pm}_p \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}_{\pm(p+2k)} \quad (\text{複号同順}) \\
&\boldsymbol{F}_p \cong \mathbb{C}_{-(p-1)} \oplus \mathbb{C}_{-(p-3)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{p-3} \oplus \mathbb{C}_{p-1}.
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

既約でない主系列表現の構造を思い起こせば，上の定理 (i) から直ちに次のことを導きだすことができる．

系 9.5 (部分表現定理). 任意の既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{V}$ は，主系列表現 π_λ あるいは π^1_λ $(\lambda \in \mathbb{C})$ のある既約部分表現と同型である．

注意 9.6. ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{V}_\lambda$, $\boldsymbol{V}^1_\lambda$ に対応する群 $SL(2,\mathbb{R}) \cong SU(1,1)$ の主系列表現は，例 2.6 および 6.5 節で構成されているものに他ならない．

ここで，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現の分類についても，結果を述べておこう．すでに我々は，主系列表現 π_λ, π^1_λ を分解することで，p 次元の既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{F}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ を構成しているが，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は (同型を除き) これらで尽くされるというわけである．

定理 9.6. 自然数 $p = 1, 2, \ldots$ に対して，p 次元の既約 $\mathfrak{g}$-加群が (同型を除き) ただひとつ存在する．

注意 9.7. 注意 9.3 より，この定理は $\mathfrak{g}$ のコンパクト実型 $\mathfrak{su}(2)$ の有限次元既約表現の分類・構成を与えている (定理 4.15 参照)．

定理 9.4 および 9.6 の証明は 9.4 節で与える．

◆トピックス 5 (最高ウェイト表現). ……………………………………

既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{D}^-_p$ や $\boldsymbol{F}_{p+1}$ は，それぞれ，整数の最高ウェイト $-p, p$ をもつ．より一般に，任意の複素数 λ に対して，λ を最高ウェイトにもつ $\mathfrak{g}$ 上の既約加群 $\boldsymbol{H}[\lambda]$ が同型を除きただひとつ存在することがわかる．実際，u_n $(n = 0, 1, \ldots)$ を基底にもつ線形空間 $\boldsymbol{U} := \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}\, u_n$ に $\mathfrak{g}$ の表現 σ_λ を，

$$
\begin{cases}
\sigma_\lambda(X_+) u_n = (\lambda - (n-1)) u_{n-1}, \\
\sigma_\lambda(H) u_n = (\lambda - 2n) u_n, \\
\sigma_\lambda(X_-) u_n = (n+1) u_{n+1},
\end{cases}
\tag{9.13}
$$

により定めることができる (ただし，第 1 式では $u_{-1} := 0$ と理解すること)．$(\sigma_\lambda, \boldsymbol{U})$ を $\mathfrak{g}$ の**バーマ (Verma) 加群**という．このとき，$\boldsymbol{H}[\lambda]$ は表現 σ_λ の唯一の既約商表現として得られる．

一般に，任意の複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，最高ウェイトをもつ表現のなすカテゴリーが定式化され，$\mathfrak{g}$ の表現論において基本的な働きをする (例えば [6, Chap.7] 参照)．

問題 9.8. (i) $(\sigma_\lambda(X_+), \sigma_\lambda(H), \sigma_\lambda(X_-))$ が $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{U})$ において標準トリプルをなすことを確かめ，σ_λ が $\mathfrak{g}$ の表現を与えることを示せ．

(ii) σ_λ が既約であるためには，λ が非負整数でないことが必要十分条件である．これを示せ．

(iii) λ が非負整数のとき，バーマ加群 $(\sigma_\lambda, \boldsymbol{U})$ を既約分解せよ．

9.3　シュアの補題とその応用

群，結合代数，リー代数など，代数構造を備えた集合の既約表現を扱うためには，相関作用素に関する「シュアの補題」が役に立つ．2.4 節では群の表現の場合を扱ったが，本節では，リー代数の表現に対して，この補題を一般的な形で定式化し (定理 9.7)，具体的な応用を論じる．

9.3.1　リー代数版 シュアの補題

定理 9.7. $\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上のリー代数とする．線形空間として，$\mathfrak{g}$ は高々可算次元であると仮定する．すなわち，$\mathfrak{g}$ は，有限または可算個の要素からなる基底をもつものとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の複素線形空間 $\boldsymbol{V}$ 上への既約表現 π の相関作用素はスカラー作用素に限る．

証明. 必要ならば，$\mathfrak{g}$ を係数拡大 (複素化) して，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合に証明すればよい (注意 9.3 参照)．$A: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ は π に関する相関作用素であり，かつ，A は $\boldsymbol{V}$ 上スカラー作用素ではないと仮定して矛盾を導こう．論証の流れをはっきりさせるため，証明を 4 段階に分ける．

第 1 段: 既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{V}$ は，線形空間として高々可算次元である．実際，零でないベクトル $v \in \boldsymbol{V}$ を任意に選び，固定する．正の整数 n に対して，写像

$$\overbrace{\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}}^{n} \ni (X_1, \ldots, X_n) \longmapsto \pi(X_1)\cdots\pi(X_n)v \in \boldsymbol{V}$$

は多重線形写像であるから，テンソル積空間 $T^n(\mathfrak{g}) = \overbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}^{n}$ から $\boldsymbol{V}$ への線形写像を自然に誘導する．これを $\varphi_n : T^n(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{V}$ と書く: $\varphi_n(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \pi(X_1)\cdots\pi(X_n)v$. $\mathfrak{g}$ は高々可算次元であるから，$T^n(\mathfrak{g})$ もそうである．したがって，v および φ_n の像 $\operatorname{Im}\varphi_n$ ($n=1,2,\ldots$) たちが生成する部分空間

$$\boldsymbol{W} := \mathbb{C}v + \sum_{n\geq 1} \operatorname{Im}\varphi_n$$

も高々可算次元になる．一方で，$\pi(X)v \in \operatorname{Im}\varphi_1$, $\pi(X)(\operatorname{Im}\varphi_n) \subset \operatorname{Im}\varphi_{n+1}$ ($X \in \mathfrak{g}$) なので，$\boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群となる．$\boldsymbol{V}$ の既約性から，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{W}$ がわかる．

第 2 段: 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$A-\lambda I$ (I は $\boldsymbol{V}$ 上の恒等変換) は $\boldsymbol{V}$ 上の線形同型写像である．実際，$A-\lambda I$ は相関作用素であるから，核 $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ および像 $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ は $\boldsymbol{V}$

の $\mathfrak{g}$-不変部分空間である．さらに，A はスカラー作用素ではないので，$\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \neq \boldsymbol{V}$, $\mathrm{Im}(A-\lambda I) \neq \{0\}$．これらと，$\boldsymbol{V}$ の既約性から，$\mathrm{Ker}(A-\lambda I)=\{0\}$, $\mathrm{Im}(A-\lambda I)=\boldsymbol{V}$ が得られる．これは，$A-\lambda I$ が $\boldsymbol{V}$ 上の線形同型写像であることを意味する．

なお，$\boldsymbol{V}$ の有限次元部分空間 $\boldsymbol{U}$ で A-不変 (すなわち，$A\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{U}$) なものが存在するならば，$A$ の $\boldsymbol{U}$ 上の固有値 λ を考えることで，$\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$．これは上で述べたことと矛盾する．この場合は，第 2 段のみで定理の証明が完了することになる．

第 3 段: 変数 x の複素係数多項式のなす多元環を $\mathbb{C}[x]$ とし，$\boldsymbol{V}$ 上の 1 次変換全体が写像の和と合成に関してつくる多元環を $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V})$ で表す．$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ に対して，$f(A) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V})$ を $f(A):=a_0I+a_1A+\cdots+a_nA^n$ により定める．このとき，対応

$$\mathbb{C}[x] \ni f \overset{\alpha}{\longmapsto} f(A) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V})$$

は多元環の準同型写像である．さらに，第 2 段階の結果より，$f \neq 0$ ならば $f(A)$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V})$ の可逆元となる．実際，$f(x)=a_n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$ $(a_n \neq 0)$ と 1 次式の積に分解したとき，$f(A)=a_n(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)$ となるからである．

したがって，局所化の普遍性より，α は有理関数体 $\mathbb{C}(x)=\{f/g \mid f,g \in \mathbb{C}[x],\ g \neq 0\}$ ($\mathbb{C}[x]$ の商体) からの単射準同型写像 $\tilde{\alpha}$ に一意的に拡張できる：

$$\mathbb{C}(x) \ni h=f/g \overset{\tilde{\alpha}}{\longmapsto} h(A):=f(A)g(A)^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V}).$$

あるいは，上の写像 $\tilde{\alpha}$ が well-defined であって，$\mathbb{C}(x)$ から $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V})$ への単射準同型を定めることを直接確かめることもやさしい．

いま，単射準同型 $\tilde{\alpha}$ を用いて，$\mathbb{C}(x)$ から $\boldsymbol{V}$ への線形写像 β を $\beta(h):=h(A)v$ $(h \in \mathbb{C}(x))$ により定める．このとき，β も単射である．なぜなら，$h \neq 0$ ならば，$h(A)$ は $\boldsymbol{V}$ 上の線形同型となるので，$\beta(h) \neq 0$ である．

第 4 段: 線形空間 $\mathbb{C}(x)$ においては，分数関数

$$h_\lambda(x) := \frac{1}{x-\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

たちは，非可算個の 1 次独立なベクトルの族をなす (検証してみよ)．β は単射なので，

$$S := \{\beta(h_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

は $\boldsymbol{V}$ において 1 次独立である．超限帰納法を用いて，S を含む $\boldsymbol{V}$ の基底 $\tilde{S}$ が存在することがわかる (有限次元線形空間の場合には線形代数の授業で必ず学ぶ事柄である)．$\tilde{S} \supset S$ は非可算無限集合であるが，これは $\boldsymbol{V}$ が高々可算次元であることに矛盾する．なぜなら，線形空間の基底の (集合としての) 濃度は，基底の選び方によらず一定であるから ([17, 定理 11.1] 参照)． □

証明の第 1 段で示したことは基本的なので，命題として述べておこう．

命題 9.8. 高々可算次元のリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の既約加群 $\boldsymbol{V}$ は高々可算次元である．

なお，シュアの補題の逆は一般にはなりたたない：

問題 9.9. 可解リー代数 $\mathfrak{b}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ の $\boldsymbol{V}$ 上への自然表現 (例 9.2) の相関作用素は，スカラー作用素のみであることを示せ．しかし，$\dim \boldsymbol{V} \geq 2$ ならば，$\mathfrak{b}(\mathcal{F})$-加群 $\boldsymbol{V}$ は既約ではない．

9.3.2 応用 I：可換リー代数の場合

シュアの補題を可換なリー代数に応用してみよう．

系 9.9. 高々可算次元の可換なリー代数 $\mathfrak{g}$ の既約表現は 1 次元である．

証明. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{g}$ の既約表現とする．$\mathfrak{g}$ が可換ゆえ，表現作用素 $\pi(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ は相関作用素となる．定理 9.7 より，$\pi(X)$ はスカラー作用素である．よって，$\boldsymbol{V}$ の任意の部分空間は $\mathfrak{g}$-不変となる．π は既約なので，$\boldsymbol{V}$ は 1 次元でなければならない． □

9.3.3 応用 II：ハイゼンベルグ代数の場合

定理 9.7 をハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)$ の既約表現に適用して，次の定理を得る．

定理 9.10. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathbb{K}$ 上のハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V) = \{v + t\boldsymbol{e} | \ v \in V, t \in \mathbb{K}\}$ の既約表現とする．このとき，$\pi(\boldsymbol{e}) = \lambda I$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．また，

(i) $\lambda = 0$ ならば，$\boldsymbol{V}$ は 1 次元である．

(ii) $\lambda \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{V}$ は無限次元である．

この λ を $\mathfrak{n}(V)$ の既約表現 π の**中心値**とよぶことにする．中心値 0 の既約表現 π は，V から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{K}$-線形写像 ϕ と，対応：

$$\pi(v + t\boldsymbol{e}) = \phi(v) \tag{9.14}$$

により，1 対 1 に対応している．9.2.1 節で与えた表現 π, ϖ は中心値 $\lambda \neq 0$ の既約表現である．これについては，次章で詳しく扱う．

定理 9.10 の証明. $\boldsymbol{e}$ は $\mathfrak{n}(V)$ の中心に属するので，$\pi(\boldsymbol{e})$ は相関作用素となる．したがって，定理 9.7 より，$\pi(\boldsymbol{e}) = \lambda I$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．

(i) $\lambda = 0$ のとき，$[\pi(v), \pi(v')] = \pi(B(v, v')\boldsymbol{e}) = 0$ $(v, v' \in V)$ であることに注意する．線形空間 V を可換リー代数とみなしたとき，$V \ni v \mapsto \pi(v) \in \mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ は V の既約表現を定めることになる．系 9.9 より，$\boldsymbol{V}$ は 1 次元であることがわかる．

(ii) $\lambda \neq 0$ とする．このとき，$\boldsymbol{V}$ のシンプレクティック基底 p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$ について，

$$\pi(p_i)\pi(q_i) - \pi(q_i)\pi(p_i) = \lambda I$$

であるが，もし $\boldsymbol{V}$ が有限次元ならば，上の両辺の1次変換のトレースをとって，$0 = \lambda \dim \boldsymbol{V}$ を得る．これは $\lambda \neq 0$ に反する． □

9.3.4 応用 III：カシミール作用素と無限小指標 ($\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の場合)

次に，$\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}X_+ + \mathbb{C}H + \mathbb{C}X_-$ の場合を考えてみよう．リー代数 $\mathfrak{g}$ は単純であるから (定理 7.11)，$\mathfrak{g}$ の中心は $\{0\}$ である．したがって，ハイゼンベルグ代数の場合のように，$\mathfrak{g}$ の要素によって既約表現の相関作用素をつくることはできない．しかし，発想を転じて $\mathfrak{g}$ の要素の「よい2次式」を考えることで，話がうまく運ぶのである．

定理 9.11. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約表現とする．このとき，

$$C_\pi := \pi(X_+)\pi(X_-) + \pi(X_-)\pi(X_+) + \frac{1}{2}\pi(H)^2 \tag{9.15}$$

は $\boldsymbol{V}$ 上の相関作用素である．したがって，定理 9.7 より，ある $\nu \in \mathbb{C}$ があって，$C_\pi = \nu I$ となる．

証明. C_π が相関作用素であること，すなわち，

$$(\operatorname{ad}\pi(X))(C_\pi) = [\pi(X), C_\pi] = 0 \quad (X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$$

を証明すればよい．ただし，ad は $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ における随伴表現である ((7.22) 参照)．

まず，$[\pi(X_+), \pi(X_-)] = \pi([X_+, X_-]) = \pi(H)$ に注意して，作用素 C_π を

$$C_\pi = 2\pi(X_-)\pi(X_+) + \frac{1}{2}\pi(H)^2 + \pi(H) \tag{9.16}$$

と書き換えておく．$\operatorname{ad}\pi(X)$ は $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{V})$ の微分であるから，

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}\pi(X))(C_\pi) = {} & 2[\pi(X), \pi(X_-)]\,\pi(X_+) + 2\pi(X_-)\,[\pi(X), \pi(X_+)] \\ & + \frac{1}{2}[\pi(X), \pi(H)]\,\pi(H) + \frac{1}{2}\pi(H)\,[\pi(X), \pi(H)] \\ & + [\pi(X), \pi(H)]\end{aligned} \tag{9.17}$$

となる．標準トリプルの交換関係を用いて，$X = X_+, X_-, H$ について，(9.17) の右辺を計算し，それぞれの場合に，右辺が0に等しいことを確かめる．例えば $X = X_+$ について，右辺は

$$\begin{aligned}&2\pi(H)\pi(X_+) + \frac{1}{2}(-2\pi(X_+))\pi(H) + \frac{1}{2}\pi(H)(-2\pi(X_+)) - 2\pi(X_+) \\ &\qquad = \pi(H)\pi(X_+) - \pi(X_+)\pi(H) - 2\pi(X_+) = \pi([H, X_+]) - 2\pi(X_+) = 0\end{aligned}$$

となる．$X = X_-, H$ についても同様である．以上より，C_π は表現 π の相関作用素であることがわかった．□

C_π を表現 π に付随した**カシミール作用素** (Casimir operator) という．また，

$$\nu = \frac{1}{2}(\Lambda^2 - 1) \quad \text{すなわち} \quad \Lambda = \pm\sqrt{2\nu + 1} \tag{9.18}$$

なる $\Lambda \in \mathbb{C}$ (符号を除き π から一意に定まる) を表現 π の**無限小指標**とよぶ．例えば，1次元の自明な既約表現の場合 $\nu = 0$ なので，その無限小指標は ± 1 である．

問題 9.10. 9.2.2 節で構成した $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約ハリシュ-チャンドラ加群

$$\boldsymbol{V}_\lambda,\ \boldsymbol{V}_\lambda^1,\ \boldsymbol{D}_p^+,\ \boldsymbol{D}_p^-,\ \boldsymbol{F}_p \quad (\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\ p = 1, 2, \dots)$$

たちの無限小指標は，それぞれ，

$$\pm(2\lambda - 1),\ \pm 2\lambda,\ \pm(p-1),\ \pm(p-1),\ \pm p$$

であることを示せ．

ところで，カシミール作用素の定義式 (9.15) を眺めていると，表現 π によらない X_+, X_-, H の2次式 $X_+X_- + X_-X_+ + (H^2/2)$ に何か意味があるのではないかと思えてくる．実際，これは良い発想であり (ただし上の2次式を行列の和と積と考えて具体的に計算してみるのは勘が悪い)，次のように正当化される．

一般に，$\mathfrak{g}$ を任意のリー代数とする．線形空間 $\mathfrak{g}$ 上のテンソル代数 $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{g})$, $T^n(\mathfrak{g}) := \bigotimes^n \mathfrak{g}$ (n 階テンソル積空間), において，

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

たちが生成する $T(\mathfrak{g})$ の両側イデアルを $\mathcal{I}$ で表す．このとき，剰余代数 $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ を $\mathfrak{g}$ の**普遍包絡代数**（ほうらく）(または**普遍展開環**) という (Dixmier [6]; 4.5 節参照)．$\mathcal{I}$ の定義から，標準写像

$$\alpha : \mathfrak{g} \ni X \longmapsto \tilde{X} := X + \mathcal{I} \in U(\mathfrak{g})$$

はリー代数の準同型写像を与え (ただし $U(\mathfrak{g})$ には交換子積により括弧積を定義する; 例 7.3 参照)，結合代数 $U(\mathfrak{g})$ は，$\alpha(\mathfrak{g})$ と単位元1により生成されている．いま，$\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ があれば，$\boldsymbol{V}$ 上には結合代数 $U(\mathfrak{g})$ の表現 $\tilde{\pi}$ が，$\tilde{\pi}(\tilde{X}) := \pi(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ により一意に定まる．言い換えれば，$\boldsymbol{V}$ に $U(\mathfrak{g})$-加群の構造が定まる．この逆も正しく，結局，リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現とは，対応する結合代数 $U(\mathfrak{g})$ 上の加群のことに他ならない．

さて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合に話を戻すと，定理 9.11 の証明と全く同様にして，

$$C := \tilde{X}_+\tilde{X}_- + \tilde{X}_-\tilde{X}_+ + \frac{1}{2}\tilde{H}^2 \in U(\mathfrak{g}) \tag{9.19}$$

は $U(\mathfrak{g})$ の中心元であることがわかる：$CD = DC$ $(\forall D \in U(\mathfrak{g}))$．$C$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の**カシミール要素** (あるいは**カシミール元**; [29] も参照) とよぶ．カシミール作用素 C_π は，カシミール要素 C が定める表現作用素に他ならない：$C_\pi = \tilde{\pi}(C)$.

9.4 定理 9.4 および 9.6 の証明

定理 9.11 を用いて，実型 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(1,1)$ に付随する $\mathfrak{g}$ の既約ハリシュ-チャンドラ加群，および，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の分類定理に証明を与えよう．そのために鍵となる次の命題から始める．

命題 9.12. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を無限小指標 Λ をもつ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約表現とし，$\ell_0 \in \mathbb{C}$ をウェイトとするウェイトベクトル $v_0 \in \boldsymbol{V}$ $(v_0 \neq 0)$ が存在すると仮定する．

(i) $v_{\pm m} := \pi(X_\pm)^m v_0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ はウェイト $\ell_0 \pm 2m$ をもつウェイトベクトルであるか零ベクトルである．

(ii) $v_m \neq 0$ なるベクトル v_m $(m \in \mathbb{Z})$ 全体のなす集合 S は $\boldsymbol{V}$ の基底をなす．とくに，$\boldsymbol{V}$ の各ウェイトの重複度は 1 である．

(iii) $v_m = 0$ なる $m \in \mathbb{Z}$ が存在する (すなわち，$\boldsymbol{V}$ のウェイトの集合が $\ell_0 + 2\mathbb{Z}$ の真部分集合である) ためには，$\Lambda - \ell_0$ または $-\Lambda - \ell_0$ の少なくとも一方が奇数となることが必要十分条件である．

証明. (i) 交換関係 $[\pi(H), \pi(X_\pm)] = \pm 2\pi(X_\pm)$ を用いて，m に関する数学的帰納法により簡単に証明することができる．詳細は読者に委ねる．

(ii) S が生成する $\boldsymbol{V}$ の部分空間を $\boldsymbol{W}$ とする．(i) より $v_m \in S$ たちのウェイトは互いに相異なるから，S は $\boldsymbol{V}$ で 1 次独立な集合であって，したがって $\boldsymbol{W}$ の基底をなす．そこで，$\boldsymbol{W}$ が $\mathfrak{g}$-不変であることを示そう．そうすれば，表現 π の既約性から，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}$ が得られ，証明が完結する．

そのため，$\pi(X_\pm)$ の v_m への作用を調べる．$m \leq 0$ のとき，v_m の定義より，$\pi(X_-)v_m = v_{m-1} \in \boldsymbol{W}$ である．一方，$m > 0$ のとき，(9.16) に注意して，カシミール作用素 C_π を v_{m-1} に施す．(i) と定理 9.11 から，

$$\frac{1}{2}(\Lambda^2 - 1)v_{m-1} = 2\pi(X_-)v_m + \left\{\frac{1}{2}(\ell_0 + 2(m-1))^2 + (\ell_0 + 2(m-1))\right\} v_{m-1}$$

が従う．よって，

$$\pi(X_-)v_m = \begin{cases} v_{m-1} & (m \leq 0) \\ \dfrac{1}{4}\left\{\Lambda^2 - (\ell_0 + 2m - 1)^2\right\} v_{m-1} & (m > 0) \end{cases} \tag{9.20}$$

が得られた．同様に，カシミール作用素 C_π を v_{m+1} に施すことで，

$$\pi(X_+)v_m = \begin{cases} v_{m+1} & (m \geq 0) \\ \dfrac{1}{4}\left\{\Lambda^2 - (\ell_0 + 2m + 1)^2\right\} v_{m+1} & (m < 0) \end{cases} \tag{9.21}$$

を得る．ただし，(9.16) を

$$C_\pi = 2\pi(X_+)\pi(X_-) + \frac{1}{2}\pi(H)^2 - \pi(H) \tag{9.22}$$

と書き換えて用いている．

よって，$\boldsymbol{W}$ は $\pi(X_\pm)$-不変であることがわかる．また，$\boldsymbol{W}$ はウェイトベクトルから生成されているので，もちろん $\pi(H)$-不変である．以上により，$\boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群であることがわかった．

(iii) いま，$v_m = 0$ なる $m > 0$ が存在するとせよ．このような m のうちで最小のものをとれば，$v_{m-1} \neq 0$ かつ $v_m = 0$ である．等式 (9.20) より $\pm\Lambda = \ell_0 + 2m - 1$ が従い，よって $\Lambda - \ell_0$ または $-\Lambda - \ell_0$ の少なくとも一方は奇数であることがわかる．また，$m < 0$ の場合も，等式 (9.21) を用いて同じ結論を得る．

逆に，$\pm\Lambda = \ell_0 + 2m - 1$ $(m \in \mathbb{Z})$ とする．$m > 0$ のとき，(9.20) より $\pi(X_-)v_m = 0$ がわかる．これより，$\boldsymbol{U} := \bigoplus_{k \geq m} \mathbb{C}v_k$ は $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群をなすことが容易に確かめられる．一方，$v_0 \notin \boldsymbol{U}$ であるから，$\boldsymbol{V}$ の既約性から $\boldsymbol{U} = \{0\}$，とくに $v_m = 0$ を得る．$m \leq 0$ の場合も (9.21) を用いて同様に議論をすればよい (詳細は読者に委ねる)．□

系 9.13. $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ は許容的である．

証明. 表現作用素 $\pi(H)$ は有限次元複素線形空間 $\boldsymbol{V}$ 上の 1 次変換であるから，少なくともひとつの固有値 (ウェイト) $\ell_0 \in \mathbb{C}$ と対応する固有 (ウェイト) ベクトル $v_0 \in \boldsymbol{V}\backslash\{0\}$ をもつ．このとき，命題 9.12 から，ウェイトベクトルからなる $\boldsymbol{V}$ の基底 $S = \{v_m \mid -p \leq m \leq q\}$ をとることができる．ここに，p, q は非負整数である．ところが，$\pi(H) = [\pi(X_+), \pi(X_-)] = \pi(X_+)\pi(X_-) - \pi(X_-)\pi(X_+)$ のトレースが零であることから，

$$\sum_{m=-p}^{q} (\ell_0 + 2m) = 0,$$

よって，$\ell_0 = p - q \in \mathbb{Z}$ を得る．ゆえに $\boldsymbol{V}$ のウェイト $\ell_0 + 2m$ はみな整数となり，表現 π は許容的である．□

さて，$(\pi, \boldsymbol{V})$ を任意の既約ハリシュ-チャンドラ加群とし，そのウェイトの集合を Υ (ユプシロンと読む) で表す．命題 9.12 より，m_0, m_1 を適当な整数として，

$$\Upsilon = \begin{cases} 2\mathbb{Z} \quad \text{または} \quad 2\mathbb{Z}+1 & \text{(Case P)} \\ \{m_0 + 2k \mid k = 0, 1, \ldots\} & \text{(Case D}^+\text{)} \\ \{m_1 - 2k \mid k = 0, 1, \ldots\} & \text{(Case D}^-\text{)} \\ \{m_0 + 2k \mid k = 0, 1, \ldots, q\} & \text{(Case F)} \end{cases} \tag{9.23}$$

のいずれかの形になることがわかる．さらに，4 番目の場合には，系 9.13 の証明から，

$$m_0 \leq 0, \quad q = -m_0, \tag{9.24}$$

よって $\Upsilon = \{m_0, m_0+2, \ldots, -m_0\}$ となることに注意する．

(9.23) のそれぞれの場合に，既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ の構造を決定することにより，定理 9.4 を証明しよう．以下では，表現 π のウェイトのパリティが偶の場合 ($\Upsilon \subset 2\mathbb{Z}$) を扱う．

Case P : $\Upsilon = 2\mathbb{Z}$

命題 9.12 (iii) を $\ell_0 = 0$ として適用すると，π の無限小指標 Λ は奇数ではないことがわかる．すなわち，$\lambda := (\Lambda+1)/2 \notin \mathbb{Z}$ となる．このことから，ウェイト 0 のベクトル $e_0' \in \boldsymbol{V}$ から出発して，等式

$$\pi(X_+)e_n' = (\lambda+n)e_{n+1}' \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{9.25}$$

$$\pi(X_-)e_n' = (\lambda-n)e_{n-1}' \quad (n = 0, -1, \ldots), \tag{9.26}$$

$$\pi(H)e_n' = 2ne_n' \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{9.27}$$

を満たすように，$\boldsymbol{V}$ の基底 $\{e_n'\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を帰納的に定めることができる．このとき，等式 (9.25) および (9.26) は任意の整数 n に対してなりたつことが次のようにしてわかる．実際，(9.16) に注意して (9.25) の両辺に $\pi(X_-)$ を施せば，$n = 0, 1, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned}
(\lambda+n)\pi(X_-)e_{n+1}' &= \pi(X_-)\pi(X_+)e_n' \\
&= \frac{1}{2}\left\{C_\pi - \frac{1}{2}\pi(H)^2 - \pi(H)\right\}e_n' \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}((2\lambda-1)^2-1) - 2n^2 - 2n\right\}e_n' \\
&= (\lambda+n)(\lambda-n-1)e_n'
\end{aligned}$$

が得られ，これは等式 (9.26) が正の整数 n についてもなりたつことを示している．(9.25) についても同様である (等式 (9.22) に注意して (9.26) の両辺に $\pi(X_+)$ を施せばよい)．

以上により，$(\pi, \boldsymbol{V})$ は (9.4) で定まる球主系列表現 $(\pi_\lambda, \boldsymbol{V}_\lambda)$ と同型であることがわかった．

Case D$^+$: $\Upsilon = \{m_0 + 2k \mid k = 0, 1, \ldots\}$ (m_0 **は偶数**)

まず，$m_0 > 0$ であることを示そう．$m_0 = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) とし，m_0 をウェイトにもつ $\boldsymbol{V}$ のベクトル e_ℓ' ($\neq 0$) を固定する．Υ の形より，$\pi(X_-)e_\ell' = 0$ である．もし，$m_0 \leq 0$ であれば，$u := \pi(X_+)^{-m_0+1}e_\ell'$ は ウェイト $-m_0+2 = -2\ell+2$ に対応する (0 でない) ウェイトベク

トルであって，

$$\begin{aligned}\pi(X_-)u &= [\pi(X_-),\, \pi(X_+)^{-m_0+1}]\, e'_\ell \\ &= \sum_{k=0}^{-m_0} \pi(X_+)^{-m_0-k}\pi(-H)\pi(X_+)^k e'_\ell \quad (\because\ [X_-, X_+] = -H) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{-m_0} (-m_0 - 2k) \right\} \cdot \pi(X_+)^{-m_0} e'_\ell = 0\end{aligned}$$

を満たす (第 2 の等号には $\mathrm{ad}\,\pi(X_-)$ が微分であることも用いた)．したがって，u が生成する $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群のウェイトは，$\{-m_0+2, -m_0+4, \ldots\}$ となり，Υ 全体に一致しない．これは表現 π の既約性に反する．したがって $m_0 = 2\ell > 0$ でなければならない．

次に，命題 9.12 から，e'_ℓ から出発して $\pi(X_+)$ を次々に作用させることによって，等式

$$\pi(X_+)e'_n = (\ell + n)e'_{n+1}, \quad \pi(H)e'_n = 2ne'_n \tag{9.28}$$

を満たす $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{e'_n \mid n = \ell, \ell+1, \ldots\}$ が一意的に定まる．$\ell > 0$ であるから，右辺の係数 $\ell + n$ は零になり得ないことに注意せよ．さて，$\boldsymbol{V}$ は最低ウェイト 2ℓ をもつから，その無限小指標は $\Lambda = \pm(2\ell - 1)$ になる (等式 (9.22) を用いて確かめてみよ)．そこで，(9.28) の両辺に $\pi(X_-)$ を施して，Case P の場合と同じ計算を実行すると，

$$\pi(X_-)e'_{n+1} = (\ell - n - 1)e'_n$$

が導かれる．これは表現 π が可約な球主系列表現 π_ℓ の既約部分表現 $\boldsymbol{D}^+_{2\ell}$ と同型であることを示している．

Case $\mathbf{D}^-$: $\Upsilon = \{m_1 - 2k \mid k = 0, 1, \ldots\}$ (m_1 **は偶数**)

この場合は，Case D^+ と同様である．結論のみを述べると，$m_1 = -2\ell$ は負であり ($\ell > 0$)，π は既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{D}^-_{2\ell}$ と同型になる．

Case F : $\Upsilon = \{m_0 + 2k \mid k = 0, 1, \ldots, q\}$ (m_0 **は偶数**)

等式 (9.24) に注意して，$\ell := 1 - (m_0/2) > 0$ とおくと，$\boldsymbol{V}$ のウェイトは $m_0 = -2(\ell - 1), -2(\ell-1)+2, \ldots, -m_0 = 2(\ell - 1)$ であって，表現 π の無限小指標は $\Lambda = \pm(2\ell - 1)$ となる．最低ウェイトベクトル $e'_{-(\ell-1)}$ から出発して，$\boldsymbol{V}$ の基底 $\{e'_n \mid -(\ell-1) \leq n \leq \ell - 1\}$ を，

$$\pi(X_+)e'_n = ((1-\ell) + n)e'_{n+1}, \quad \pi(H)e'_n = 2ne'_n \tag{9.29}$$

を満たすように定める．このとき，Case P や Case D^+ と全く同様にして，

$$\pi(X_-)e'_{n+1} = ((1-\ell) - (n+1))e'_n$$

を示すことができる．これより，$\boldsymbol{V}$ は可約球主系列 $\pi_{1-\ell}$ の有限次元既約部分表現 $\boldsymbol{F}_{2\ell-1} = \boldsymbol{F}_{1-m_0}$ と同型であることがわかる．

定理 9.4 の証明の完成． 以上の議論をまとめると，ウェイトがみな偶数である既約ハリシュ-チャンドラ加群は球主系列表現 π_λ ($\lambda \in \mathbb{C}$) の既約成分のいずれかと同型になることがわかった．同じように考えれば，ウェイトが奇数である既約ハリシュ-チャンドラ加群は，球的でない主系列表現 π_λ^1 の既約成分として現れることを証明することができる．よって，定理 9.4 (i) の前半部分が示された．

既約表現の同値性に関する (i) の後半の主張は，ウェイトの集合 Υ の形と，既約主系列表現の間の同値関係に関する結果 (定理 9.2 (ii) および問題 9.6 (ii)) から直ちに従う．

また，$\mathfrak{k}$-スペクトルに関する主張 (ii) は各既約ハリシュ-チャンドラ加群の構成より明らかである． □

定理 9.6 の証明の完成． 系 9.13 および定理 9.4 から明らかである． □

9.5 実リー代数のユニタリ表現

$\mathfrak{g}_0$ を有限次元実リー代数とする．この節では，$\mathfrak{g}_0$ の表現に対してユニタリ (化可能) 性の概念を定式化する．一般に，表現が有限次元の場合には，リー代数 $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現とは，$\mathfrak{g}_0$ をリー代数とする単連結かつ連結なリー群のユニタリ表現を微分したものに他ならないことが示される．さらに，無限次元表現についても，リー代数のユニタリ表現は大変重要で役にたつ．例えば，群 $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現の同値類は，$\mathfrak{su}(1,1)$ に対する既約かつユニタリなハリシュ-チャンドラ加群の同型類と 1 対 1 に対応する (注意 9.4)．そこで，本節後半では，9.2.2 節で分類・構成した $\mathfrak{su}(1,1)$ に対する既約ハリシュ-チャンドラ加群のうちで，ユニタリ化可能なものを決定しよう．さらに次章では，ハイゼンベルグ代数の無限次元既約ユニタリ表現とその拡張について詳しく論じる．

9.5.1 表現のユニタリ性

まず，ユニタリ表現の定義から始めよう．

定義 9.7. (i) $\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ が**ユニタリ** (化可能) であるとは，表現空間 $\boldsymbol{V}$ 上に正定値エルミート内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が存在して，任意の $X \in \mathfrak{g}_0$ に対して，

$$\langle\pi(X)v, w\rangle + \langle v, \pi(X)w\rangle = 0 \quad (v, w \in \boldsymbol{V}) \tag{9.30}$$

を満たすときをいう．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\boldsymbol{V}$ 上の $\mathfrak{g}_0$-**不変な内積**とよぶ．

(ii)　$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_0$ の複素化とする (注意 9.3 参照). $\mathfrak{g}$ の表現 $(\rho, \boldsymbol{W})$ について, ρ の $\mathfrak{g}_0$ への制限がユニタリ表現であるとき, ρ は**実型** $\mathfrak{g}_0$ **に関してユニタリ** (化可能) であるという.

定義 9.8. 正定値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ を備えた線形空間 $\boldsymbol{V}_i$ 上に定まる $\mathfrak{g}_0$ のふたつのユニタリ表現 π_i $(i=1,2)$ が**ユニタリ同値**であるとは, 内積を保つ $\mathfrak{g}_0$-同型写像

$$\begin{aligned} &A : \boldsymbol{V}_1 \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{V}_2, \\ &\langle Av, Aw\rangle_2 = \langle v, w\rangle_1 \ (v, w \in \boldsymbol{V}_1), \quad \pi_2(X)A = A\pi_1(X) \ (X \in \mathfrak{g}_0), \end{aligned} \tag{9.31}$$

が存在するときをいう.

注意 9.8. $\boldsymbol{V}$ が有限次元であるとき, 条件 (9.30) は, $\boldsymbol{V}$ 上の 1 次変換 $\pi(X)$ が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して歪エルミート変換であることを意味する : $\pi(X)^* = -\pi(X)$. これは, $\pi(X)$ が $\boldsymbol{V}$ 上のユニタリ変換からなる 1 径数群

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp t\pi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \pi(X)^n}{n!} \in U(\boldsymbol{V})$$

を生成することと同値である. ここに, $U(\boldsymbol{V})$ は $\boldsymbol{V}$ 上のユニタリ変換全体のなす群である.

さて, $\mathfrak{g}_0$ の表現 $\pi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(V)$ を複素線形に拡張して, $\mathfrak{g}$ の表現 $(\pi_{\mathbb{C}}, \boldsymbol{V})$ が得られるが, π が ユニタリ表現であることと, 複素化 $\pi_{\mathbb{C}}$ が $\mathfrak{g}_0$ に関してユニタリであることとは, 明らかに同じことである. 以下では, 記号の簡略化のため, $\pi_{\mathbb{C}}$ も π と表記することにする.

ユニタリ表現の条件 (9.30) を, 後で使いやすい形に書き換えておく.

補題 9.14. σ を $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役作用素 (命題 8.13 (ii) 参照) とし, $Q \cup \sigma(Q)$ が複素線形空間 $\mathfrak{g}$ を生成するような部分集合 $Q \subset \mathfrak{g}$ をとる. このとき, $\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ がユニタリであるためには, 任意の $X \in Q$ に対して

$$\langle \pi(X)v, w\rangle + \langle v, \pi(\sigma(X))w\rangle = 0 \quad (v, w \in \boldsymbol{V}) \tag{9.32}$$

となる内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が $\boldsymbol{V}$ 上に存在することが必要十分条件である.

証明. まず, $(\pi, \boldsymbol{V})$ が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関してユニタリ表現であると仮定する. $X \in \mathfrak{g}_0$ ならば $\sigma(X) = X$ であるから, 等式 (9.32) は $X \in \mathfrak{g}_0$ については成立している. また, $v, w \in \boldsymbol{V}$ を固定したとき,

$$\mathfrak{g} \ni X \longmapsto \langle \pi(X)v, w\rangle + \langle v, \pi(\sigma(X))w\rangle \in \mathbb{C}$$

は複素線形写像である. よって, (9.32) は任意の $X \in \mathfrak{g}$, とくに $X \in Q$ に対して成立する.

逆に, 等式 (9.32) が $X \in Q$ についてなりたつとせよ. この両辺の複素共役をとることにより, (9.32) が $X \in \sigma(Q)$ についても正しいことがわかる. 仮定から, $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上 $Q \cup \sigma(Q)$ で生成されるので, (9.32) は任意の $X \in \mathfrak{g}$ について成立する. とくに, $X \in \mathfrak{g}_0$ として, 等式 (9.30) が得られる. □

次に，リー代数 $\mathfrak{g}_0$ の表現が与えられたとき，それをユニタリ表現とするような内積は (もし存在するなら) どのぐらいあるだろうか？ これを調べるため，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を線形空間 $\boldsymbol{V}$ 上の内積とする．$w \in \boldsymbol{V}$ に対して，

$$(\Phi(w))(v) := \langle v, w \rangle \quad (v \in \boldsymbol{V}) \tag{9.33}$$

は $\boldsymbol{V}$ 上の線形形式 $\Phi(w)$ を定め，

$$\Phi : \boldsymbol{V} \ni w \longmapsto \Phi(w) \in \boldsymbol{V}^* \tag{9.34}$$

は $\boldsymbol{V}$ からその双対空間 $\boldsymbol{V}^*$ への単射な歪線形写像を与える (単射であることは内積の正値性から従う)．

いま，$\{v_i \mid i \in I\}$ が $\boldsymbol{V}$ の基底であって，内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して互いに直交しているとき，**直交基底**とよぶが，写像 Φ の像は，

$$\mathrm{Im}\,\Phi = \{\varphi \in \boldsymbol{V}^* \mid \text{有限個の } i \text{ を除き } \varphi(v_i) = 0\} \tag{9.35}$$

と書き表されることに注意しておく．

問題 9.11. 等式 (9.35) を確かめよ．

次の命題はシュアの補題からの帰結である．

命題 9.15. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{g}_0$ の既約表現とする．$\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ はともに不変性の条件 (9.30) を満たす $\boldsymbol{V}$ 上の正定値内積であるとし，対応する歪線形写像 (9.34) をそれぞれ Φ_1,Φ_2 で表す．このとき，像 $\mathrm{Im}\,\Phi_1$ と $\mathrm{Im}\,\Phi_2$ が一致するならば，$\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ は正の定数倍を除き等しい．

証明. $A := \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$ とおく．仮定 $\mathrm{Im}\,\Phi_1 = \mathrm{Im}\,\Phi_2$，および，ふたつの歪線形写像の合成は $\mathbb{C}$-線形であることから，A は $\boldsymbol{V}$ 上の線形同型写像を定める．また，A の定義より，

$$\langle v, Aw \rangle_1 = \langle v, w \rangle_2 \quad (v, w \in \boldsymbol{V}) \tag{9.36}$$

である．この等式とユニタリ性の条件 (9.30) を用いて，

$$\begin{aligned}\langle v, A\pi(X)w \rangle_1 &= \langle v, \pi(X)w \rangle_2 = -\langle \pi(X)v, w \rangle_2 \\ &= -\langle \pi(X)v, Aw \rangle_1 = \langle v, \pi(X)Aw \rangle_1 \qquad (X \in \mathfrak{g}_0,\ v, w \in \boldsymbol{V})\end{aligned}$$

を得る．これから，A は表現 π の相関作用素であることがわかる．シュアの補題 (定理 9.7) によって，$A = \lambda I$ なる $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ が存在する．これを (9.36) に代入すると，$\lambda\langle v, w \rangle_1 = \langle v, w \rangle_2$ を得るが，内積の正値性より $\lambda > 0$ が従う． □

表現のユニタリ同値性について，次のことは基本的である．

命題 9.16. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現とし，$\boldsymbol{V}$ 上の $\mathfrak{g}_0$-不変内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．いま，$\boldsymbol{V}$ 上の $\mathfrak{g}_0$-不変な内積は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ のスカラー倍に限ると仮定する．このとき，$\mathfrak{g}_0$ の既約ユニタリ表現 $(\pi_1, \boldsymbol{V}_1)$ と $(\pi, \boldsymbol{V})$ が $\mathfrak{g}_0$ の表現として同値ならば，これらはユニタリ同値である．

証明. $A : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}$ を $\mathfrak{g}_0$-同型写像とする．$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ を $\boldsymbol{V}_1$ 上の $\mathfrak{g}_0$-不変な内積をとすると，$\langle v, w\rangle_1' := \langle A^{-1}v, A^{-1}w\rangle_1$ $(v, w \in \boldsymbol{V})$ は $\boldsymbol{V}$ 上の $\mathfrak{g}_0$-不変な内積を定める．仮定より，ある $\lambda > 0$ が存在して，$\langle v, w\rangle_1' = \lambda\langle v, w\rangle$ となる．これは，$\sqrt{\lambda}A$ が π_1 と π の間にユニタリ同値を与えることを意味する． □

$\boldsymbol{V}$ が有限次元のときには，(9.34) により定まる写像 Φ は常に $\boldsymbol{V}^*$ の上への写像である (実際，$\Phi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^*$ は $\mathbb{R}$ 上線形かつ単射な写像であり，実線形空間としても，$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{V}^*$ の次元は相等しい)．したがって，次のことがわかる．

系 9.17. 実リー代数 $\mathfrak{g}_0$ の有限次元既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ について，条件 (9.30) を満たす $\boldsymbol{V}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は，正の定数倍を除き一意的である．したがって，ふたつの有限次元既約ユニタリ表現が同値であるならば，それらはユニタリ同値である．

9.5.2 ユニタリ化可能なハリシュ-チャンドラ加群の決定

3次元複素単純リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}X_+ \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}X_-$ とその実型 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(1,1)$ について，$\mathfrak{g}_0$ に付随する既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{V}_\lambda$, $\boldsymbol{V}_\lambda^1$, $\boldsymbol{D}_p^+$, $\boldsymbol{D}_p^-$, $\boldsymbol{F}_p$ $(\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\ p = 1, 2, \ldots)$ たちのうち，ユニタリなものを決定しよう．これは，群 $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現を分類・決定することと等価になる．

そのために，$(\pi, \boldsymbol{V})$ を任意の既約ハリシュ-チャンドラ加群とする．命題 9.12 (ii) より，$\boldsymbol{V}$ は互いに相異なるウェイトに対応するウェイトベクトルからなる基底 $S = \{v_m \mid v_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}\}$ をもつ．

命題 9.18. 既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関してユニタリであるためには，

$$\langle v_m, v_{m'}\rangle = 0 \qquad (m \neq m'), \tag{9.37}$$

$$\langle \pi(X_+)v_m, v_{m+1}\rangle + \langle v_m, \pi(X_-)v_{m+1}\rangle = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}), \tag{9.38}$$

がなりたつことが必要十分条件である．さらに，π を $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現とするような内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は，存在するならば，正の定数倍を除き一意的である．

証明. σ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役作用素とする．$\sigma(X_+) = X_-$, $\sigma(H) = -H$ であるから，$\mathfrak{g}$ の部分集合 $Q := \{X_+, H\}$ は補題 9.14 の仮定を満たす．したがって，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ が $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現を与えるためには，ふたつの等式

$$\langle \pi(H)v_m, v_{m'}\rangle - \langle v_m, \pi(H)v_{m'}\rangle = 0,$$

$$\langle \pi(X_+)v_m, v_{m'}\rangle + \langle v_m, \pi(X_-)v_{m'}\rangle = 0,$$

が，すべての $m, m' \in \mathbb{Z}$ に対してなりたつことが必要十分条件となる．0 でない v_m たちのウェイトが互いに異なることに注意すると，1 番目の等式が (9.37) と同値であることがわかる．さらに，昇降演算子 $\pi(X_\pm)$ は v_m を $v_{m\pm1}$ のスカラー倍に移すことを考慮すれば，条件 (9.37) のもとで，2 番目の等式は (9.38) と同等であることもわかる．以上より，(9.37) および (9.38) が，$\mathfrak{g}_0$ の表現 π が $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関してユニタリであるための条件であることが示された．

また，等式 (9.35) より，ユニタリ内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に付随する歪線形写像 $\Phi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^*$ の像は，(内積の取り方によらない) 基底 S によってのみ決定されることがわかる．そこで，命題 9.15 により，後半の主張を得る． □

命題 9.18 をもとに，それぞれの既約ハリシュ-チャンドラ加群がユニタリかどうかを調べる．得られる結果を述べよう．

定理 9.19. 既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{V}_\lambda$, $\boldsymbol{V}^1_\lambda$, $\boldsymbol{D}^+_p$, $\boldsymbol{D}^-_p$, $\boldsymbol{F}_p$ ($\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, $p = 1, 2, \ldots$) のうちで，実型 $\mathfrak{g}_0$ に関してユニタリなものは次のとおりである．

$$\boldsymbol{V}_{(1/2)+\sqrt{-1}s} \ \ (s \in \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{V}_t \ \ (0 < t < 1), \tag{9.39}$$

$$\boldsymbol{V}^1_{\sqrt{-1}s} \ \ (s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}), \tag{9.40}$$

$$\boldsymbol{D}^+_p, \boldsymbol{D}^-_p \ \ (p = 1, 2, \ldots), \tag{9.41}$$

$$\boldsymbol{F}_1. \tag{9.42}$$

証明. まず，線形空間 $\boldsymbol{V}_\lambda = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}e_n$ 上に(9.4) により定まる既約な球主系列表現 π_λ ($\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$) を考える．命題 9.18 と表現作用素 $\pi_\lambda(X_\pm)$ の定義から，$\boldsymbol{V}_\lambda$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が $\mathfrak{g}_0$-不変であるためには，$c_n := \langle e_n, e_n\rangle > 0$ として，

$$\langle e_n, e_{n'}\rangle = 0 \ \ (n \neq n'), \qquad (\lambda + n)\, c_{n+1} = (n + 1 - \overline{\lambda})\, c_n, \tag{9.43}$$

が任意の整数 n, n' についてなりたつことが必要十分条件である．とくに，

$$\kappa_n(\lambda) := \frac{n + 1 - \overline{\lambda}}{\lambda + n} > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{9.44}$$

でなければならない．逆に，$\kappa_n(\lambda) > 0$ がすべての n についてなりたてば，$c_0 = 1$ から出発して，正数 c_n を (9.43) の第 2 式を満たすように，帰納的に定めることができる．このとき，

$$\left\langle \sum_n a_n e_n, \sum_n b_n e_n \right\rangle := \sum_n a_n \overline{b_n} c_n \quad (a_n, b_n \in \mathbb{C})$$

は，条件 (9.43) を満たす $\boldsymbol{V}_\lambda$ 上の内積を与える．したがって，$\mathfrak{g}_0$ の表現 π_λ がユニタリであるためには，λ が条件 (9.44) を満たすことが必要十分条件になる．

いま，$\lambda = t + \sqrt{-1}s$ $(s, t \in \mathbb{R})$ とするとき，

$$\begin{aligned}\kappa_n(\lambda) &= \frac{(n+1-\overline{\lambda})(n+\overline{\lambda})}{|\lambda+n|^2} \\ &= \frac{\{n(n+1)+(t-t^2)+s^2\}+2\sqrt{-1}s(t-1/2)}{(t+n)^2+s^2}\end{aligned}$$

であることから，(9.44) がなりたつのは，$\lambda = (1/2)+\sqrt{-1}s$ $(s \in \mathbb{R})$ または $\lambda = t$ $(0 < t < 1)$ の場合であることがわかる．したがって，既約球主系列 $\boldsymbol{V}_\lambda$ のうちでユニタリなものは，ちょうど (9.39) の表現たちである．

同様にして，既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{V}_\lambda^1$, $\boldsymbol{D}_p^\pm$, および $\boldsymbol{F}_p$ のユニタリ化可能性を調べて，それぞれ，ユニタリ表現 (9.40), (9.41) および (9.42) が得られる． □

表現のパラメータ λ のなす複素平面のなかの直線 $(1/2)+\sqrt{-1}\mathbb{R}$, $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ を，それぞれ，主系列表現 $\boldsymbol{V}_\lambda$, $\boldsymbol{V}_\lambda^1$ の**ユニタリ軸**という．このとき，それぞれ $(e_n)_n$, $(f_n)_n$ が表現空間の正規直交基底になるように $\mathfrak{g}_0$-不変な内積を定めることができる．実際，上の定理の証明で，$\lambda = (1/2)+\sqrt{-1}s$ のときには，つねに $\kappa_n(\lambda) = 1$ となっている．一方で，表現 $\boldsymbol{V}_t$ $(0 < t < 1)$ は，**補系列** (complementary series) のユニタリ表現とよばれる．

主系列表現 π_λ, π_λ^1 $(\lambda \in \mathbb{C})$ のうち，その既約部分表現がユニタリとなるような λ の集合を，それぞれ，2枚の λ-平面 (複素平面) 上に図示しておこう (図 9.3)．例えば，左側の複素平面の原点は自明表現 $\boldsymbol{F}_1$ に対応し，右側の平面の原点は，ユニタリ化可能な無限次元既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{D}_1^+$ および $\boldsymbol{D}_1^-$ に対応している．なお，$\boldsymbol{D}_1^+$ と $\boldsymbol{D}_1^-$ は，**離散系列の極限** (limit of discrete series) とよばれる群 $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現を定める．

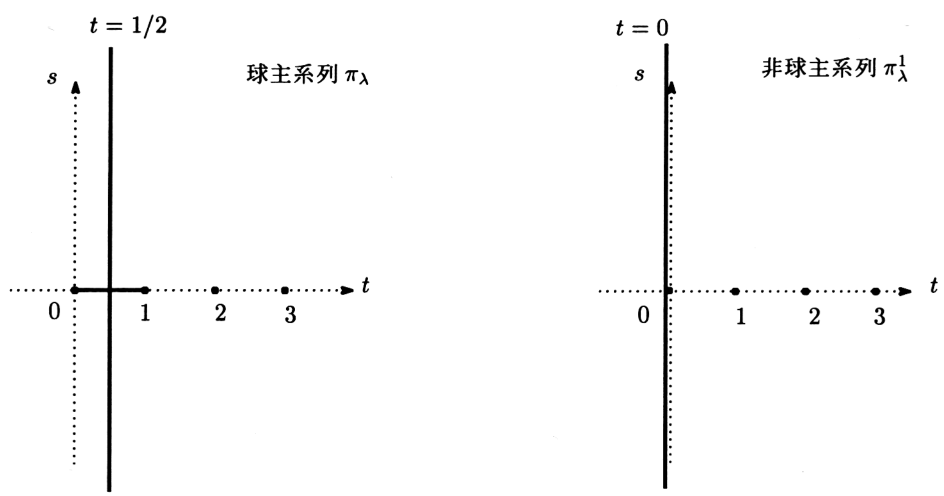


図 9.3. $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約ユニタリ表現

注意 9.9. 群 $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現の構成と分類理論は，例えば [46, Chapter VI] で詳しく扱われている．

有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{F}_p$ のなかで実型 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(1,1)$ に関してユニタリとなるのは，1 次元の自明な表現のみである．したがって，$\mathfrak{su}(1,1)$ のユニタリ表現論では，必然的に無限次元表現を扱う必要がある．一方，コンパクト実型 $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{su}(2)$ (例 8.1) を考えれば，次のことがわかる．

命題 9.20. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の任意の有限次元既約表現 $\boldsymbol{F}_p$ は，$\mathfrak{su}(2)$ の作用についてユニタリ化可能である．

この命題は，定理 9.19 と全く同様の方法で証明することができる (定理 4.16 参照)．あるいは，$\boldsymbol{F}_p$ がコンパクトな 2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の表現に対応していることを使えば，$SU(2)$ 上の不変測度を用いた，より見通しのよい証明が可能である．

問題 9.12. (i) 上の命題を証明せよ．
(ii) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の実型 $\mathfrak{su}(1,1)$ に関してユニタリな無限次元の既約ハリシュ-チャンドラ加群 (9.39), (9.40) および (9.41) は，コンパクト実型 $\mathfrak{su}(2)$ に関してはユニタリではないことを示せ．

◆トピックス 6 (半単純リー群の表現論 (小史)). ………………………………………………

本章では,「リー代数の表現論―事始(ことはじ)め」と題して，群 $SU(1,1)$ に付随する $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約 (ユニタリ) ハリシュ-チャンドラ加群を，とりわけ詳しく扱った．これは，$SU(1,1) \cong SL(2,\mathbb{R})$ がヒルベルト空間に働く，既約許容 (ユニタリ) 表現の分類・構成理論を，ハリシュ-チャンドラ流のリー代数の表現論の枠組みに翻訳して，学部学生諸君も理解できるように，初等的に解説したものである．$SL(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の分類は，バーグマン (V. Bargmann) により成し遂げられたが (1947)，歴史的にみても，同年にゲルファント-ナイマルク (I. N. Gelfand and M.I. Naimark) が発表した $SL(2,\mathbb{C})$ の既約ユニタリ表現の分類結果とともに，半単純リー群およびリー代数の無限次元表現論の「事始め」にふさわしい画期的な研究成果であった．この近辺の歴史については，例えば [15, 第 23 章] により詳しい解説がある．また，$SL(2,\mathbb{R})$ の無限次元ユニタリ表現論と調和解析を扱った専門書も何冊か出版されている ([21], [46] など)．

その後，[13], [14] における $SO(n,1)$ および $SU(n,1)$ の既約許容 (ユニタリ) 表現の分類にヒントを得たラングランズ (R. P. Langlands [30]) は，実半単純群の既約許容表現の分類問題を，既約緩増大(かんぞうだい)表現の分類に帰着することに成功した (1973)．さらにしばらくして，ナップ-ツッカーマン (A. W. Knapp and G. Zuckerman [26]) により既約緩増大表現の分類問題が離散系列表現のそれに還元され (1982)，後者は巨匠(きょしょう)ハリシュ-チャンドラによりすでに解決されていた (1965 年ごろ, [11])．このようにして，半単純リー群の既約許容表現の分類が完了する．この他に，複素旗多様体上の幾何と $\mathcal{D}$-加群の理論を用いたベイリンソン-ベルンシュタイン (A. Beilinson and J. Bernstein [2]) 分類法，および，極小コンパクト部分群の表現としての極小成分に着目したヴォーガン (D. A. Vogan, Jr. [52]) による分類理論なども知られている．なお，既約許容表現のうちどれがユニタリ化可能であるかを決定するという既約ユニタリ表現の分類問題については，多くの成果が蓄積されているが，未だ完全な解決には至っていない．

さて，表現の分類と同様，既約ユニタリ表現の幾何学的な実現も重要な研究テーマである．例えば，$SU(1,1)$ の離散系列表現 $\boldsymbol{D}_p^{\pm}(p \geq 2)$ は，複素上半平面上の (反) 正則関数のなすヒルベルト空間に実現され，保型形式の理論と深く関連する (第 6 章)．半単純リー群の正則とは限らない離散系列の

構成について，ドゥ・ジッター (de Sitter) 群 $O_+(4,1)$ に対する高橋礼司の創始的研究 [47](1963) を皮切りに，1970 年前後に，岡本清郷，堀田良之といった日本人研究者が重要な貢献をしている ([16], [35] など)．また，表現論を展開するためには，各種のリー群の軌道構造に関する情報が欠かせない．この方面で，旗多様体上の群軌道に対する松木敏彦の研究 [32](1979) や冪零軌道のケーリー型変換に関する関口次郎の結果 [45](コスタント - 関口対応; 1987) は重要であり，現在，リー群の表現論で活発に応用されている ([44], [9] など)．

もっとも，表現論という研究分野を広く見渡すとき，上で垣間見た半単純リー群の無限次元表現の研究は，極めて重要ではあるが，ごく一部分を占めるにすぎない．この分野での主要な成果に限っても，上記は全く網羅的とはいえない．さらに，半単純群を定義する基礎体を p 進体や有限体に変えれば，そこにはまた別の表現論の世界 (もちろん共通部分も重要である) が広がっている．また，半単純の世界にとどまらず，冪零，可解群の表現に目を向けることも効果的である．例えば，第 10，11 章で論じるように，冪零群 (リー代数) と単純群 (リー代数) という異種が交差するところに，表現の新天地が見出されるのである．

近年，数理物理学と密接に関連して，量子群，(スーパー) カッツ - ムーディ代数などの無限次元代数系の表現論の進展が目覚しい．

また，ADE 型の単純リー代数は単純特異点の解消と深く関係しており (マッカイ対応)，表現論と代数幾何学を結びつけている．他にも，保型形式，不変式論，組合せ論，代数解析，調和解析など，さまざまな分野との相互刺激を繰り返しながらアメーバのごとく広がり，発展を続ける．これが表現論の真の姿なのかもしれない．

第10章 ハイゼンベルグ代数のフォック表現とその拡張

前章では，最も基本的な複素単純リー代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ とその実型 $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約表現を詳しく調べたが，今度は視点を転じて，非可換な冪零リー代数の代表としてハイゼンベルグ代数を取り上げ，その無限次元既約表現を考察することから始めたい．すなわち，(V,B) を $\mathbb{R}$ 上のシンプレクティック線形空間とし，V のシンプレクティック基底 $p_1,\ldots,p_n,\ q_1,\ldots,q_n$ を固定する．V が定める実ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}(V)=V\oplus\mathbb{R}e$ を $\mathfrak{n}_0$ で表し，$\mathfrak{n}_0$ の複素化を $\mathfrak{n}=V_{\mathbb{C}}\oplus\mathbb{C}e$ と書くことにする．ここに $V_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ は実線形空間 V の複素化である．

この章では，第一に，リー代数 $\mathfrak{n}_0$ の認容（にんよう）的な既約ユニタリ表現を分類・構成する．認容的表現とは，付随するハミルトン作用素が対角化可能の変換として作用するものであるが，このような既約ユニタリ表現のうち無限次元のものは，その中心値 $\lambda=\sqrt{-1}s$ $(s\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ を定めるごとにユニタリ同値を除きただひとつ存在することになる (定理 10.5)．この既約ユニタリ表現は，n 変数多項式の空間 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ 上へのフォック表現により実現できることがわかる (命題 10.6)．さらに，フォック表現が，$\mathfrak{n}_0$ に対応するハイゼンベルグ群 $N(V)$ の既約ユニタリ表現とどのように結びつくかも明らかにしよう (10.2.2 節)．

第二に，$\mathfrak{n}_0$ のフォック表現を，実シンプレクティックリー代数 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ による $\mathfrak{n}_0$ の拡大 $\tilde{\mathfrak{n}}_0=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})\ltimes\mathfrak{n}_0$ のユニタリ表現に拡張する (定理 10.17)．このようにして，ヴェイユ表現とよばれる $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ の無限次元ユニタリ表現が得られる．詳しくは次章で論じるが，ヴェイユ表現は，AIII, CI, DIII 型のエルミート型実単純リー代数の最低ウェイトをもつ既約ユニタリ表現の構成と分類に本質的な働きをする．つまり，ハイゼンベルグ代数という冪零リー代数の表現が，面白いことに，単純リー代数の表現論にも役立つ．これまで着々と進めてきたリー代数の構造や表現に関する準備を耐え抜いた読者は，この部分の面白さを十分に堪能されることであろう．

10.1 ハミルトン作用素と認容的表現

10.1.1 表現の認容性

ハイゼンベルグ代数の表現論では，既約表現の中心値とともに，ハミルトン作用素とよばれる 2 階の作用素が重要な働きをする．その説明から始めよう．リー代数 $\mathfrak{n}$ の表現に付随したハミルトン作用素，および，表現の認容性を，次のように定義する．

定義 10.1. (i) $\mathfrak{n}$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ に対して，$\boldsymbol{V}$ 上の 1 次変換

$$H_\pi := -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\pi(p_k)^2 + \pi(q_k)^2) \tag{10.1}$$

を π に付随した**ハミルトン作用素**という．

(ii) 1 次変換 H_π が $\boldsymbol{V}$ 上対角化可能であるとき，表現 π を**認容的**であるという．

注意 10.1. 表現 π の認容性はシンプレクティック基底 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ の取り方に依存する．

さて，$a_i^{\pm} \in V_{\mathbb{C}}\,(\subset \mathfrak{n})$ $(i = 1, \ldots, n)$ を

$$a_i^+ := \frac{-\sqrt{-1}p_i + q_i}{\sqrt{2}}, \quad a_i^- := \frac{\sqrt{-1}p_i + q_i}{\sqrt{2}}, \tag{10.2}$$

により定める．このとき，$a_1^+, \ldots, a_n^+, a_1^-, \ldots, a_n^-, \boldsymbol{e}$ は複素線形空間 $\mathfrak{n}$ の基底であって，交換関係

$$[a_i^+, a_j^+] = [a_i^-, a_j^-] = 0, \quad [a_i^+, a_j^-] = -\sqrt{-1}\delta_{ij}\boldsymbol{e}, \quad [a_i^{\pm}, \boldsymbol{e}] = 0, \tag{10.3}$$

を満たす．

次の補題は交換関係 (10.3) から容易に導かれる．

補題 10.1. (i) ハミルトン作用素 H_π は，

$$H_\pi = -\left(\sum_{k=1}^{n}\pi(a_k^{\pm})\pi(a_k^{\mp})\right) \mp \frac{n\sqrt{-1}}{2}\pi(\boldsymbol{e}) \quad (\text{複号同順}) \tag{10.4}$$

と表される．

(ii) H_π と表現作用素 $\pi(a_i^+), \pi(a_i^-), \pi(\boldsymbol{e})$ の間には次の交換関係がある：

$$[H_\pi, \pi(a_i^{\pm})] = \mp\sqrt{-1}\pi(\boldsymbol{e})\pi(a_i^{\pm}), \quad [H_\pi, \pi(\boldsymbol{e})] = 0. \tag{10.5}$$

既約表現がいつ認容的となるかについては，次のことが基本的である．

命題 10.2. 中心値を $\lambda \in \mathbb{C}$ とする $\mathfrak{n}$ の既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ (定理 9.10 参照) に対して，次の 3 条件 (a), (b), (c) は互いに同値である．

(a) 表現 π は認容的である．

(b) ハミルトン作用素 H_π はある固有値 $\mu_0 \in \mathbb{C}$ をもつ．

(c) $H_\pi \boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{W}$ となる ($\boldsymbol{V}$ の) 有限次元部分空間 $\boldsymbol{W}$ が存在する．

このとき，H_π の固有値 μ に対応する固有空間を $\boldsymbol{V}(\mu)$ とすれば，H_π による $\boldsymbol{V}$ の固有空間分解は，(b) の μ_0 を用いて，

$$\boldsymbol{V} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{V}(\mu_0 + \sqrt{-1}m\lambda) \tag{10.6}$$

と表される．さらに，表現作用素 $\pi(a_i^{\pm})$ の固有空間 $\boldsymbol{V}(\mu)$ への作用は

$$\pi(a_i^{\pm})\boldsymbol{V}(\mu) \subset \boldsymbol{V}(\mu \mp \sqrt{-1}\lambda) \tag{10.7}$$

を満たす．

証明. (a) ⇒ (b) ⇒ (c) は明らかである．そこで (c) を仮定して，表現 π が認容的であることを示す．有限次元線形空間 $\boldsymbol{W}$ は H_π-不変であるから，H_π の $\boldsymbol{W}$ への制限はある固有値 μ_0 をもつ (有限次元複素線形空間上の 1 次変換は必ず固有値をもつことを用いている)．ゆえに (b) がなりたつ．いま，$v \in \boldsymbol{V}$ が $H_\pi v = \mu v$ $(\mu \in \mathbb{C})$ を満たすとき，(10.5) の第 1 式より，

$$H_\pi(\pi(a_i^{\pm})v) = (\mu \mp \sqrt{-1}\lambda)\, \pi(a_i^{\pm})v \tag{10.8}$$

が得られる．したがって，(10.7) が得られ，$\boldsymbol{U} := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{V}(\mu_0 + \sqrt{-1}m\lambda)$ は，$\boldsymbol{V}$ の零でない $\mathfrak{n}$-部分加群をなすことがわかる．表現 π の既約性より $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$，すなわち (10.6) が従う．よって，表現 π は認容的であり，H_π の固有値は $\mu_0 + \sqrt{-1}m\lambda$ の形に限る． □

なお，定理 9.10 より，中心値 $\lambda = 0$ の既約表現は 1 次元であるから，当然認容的である．この表現は，V 上の線形形式 ϕ から (9.14) で定まる簡単な形をしている．以下では，零でない中心値をもつ無限次元の既約表現を扱うことにする．

10.1.2 認容的な既約ユニタリ表現の分類

実型 $\mathfrak{n}_0$ に関してユニタリであるような，$\mathfrak{n}$ の認容的 (無限次元) 既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ の構造を調べよう．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\boldsymbol{V}$ 上の $\mathfrak{n}_0$-不変内積とする．$\pi(\boldsymbol{e}) = \lambda I$ は $\boldsymbol{V}$ 上の歪エルミート変換であるから，π の中心値 λ は純虚数

$$\lambda = \sqrt{-1}s \quad (s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}) \tag{10.9}$$

である．さらに，$\pi(p_k), \pi(q_k)$ の歪エルミート性 $\pi(p_k)^* = -\pi(p_k), \pi(q_k)^* = -\pi(q_k)$ から，

$$\langle H_\pi v, v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\langle\pi(p_k)v, \pi(p_k)v\rangle + \langle\pi(q_k)v, \pi(q_k)v\rangle) \geq 0 \quad (v \in \boldsymbol{V})$$

がわかる．よって，ハミルトン作用素 H_π は $\boldsymbol{V}$ 上の非負値のエルミート変換となる．とくに，H_π の固有値はみな非負の実数であり，対応する固有空間たちは，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して互いに直交する．さらに，$\boldsymbol{V}$ の固有空間分解 (10.6) を考慮すれば，H_π には最小の固有値が存在することがわかる．その値を ρ_0 で表す．

補題 10.3. ハミルトン作用素の最小固有値は $\rho_0 = n|s|/2$ で与えられる．

証明. v_0 を固有値 ρ_0 に対応する H_π の固有ベクトルとする．(10.7) より，$\pi(a_i^\pm)$ は固有空間 $\boldsymbol{V}(\rho_0)$ を $\boldsymbol{V}(\rho_0 \pm s)$ に移す．ρ_0 の最小性より，$s > 0$ ならば $\pi(a_i^-)v_0 = 0$, 一方 $s < 0$ ならば $\pi(a_i^+)v_0 = 0$ となる．これと (10.4) から，$\rho_0 = n|s|/2$ を得る．□

上の考察をもとに，既約ユニタリ表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ をより明示的に書き下そう．そのため，非負整数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のなす多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して，$\boldsymbol{V}$ 上の作用素 $\pi(a^\pm)^\alpha$ を,

$$\pi(a^\pm)^\alpha := \pi(a_1^\pm)^{\alpha_1} \cdots \pi(a_n^\pm)^{\alpha_n} \quad (\text{複号同順})$$

により定める．$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ を α の長さとする．

定理 10.4. $(\pi, \boldsymbol{V})$ を実ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の認容的な無限次元既約ユニタリ表現とし，その中心値を $\lambda = \sqrt{-1}s$ ($s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$) とする．このとき,

(i) π に付随したハミルトン作用素 H_π による $\boldsymbol{V}$ の固有空間分解は,

$$\boldsymbol{V} = \bigoplus_{m=0,1,\ldots} \boldsymbol{V}(\rho_0 + m|s|), \quad \rho_0 = \frac{n|s|}{2}, \tag{10.10}$$

により与えられる．また，固有空間 $\boldsymbol{V}(\rho_0 + m|s|)$ たちは，$\boldsymbol{V}$ 上の $\mathfrak{n}_0$-不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して互いに直交する．

(ii) 単位ベクトル $v_0 \in \boldsymbol{V}(\rho_0)$ を固定する．多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して，$v_\alpha \in \boldsymbol{V}$ を

$$v_\alpha := \begin{cases} (|s|^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}\pi(a^+)^\alpha v_0 & (s > 0 \text{ のとき}) \\ (|s|^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}\pi(a^-)^\alpha v_0 & (s < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．ここに，$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ である．このとき，$a_i^\pm \in \mathfrak{n}$ の $v_\alpha \in \boldsymbol{V}$ への作用は，$s > 0$ のときは,

$$\pi(a_i^+)v_\alpha = (s(\alpha_i + 1))^{1/2}\, v_{\alpha+\delta(i)}, \quad \pi(a_i^-)v_\alpha = -(s\alpha_i)^{1/2}\, v_{\alpha-\delta(i)}, \tag{10.11}$$

により与えられる．一方 $s < 0$ のときは,

$$\pi(a_i^-)v_\alpha = (|s|(\alpha_i + 1))^{1/2} v_{\alpha+\delta(i)}, \quad \pi(a_i^+)v_\alpha = -(|s|\alpha_i)^{1/2} v_{\alpha-\delta(i)}, \tag{10.12}$$

となる．ただし，$\delta(i)$ は，第 i 成分のみが 1，他の成分は 0 である多重指数である．

(iii) 任意の整数 $m \geq 0$ に対して,

$$S(m) := \{v_\alpha \mid |\alpha| = m\} \quad (S(0) := \{v_0\}) \tag{10.13}$$

は，固有空間 $\boldsymbol{V}(\rho_0 + m|s|)$ の正規直交基底をなす．とくに，固有空間 $\boldsymbol{V}(\rho_0)$ は 1 次元である．

証明. (i) は，固有空間分解 (10.6)，補題 10.3，および，H_π がエルミート変換であることから従う．以下，(ii) と (iii) を証明するが，ここでは $s>0$ の場合を扱う ($s<0$ の場合も，適当に符号 $\pm$ を置き換えれば，以下の証明はそのまま通用する：注意 10.2 参照).

(ii) (10.11) の第 1 の等式は，v_α の定義から直ちにわかる．一方，ρ_0 が H_π の最小の固有値であることから，$\pi(a_i^-)v_0 \in \boldsymbol{V}(\rho_0 - s) = \{0\}$，よって $\pi(a_i^-)v_0 = 0$ がわかる．これと

$$[\pi(a_i^-), \pi(a^+)^\alpha] = -s\alpha_i \pi(a^+)^{\alpha-\delta(i)}$$

を用いて，(10.11) の第 2 の等式を得る:

$$\begin{aligned}\pi(a_i^-)v_\alpha &= (s^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}[\pi(a_i^-), \pi(a^+)^\alpha]v_0 \\ &= -s\alpha_i(s\alpha_i)^{-1/2} \times (s^{|\alpha-\delta(i)|}(\alpha-\delta(i))!)^{-1/2}\pi(a^+)^{\alpha-\delta(i)}v_0 \\ &= -(s\alpha_i)^{1/2}\, v_{\alpha-\delta(i)}.\end{aligned}$$

(iii) ふたつの多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対して，対応するベクトル v_α, v_β の内積は，

$$\begin{aligned}\langle v_\alpha, v_\beta\rangle &= (s^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}\langle \pi(a^+)^\alpha v_0, v_\beta\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}(s^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}\langle v_0, \pi(a^-)^\alpha v_\beta\rangle\end{aligned} \tag{10.14}$$

と計算できる．2 番目の等式には，$(\pi(a^+)^\alpha)^* = (-1)^{|\alpha|}\pi(a^-)^\alpha$ を用いた．

$\alpha = \beta$ のとき，(10.11) の第 2 の等式より，

$$\pi(a^-)^\alpha v_\alpha = (-1)^{|\alpha|}(s^{|\alpha|}\alpha!)^{1/2}v_0$$

となって，$\langle v_\alpha, v_\alpha\rangle = 1$ を得る．一方，$\alpha \neq \beta$ のとき，ある番号 i があって，$\alpha_i > \beta_i$ と仮定して一般性を失わない．このとき，再び (10.11) より，$\pi(a_i^-)^{\alpha_i}v_\beta = 0$．これより $\pi(a^-)^\alpha v_\beta = 0$ が従い，直交関係 $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = 0$ を得る．

以上より，v_α たちは $\boldsymbol{V}$ におけるベクトルの正規直交系をなすことがわかった．さらに，$|\alpha| = m$ ならば $v_\alpha \in \boldsymbol{V}(\rho_0 + ms)$ である．

最後に，$S(m)$ を基底とする $\boldsymbol{V}(\rho_0 + ms)$ の部分空間を $\boldsymbol{V}_1(m)$ とし，

$$\boldsymbol{W} := \bigoplus_{m=0,1,\dots} \boldsymbol{V}_1(m)$$

とおく．(10.11) より，$\boldsymbol{W} \neq \{0\}$ は $\mathfrak{n}$-不変である．表現 π の既約性から，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$, すなわち，$\boldsymbol{V}(\rho_0 + ms) = \boldsymbol{V}_1(m)$ $(m = 0, 1, \dots)$，がわかる．よって，$S(m)$ は $\boldsymbol{V}(\rho_0 + ms)$ の正規直交基底をなす. □

逆に，零でない実数 s が与えられたとき，多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ をパラメータとするベクトルたち $(v_\alpha)_\alpha$ を正規直交基底にもつ内積線形空間

$$\boldsymbol{V} = \bigoplus_\alpha \mathbb{C}v_\alpha, \quad \langle v_\alpha, v_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$$

を考える．$\boldsymbol{V}$ 上の1次変換 $\pi(a_i^\pm)$ $(i = 1, \ldots, n)$ を (10.11), (10.12) によって定め，さらに $\pi(e) = \sqrt{-1}sI$ とおく．このとき，「$(\pi, \boldsymbol{V})$ がハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の認容的な既約ユニタリ表現を与えること」を確かめるのはやさしい．

問題 10.1. 上の $(\pi, \boldsymbol{V})$ がハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の認容的な既約ユニタリ表現を与えることを示せ．

結局，次の結論が得られたことになる．

定理 10.5. 任意の $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対して，$\sqrt{-1}s$ を中心値にもつ，$\mathfrak{n}_0$ の認容的な既約ユニタリ表現が，ユニタリ同値を除きただひとつ存在する．

なお，$\mathfrak{n}_0$ をリー代数とするハイゼンベルグ群 $N = N(V)$ (7.3.4 節参照) の既約ユニタリ表現についても類似の結果が知られているが，これは次節 10.2.2 で述べる (定理 10.12 (ii))．また，そこでは，群 N の無限次元既約ユニタリ表現をフォック空間上に構成する．

注意 10.2. $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の自己同型 b_s を，

$$\begin{cases} b_s(p_i) := |s|^{1/2}p_i, \ b_s(q_i) := (\operatorname{sgn} s)|s|^{1/2}q_i \quad (i = 1, \ldots, n), \\ b_s(e) := se, \end{cases} \tag{10.15}$$

により定めることができる．ここに $\operatorname{sgn} s$ は実数 s の符号である．したがって，$(\pi, \boldsymbol{V})$ が $\sqrt{-1}$ を中心値にもつ既約ユニタリ表現であるとき，$\pi_s := \pi \circ b_s$ は中心値 $\sqrt{-1}s$ をもつ $\mathfrak{n}_0$ の既約ユニタリ表現を与える．このとき，$a_i^\pm = (\mp\sqrt{-1}p_i + q_i)/\sqrt{2}$ の表現作用素は次のようになる：

$$\pi_s(a_i^\pm) = (\operatorname{sgn} s)|s|^{1/2}\,\pi(a_i^{\pm(\operatorname{sgn} s)}). \tag{10.16}$$

π_s の定義より，表現のハミルトン作用素について $H_{\pi_s} = |s|H_\pi$ がなりたつので，π_s と π の認容性は互いに同値な条件となる．

問題 10.2. 9.2.1 節 (9.2) により定まる $\mathfrak{n}$ の表現 $(\pi, \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n])$ は，シンプレクティック基底 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ に関して認容的ではない．これを示せ．

10.2 フォック表現

10.2.1 ハイゼンベルグ代数のフォック表現

前節で述べた定理 10.4 は，実ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の認容的な無限次元既約ユニタリ表現の構造を規定している．この節では，そのようなユニタリ表現を n 変数多項式の空間 $\boldsymbol{P} := \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 上に実現しよう．

注意 10.2 にかんがみ，$s>0$ の場合を考える．9.2.1 節で述べたように，中心値 $\lambda=\sqrt{-1}s$ をもつ $\mathfrak{n}$ の既約表現 $(\varpi_s,\boldsymbol{P})$ が，

$$\begin{aligned}\varpi_s(p_i)&=\sqrt{-1}s^{1/2}\left(\frac{\partial_i+z_i}{\sqrt{2}}\right),\\ \varpi_s(q_i)&=s^{1/2}\left(\frac{-\partial_i+z_i}{\sqrt{2}}\right),\\ \varpi_s(\boldsymbol{e})&=\sqrt{-1}s\mathbf{1},\end{aligned}\tag{10.17}$$

により定まる ((9.3) で $a_i=\sqrt{-1}s^{1/2}$, $b_i=s^{1/2}$ とせよ)．(10.2) と (10.4) を用いて，表現作用素 $\varpi_s(a_i^{\pm})$ およびハミルトン作用素 H_{ϖ_s} を計算すると，それぞれ，

$$\varpi_s(a_i^+)=s^{1/2}z_i,\qquad \varpi_s(a_i^-)=-s^{1/2}\partial_i,\tag{10.18}$$

$$H_{\varpi_s}=s\left(\mathrm{E}+\frac{n}{2}\mathbf{1}\right)\quad \text{ただし}\quad \mathrm{E}:=\sum_{k=1}^{n}z_k\partial_k,\tag{10.19}$$

が得られる．単項式 $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ について，

$$\mathrm{E}\,z^\alpha=|\alpha|\,z^\alpha$$

(E を**オイラー作用素**あるいは**次数作用素**という) であることから，H_{ϖ_s} は $\boldsymbol{P}$ 上対角化可能な 1 次変換であり，固有空間分解

$$\boldsymbol{P}=\bigoplus_{m=0,1,\ldots}\boldsymbol{P}(\rho_0+ms),\quad \rho_0=\frac{ns}{2},$$

をもつ．ここに，固有空間 $\boldsymbol{P}(\rho_0+ms)$ は，m 次斉次多項式全体のなす部分空間 $\boldsymbol{P}_m:=\bigoplus_{|\alpha|=m}\mathbb{C}z^\alpha$ に他ならない．とくに，表現 ϖ_s は認容的である．

次に，ϖ_s にユニタリ表現の構造を定めよう．そのために，$f,g\in\boldsymbol{P}$ に対して，

$$\langle f,g\rangle:=(f(\partial)\overline{g})(0)\tag{10.20}$$

とおく．ここで，右辺の意味は次のとおり：$f(z)=\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $g(z)=\sum_\alpha d_\alpha z^\alpha$ $(c_\alpha,d_\alpha\in\mathbb{C})$ とするとき，変数 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を微分 $\partial=(\partial_1,\ldots,\partial_n)$ で置き換えて得られる定数係数の微分作用素を $f(\partial):=\sum_\alpha c_\alpha\partial^\alpha$ とする (ここに，$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$)．一方，$\overline{g}\in\boldsymbol{P}$ は，g の係数 d_α をその複素共役 $\overline{d_\alpha}$ で置き換えたものである: $\overline{g}(z):=\sum_\alpha\overline{d_\alpha}\,z^\alpha$.

このとき，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\boldsymbol{P}$ 上の正定値エルミート内積を定める (検証せよ)．また，

$$\langle z_if,\,g\rangle=((\partial_if(\partial))\overline{g})(0)=(f(\partial)(\overline{\partial_ig}))(0)=\langle f,\,\partial_ig\rangle,\tag{10.21}$$

すなわち，$z_i^*=\partial_i$ であることから，$\varpi_s(a_i^+)^*=-\varpi_s(a_i^-)$ が従う．ここに A^* は $\boldsymbol{P}$ 上の 1 次変換 A の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する共役作用素である．$\varpi_s(\boldsymbol{e})^*=-\sqrt{-1}s\mathbf{1}=-\varpi_s(\boldsymbol{e})$ とあわせて，ϖ_s が実型 $\mathfrak{n}_0$ の表現としてユニタリであることがわかる (補題 9.14 参照, $\sigma(a_i^+)=a_i^-$ に注意)．

以上の議論をまとめて，次の命題が得られる．

命題 10.6. 表現 $(\varpi_s, \boldsymbol{P})$ $(s > 0)$ は実ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の認容的な既約ユニタリ表現であり，中心値 $\sqrt{-1}s$ をもつ．

既約ユニタリ表現 $(\varpi_s, \boldsymbol{P})$ をハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の**フォック表現**とよぶ．

なお，多重指数 α に対して，

$$v_\alpha := \frac{z^\alpha}{(\alpha!)^{1/2}}$$

とおくと，$(v_\alpha)_\alpha$ は $\boldsymbol{P}$ の正規直交基底をなし，表現作用素 $\varpi_s(a_i^\pm)$ の v_α への作用は，(10.11) と一致している．

10.2.2　ハイゼンベルグ群のフォック表現

こんどは対応する群の表現について論じよう．$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}(V)$ をリー代数にもつ実ハイゼンベルグ群

$$N := N(V) = \{\exp(v + t\boldsymbol{e}) \mid v \in V,\ t \in \mathbb{R}\} \quad \text{(7.3.4 節参照)}$$

を考える．本節では，$\mathfrak{n}_0$ のフォック表現 $(\varpi_s, \boldsymbol{P})$ $(s > 0)$ が群 N の既約ユニタリ表現ときれいに対応しているさまを詳しくみてみよう．話の流れを明らかにするために，4 ステップに分けて議論を進める．

第1段: C^∞-誘導表現 $\mathrm{Ind}_Z^N(\chi_s)$ とその実現

零でない実数 s に対して，N の中心 $Z := \{\exp t\boldsymbol{e} \mid t \in \mathbb{R}\}$ の 1 次元ユニタリ表現 (ユニタリ指標) χ_s を，

$$\chi_s(\exp t\boldsymbol{e}) := \exp \sqrt{-1}st$$

により定める．N 上の複素数値 C^∞ 関数全体のなす線形空間を $C^\infty(N)$ と書く．ただし，N 上の関数 $f(\exp(v + t\boldsymbol{e}))$ が C^∞ であるとは，f が $(v, t) \in V \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2n+1}$ の関数として C^∞ であるときをいう．

Z は N の中心であるから，χ_s が定める $C^\infty(N)$ の部分空間

$$C^\infty_{\chi_s}(N) := \{f \in C^\infty(N) \mid f(gh) = \chi_s(h)^{-1} f(g),\ (g, h) \in N \times Z\} \tag{10.22}$$

には，群 N が右移動 R と左移動 L により，それぞれ線形に作用する．すなわち，$f \in C^\infty_{\chi_s}(N)$，$g_0 \in N$ に対して，

$$(L_{g_0} f)(g) := f(g_0^{-1} g), \quad (R_{g_0} f)(g) := f(g g_0), \tag{10.23}$$

とおくと，$R : N \ni g_0 \mapsto R_{g_0}$ および $L : g_0 \mapsto L_{g_0}$ は群 N の $C^\infty_{\chi_s}(N)$ 上の線形表現を与える．明らかに，表現 L と R は互いに可換である：

$$L_{g_0} R_{g_0'} = R_{g_0'} L_{g_0} \quad (g_0, g_0' \in N).$$

とくに左からの作用 L に着目して得られる表現 $(L, C^\infty_{\chi_s}(N))$ を，Z の指標 χ_s から C^∞ **に誘導された** N **の表現** (C^∞ **誘導表現**) とよび，記号 $\mathrm{Ind}_Z^N(\chi_s)$ で表す．一般に，表現の誘導は，問題とする群の表現をその部分群の表現から構成する手続きを与え，既約表現の構成や分類に大変役に立つ (5.7 節参照).

問題 10.3. N の表現 R は Z の指標 χ_{-s} から C^∞ に誘導された N の表現 $\mathrm{Ind}_Z^N(\chi_{-s})$ と同型になる．これを示せ．

さて，関数 $f \in C^\infty_{\chi_s}(N)$ は

$$f(\exp(v + t\boldsymbol{e})) = \chi_s(\exp t\boldsymbol{e})^{-1} f(\exp v) = \exp(-\sqrt{-1}st) \cdot f(\exp v)$$

を満たすので，f は N の部分集合 $\exp V$ 上の値によって一意に定まる．これから，

$$(Af)(v) := f(\exp v) \quad (v \in V)$$

により定まる対応 $f \mapsto Af$ は，$C^\infty_{\chi_s}(N)$ から V 上の C^∞ 関数全体のなす空間 $C^\infty(V)$ への線形同型を与えることがわかる．この A を用いて，

$$L'_{g_0} := A \circ L_{g_0} \circ A^{-1}, \quad R'_{g_0} := A \circ R_{g_0} \circ A^{-1}, \tag{10.24}$$

と定めると，L, R と同値な N の表現 L', R' が $C^\infty(V)$ 上に得られる．

表現作用素 L'_{g_0}, R'_{g_0} を書き下すと次のようになる．

補題 10.7. N の要素 $g_0 = \exp(v_0 + t_0\boldsymbol{e})$ ($v_0 \in V$, $t_0 \in \mathbb{R}$) と関数 $\varphi(v) \in C^\infty(V)$ に対して，等式

$$(L'_{g_0}\varphi)(v) = \exp\{\sqrt{-1}s(t_0 + (B(v_0, v)/2))\} \cdot \varphi(v - v_0), \tag{10.25}$$

$$(R'_{g_0}\varphi)(v) = \exp\{-\sqrt{-1}s(t_0 + (B(v, v_0)/2))\} \cdot \varphi(v + v_0), \tag{10.26}$$

がなりたつ．とくに，中心の元 $h \in Z$ は，

$$L'_h = \chi_s(h)I, \quad R'_h = \chi_s(h)^{-1}I \quad (I \text{ は } C^\infty(V) \text{ 上の恒等変換})$$

と，スカラー変換として作用する．

証明. L'_{g_0} の定義式 (10.24) より，

$$(L'_{g_0}\varphi)(v) = (L_{g_0}A^{-1}\varphi)(\exp v) = (A^{-1}\varphi)(g_0^{-1} \exp v) \tag{10.27}$$

である．$A^{-1}\varphi \in C^\infty_{\chi_s}(N)$ と

$$g_0^{-1} \exp v = \exp(v - v_0) \exp\{-(t_0 + (B(v_0, v)/2))\boldsymbol{e}\}$$

から，(10.27) の最右辺は，

$$\chi_s(\exp\{(t_0 + (B(v_0, v)/2))e\}) \cdot (A^{-1}\varphi)(\exp(v - v_0)) \\ = \exp\{\sqrt{-1}s(t_0 + (B(v_0, v)/2))\} \cdot \varphi(v - v_0)$$

となって，等式 (10.25) を得る．(10.26) の証明も同様である． □

第 2 段: 表現 L', R' を微分する

リー代数 $\mathfrak{n}_0$ の要素 $X = v_0 + t_0 e$ に対して，$C^\infty(V)$ 上の 1 次変換 dL'_X, dR'_X を，それぞれ，

$$(dL'_X\varphi)(v) := \frac{d}{d\rho}(L'_{\exp \rho X}\varphi)(v)_{|\rho=0},$$
$$(dR'_X\varphi)(v) := \frac{d}{d\rho}(R'_{\exp \rho X}\varphi)(v)_{|\rho=0},$$

により定義する．補題 10.7 より，dL'_X, dR'_X は次の作用素となる:

$$dL'_X = -\partial_{v_0} + \sqrt{-1}s(t_0 + (B(v_0, v)/2)), \tag{10.28}$$
$$dR'_X = \partial_{v_0} - \sqrt{-1}s(t_0 + (B(v, v_0)/2)). \tag{10.29}$$

ここで，

$$\partial_{v_0}\varphi(v) := \frac{d}{d\rho}\varphi(v + \rho v_0)_{|\rho=0}$$

は v_0 が定める方向微分であり，右辺の第 2 項は，v の関数 $\pm\sqrt{-1}s(t_0 + (B(v_0, v)/2))$ を掛けるという作用素を意味する．

一般に，リー群の表現を微分するとリー代数の表現が得られる．次の命題は，(10.28), (10.29) を使って直接検証することも容易である．

命題 10.8. dL', dR' はハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0$ の $C^\infty(V)$ 上への表現を定める．

表現 dL', dR' を複素線形に拡張して，複素ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_0$ の表現を得るが，これまでの記法に従い，これらも再び dL', dR' と記すことにする．なお，リー群 N の表現 L' ($\cong L$) と R' ($\cong R$) は互いに可換であるから，それらを微分して得られるリー代数の表現についても同じことがいえる:

$$[dL'_X, R'_{g_0}] = [L'_{g_0}, dR'_Y] = [dL'_X, dR'_Y] = 0 \quad (g_0 \in N,\ X, Y \in \mathfrak{n}). \tag{10.30}$$

いま，V のシンプレクティック基底 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ を用いて V を $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する:

$$V \ni v = \sum_{i=1}^{n}(x_i p_i + y_i q_i) \longleftrightarrow (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{10.31}$$

V 上の関数を $2n$ 変数 x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ の関数とみなす．等式 (10.28), (10.29) から，表現作用素 dL'_{p_i}, dL'_{q_i}, dR'_{p_i}, dR'_{q_i} は次のように表されることがわかる．

$$dL'_{p_i} = -\partial_{x_i} + \frac{\sqrt{-1}sy_i}{2}, \qquad dL'_{q_i} = -\partial_{y_i} - \frac{\sqrt{-1}sx_i}{2}, \tag{10.32}$$

$$dR'_{p_i} = \partial_{x_i} + \frac{\sqrt{-1}sy_i}{2}, \qquad dR'_{q_i} = \partial_{y_i} - \frac{\sqrt{-1}sx_i}{2}. \tag{10.33}$$

ここに，$\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $\partial_{y_i} = \partial/\partial y_i$ は，それぞれ，変数 x_i, y_i に関する偏微分である．また，中心元 $\boldsymbol{e}$ は，スカラー作用素を与える:

$$dL'_{\boldsymbol{e}} = \sqrt{-1}sI, \quad dR'_{\boldsymbol{e}} = -\sqrt{-1}sI. \tag{10.34}$$

以下，$s > 0$ の場合を考える．複素変数 z_i $(i = 1, \ldots, n)$ を，

$$z_i := \frac{\sqrt{s}(y_i - \sqrt{-1}x_i)}{\sqrt{2}} \tag{10.35}$$

により導入する．このとき，z_i, $\overline{z_i}$ に関する偏微分は，

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial_{y_i} + \sqrt{-1}\partial_{x_i}}{\sqrt{2s}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} = \frac{\partial_{y_i} - \sqrt{-1}\partial_{x_i}}{\sqrt{2s}},$$

で与えられることに注意せよ．これらの記号を用いて，$a_i^{\pm} = (\mp\sqrt{-1}p_i + q_i)/\sqrt{2} \in \mathfrak{n}$ が定める表現作用素を書き下すと次のようになる．

命題 10.9. $i = 1, \ldots, n$ に対して，次の等式がなりたつ．

$$dL'_{a_i^+} = \sqrt{s}\left(-\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} + \frac{1}{2}z_i\right), \qquad dL'_{a_i^-} = \sqrt{s}\left(-\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{1}{2}\overline{z_i}\right), \tag{10.36}$$

$$dR'_{a_i^+} = \sqrt{s}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} + \frac{1}{2}z_i\right), \qquad dR'_{a_i^-} = \sqrt{s}\left(\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{1}{2}\overline{z_i}\right). \tag{10.37}$$

第 3 段: よい部分表現の取り出し

実は，$C^\infty(V)$ 上の N の表現 L', R' は，既約からはほど遠く，非常に大きな表現である．しかし，表現 R' と L' は可換であるから ((10.30) 参照)，dR' の表現作用素に関する同時固有空間は，表現 L', dL' に関して不変な部分空間をなす．このようにして，$(L', C^\infty(V))$ のなかから，よい部分表現を取り出すことができる．具体的には，$C^\infty(V)$ の部分空間

$$\tilde{\mathcal{O}}(V) := \{\varphi \in C^\infty(V) \mid dR'_{a_i^+}\varphi = 0 \ (i = 1, \ldots, n)\} \tag{10.38}$$

を考える．この空間の上に表現 L' および dL' の部分表現が生じる (これらも再び L', dL' と書く)．(10.37) より，$\varphi \in C^\infty(V)$ を $z = (z_1, \ldots, z_n)$ の関数とみたとき，φ が $\tilde{\mathcal{O}}(V)$ に属するためには，$\varphi(z)$ が微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} + \frac{1}{2}z_i\right)\varphi(z) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10.39}$$

を満たすことが必要十分条件となる．

注意 10.3. $\mathfrak{n}$ 上の線形形式 η_s を $\eta_s(v+te)=st$ で定め，a_i^+ $(i=1,\ldots,n)$, e が生成する $\mathfrak{n}$ の可換部分リー代数を $\mathfrak{h}_+$ で表す．このとき，N-加群 $(L',\tilde{\mathcal{O}}(V))$ を同型 $A:\mathbb{C}^\infty_{\chi_s}(N)\xrightarrow{\sim}C^\infty(V)$ により引き戻すと，$\mathbb{C}^\infty_{\chi_s}(N)$ の N-不変な部分空間

$$\{f\in C^\infty(N)\mid dR_Xf=-\sqrt{-1}\eta_s(X)f\ \ (X\in\mathfrak{h}_+)\}$$

を得る．この空間に生じる表現は，リー代数 $\mathfrak{h}_+$ の 1 次元表現 $\eta_s|\mathfrak{h}_+$ から誘導された N の表現と考えることができる．

さて，$\varphi(z)\in\tilde{\mathcal{O}}(V)$ に対して，

$$(A'\varphi)(z):=(\exp|z|^2/2)\cdot\varphi(z) \tag{10.40}$$

とおく．ただし，$z=(z_1,\ldots,z_n), w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n$ の標準内積を $(z,w):=\sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}$ で表し，対応するノルムを $|z|:=\sqrt{(z,z)}$ と書く．

$\mathcal{O}(V)$ を $V\cong\mathbb{C}^n$ 上で z について正則な関数全体のなす線形空間とするとき，$\tilde{\mathcal{O}}(V)$ と $\mathcal{O}(V)$ との間には次の関係がある．

補題 10.10. 対応 A' は線形同型 $\tilde{\mathcal{O}}(V)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(V)$ を与える．

証明. 積の微分公式から導かれる等式

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_i}}A'\varphi\right)(z)=(\exp|z|^2/2)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_i}}+\frac{1}{2}z_i\right)\varphi(z)$$

に注意すれば，$\varphi\in\tilde{\mathcal{O}}(V)$ であることと，関数 $(A'\varphi)(z)$ がコーシー-リーマンの方程式:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z_i}}(A'\varphi)(z)=0\quad(i=1,\ldots,n)$$

を満たすことが同値であることがわかる．これより補題が得られる． □

線形同型 A' をとおして，$\tilde{\mathcal{O}}(V)$ 上の表現 L' および dL' を正則関数の空間 $\mathcal{O}(V)$ に移そう．つまり，

$$\begin{aligned} L''_{g_0}&:=A'\circ L'_{g_0}\circ(A')^{-1} &&(g_0\in G),\\ dL''_X&:=A'\circ dL'_X\circ(A')^{-1} &&(X\in\mathfrak{n}),\end{aligned} \tag{10.41}$$

とおく．$\mathcal{O}(V)$ 上に群 N の表現 L'' とその微分 dL'' が定まり，A' は表現 L' と L'' との間の相関作用素を与えている．

命題 10.11. (i) N の表現 $(L'',\mathcal{O}(V))$ は，

$$\begin{aligned}(L''_{g_0}\psi)(z)&=\exp\{\sqrt{-1}st_0+(z,z_0)-(|z_0|^2/2)\}\cdot\psi(z-z_0)\\ &\qquad(g_0=\exp(v_0+t_0e)\in N,\ \psi\in\mathcal{O}(V))\end{aligned} \tag{10.42}$$

により定まる．ただし，$z_0 \in \mathbb{C}^n$ は $v_0 \in V$ と (10.31), (10.35) によって対応する数ベクトルである (z_0 は s によることに注意せよ).

(ii) リー代数 $\mathfrak{n}$ の表現 $(dL'', \mathcal{O}(V))$ は,

$$dL''_{a_i^+} = s^{1/2} z_i, \quad dL''_{a_i^-} = -s^{1/2} \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad dL''_{e} = \sqrt{-1} s I,$$

で与えられる．

表現作用素 L'_{g_0}, dL'_e, $dL'_{a_i^\pm}$ は，それぞれ，(10.25), (10.34), (10.36) で書き下されている．これを A' によって変換するとどのようになるかを，補題 10.7 と同様にして調べて，上の命題を得るわけである．単純な作業なので，証明の詳細は読者に委ねる:

問題 10.4. (i) (10.31), (10.35) により $v, v_0 \in V$ と対応する $\mathbb{C}^n$ のベクトルをそれぞれ z, z_0 とするとき，(10.42) の右辺に現れる内積 (z, z_0) の虚部は $sB(v_0, v)/2$ に等しいことを示せ．

(ii) 命題 10.11 を証明せよ．

第 4 段: 表現のユニタリ性

$V \cong \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 $\psi(z) \in \mathcal{O}(V)$ に対して，ψ のノルムを

$$\|\psi\| := \left(\int_{\mathbb{C}^n} |\psi(z)|^2 \exp(-|z|^2)\, dz \right)^{1/2} \quad (dz = dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n)$$

で定める．このとき，

$$\mathcal{H}(V) := \{\psi \in \mathcal{O}(V) \mid \|\psi\| < \infty\}$$

は，ノルム $\|\cdot\|$ に対応する内積

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \int_{\mathbb{C}^n} \psi_1(z) \overline{\psi_2(z)} \exp(-|z|^2)\, dz$$

に関して，ヒルベルト空間になることがわかる (完備性が証明できる)．$\mathcal{H}(V)$ を V 上の**フォック空間**という．明らかに，$\mathcal{H}(V)$ は多項式の空間 $\boldsymbol{P} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ を含む．また，単項式 $(\alpha!)^{-1/2} z^\alpha$ たちは，α によらない正数を乗じることで，$\mathcal{H}(V)$ の完全正規直交系をつくる．この基底に関する $\psi \in \mathcal{H}(V)$ の展開は，関数 $\psi(z)$ の冪級数展開に他ならない．

命題 10.11 (i) で書き下した表現作用素 L''_{g_0} は，$\mathcal{H}(V)$ 上のユニタリ作用素を定める．このようにして，群 N のユニタリ表現が $\mathcal{H}(V)$ 上に得られる．この表現を $(\mathring{\varpi}_s, \mathcal{H}(V))$ で表し，N の**フォック表現**とよぶ．

表現 $\mathring{\varpi}_s$ は中心指標 χ_s をもつ: $\mathring{\varpi}_s(h) = \chi_s(h) I$ $(h \in Z)$．また，$\mathring{\varpi}_s$ の微分を多項式の空間 $\boldsymbol{P}$ で考えると，ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}$ のフォック表現 ϖ_s が得られている (命題 10.11 (ii) 参照).

次の定理は，ハイゼンベルグ代数の表現に対する定理 10.5 および命題 10.6 に相当し，群 N の無限次元既約ユニタリ表現の分類を与える．

定理 10.12. (i)　ハイゼンベルグ群 $N = N(V)$ のフォック表現 $\mathring{\varpi}_s$ は既約である.
(ii) (ストーン-フォン・ノイマン)　中心指標 χ_s をもつ N の既約ユニタリ表現は $\mathring{\varpi}_s$ とユニタリ同値である.

証明には関数解析的な議論が必要になる. 本書ではリー代数 $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}(V)$ の表現を詳しく扱ったので, 上の定理の証明は, 他の専門書 ([31], [51] 等) に譲りたい.

ここでは $\mathfrak{n}$ の部分リー代数 $\mathfrak{h}_+$ からの表現の誘導をとおしてフォック表現 $\mathring{\varpi}_s$ を構成したが, 別のタイプの誘導表現を用いて, 中心指標 χ_s をもつ N の既約ユニタリ表現を実現することができる. あらすじを簡単に説明しておこう.

シュレーディンガー表現

W を V のラグランジュ部分空間 (定義 7.2 参照) とすると, $P := \exp(W \oplus \mathbb{R}e)$ は N の可換な部分群をなす. P のユニタリ指標 $\mathring{\chi}_s$ を

$$\mathring{\chi}_s(\exp(w + te)) := \exp\sqrt{-1}st \quad (w \in W,\ t \in \mathbb{R})$$

で定め, 誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^N(\mathring{\chi}_s)$ を考える. $V = W \oplus W'$ なる V のラグランジュ部分空間 $W' \cong \mathbb{R}^n$ をとったとき, 命題 7.15 (iii) に注意すると, この表現を W' 上の関数空間 $C^\infty(W')$ に実現することができる. 対応して, W' 上の 2 乗可積分な関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(W')$ 上に, 中心指標 χ_s をもつ N の既約ユニタリ表現が得られる. このユニタリ表現をハイゼンベルグ群 N の**シュレーディンガー表現**とよび, 記号 $\mathring{\varpi}'_s$ で表す.

◆トピックス 7 (ハイゼンベルグ代数と量子力学). ……………………………………………
ハイゼンベルグ群のユニタリ表現は**量子力学**と深く関係する. 実際, 自由度 n の古典力学系に対応する量子系においては, 古典系での力学変数は, 量子系の状態を表すヒルベルト空間上の (稠密な部分空間で定義された) 自己共役作用素の組 $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, $P = (P_1, \ldots, P_n)$ で, 次の交換関係を満たすものに置き換えられる:

$$[Q_i, P_j] = \sqrt{-1}\hbar\delta_{ij}, \qquad [Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0.$$

ここに, $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) である.
N の既約ユニタリ表現 $(\mathring{\varpi}_\hbar, \mathcal{H}(V))$ は,

$$Q_i := \sqrt{-1}\varpi_\hbar(q_i), \qquad P_i := \sqrt{-1}\varpi_\hbar(p_i)$$

により, このような量子力学系のモデルを与える (フォックモデル).
一方, N のシュレーディンガー表現 $(\mathring{\varpi}'_\hbar, L^2(W'))$ は, 見かけ上は異なった量子系を実現するが, 表現がユニタリ同値であるため, フォックモデルと同じ物理的結果を与える. 量子力学の数学的原理に興味のある読者には, 第 3 章, 第 4 章とともに, [1] なども参考になるだろう.

◆トピックス 8 (キリロフ軌道理論). ……………………………………………………………
ハイゼンベルグ群 N の任意の既約ユニタリ表現は, フォック表現 $\mathring{\varpi}_s$ $(s > 0)$, その反傾表現 $(\mathring{\varpi}_s)^*$, あるいは, $\phi(e) = 0$ なる $\mathfrak{n}_0$ 上の線形形式 ϕ が定める 1 次元ユニタリ指標:

$$\mathring{\pi}_\phi(\exp(v + te)) := \exp\sqrt{-1}\phi(v) \quad (v \in V,\ t \in \mathbb{R}),$$

のいずれかとユニタリ同値になる．これらの表現の間には同値な関係はなく，群 N の既約ユニタリ表現の分類と構成が得られる．つまり，N の既約ユニタリ表現の同値類の集合 $\hat{N}$ (**ユニタリ双対**) は，

$$\hat{N} = \{[\mathring{\varpi}_s], [(\mathring{\varpi}_s)^*] \mid s > 0\} \cup \{[\mathring{\pi}_\phi] \mid \phi \in \mathfrak{n}_0^*,\ \phi(e) = 0\}$$

と記述できる．ここに，$[\tau]$ は既約ユニタリ表現 τ の定める同値類である．この記述をもとに少し調べれば，集合 $\hat{N}$ と N の余随伴軌道の集合 $\mathfrak{n}_0^*/N$ (7.3.5 節参照) の間に自然な 1 対 1 対応があることに気づく：

$$\hat{N} \longleftrightarrow \mathfrak{n}_0^*/N.$$

実は，任意の連結かつ単連結な冪零リー群 N について同じことが成立する．つまり，この種の冪零リー群では，リー代数の各余随伴軌道に対応して，**偏極化** (polarization) の考えを用いて，既約ユニタリ表現を構成・分類することができる．これがキリロフ (A. A. Kirillov, [28]) が 1962 年に発表した**軌道理論**である．

さて，歴史的には遡ることになるが，有限群の既約表現の指標たちは類関数のなす線形空間の基底をなす．このことは, 群の共役類の幾何的構造と表現の間に深いつながりがあることを示唆している．つまり，群の内部構造が表現にどのように反映するか？ これを解き明かすことが, いかなる群の場合にも, 表現論において重要な課題であり，研究の指導原理になっている．上記のキリロフ軌道理論は，冪零リー群に対してこの問題に満足のいく解答を与えると同時に，リー群の場合，共役類そのものより余随伴軌道を考察するのが有効であることを示唆している．

◆トピックス 9 (半単純リー群の表現と冪零軌道). ……………………………………………

ここで半単純リー群の表現論を軌道理論の立場から眺めてみよう．既約許容表現のラングランズ分類 (トピックス 6, p. 265 参照) は，ある意味で，各既約表現にリー代数の半単純元を通る (余) 随伴軌道： 半単純軌道, を結びつけている．最も簡単な $G = SU(1,1)$ の場合にこれを説明すると次のようになる．いま，G のリー代数

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(1,1) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_3 & x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ x_1 - \sqrt{-1}x_2 & -\sqrt{-1}x_3 \end{pmatrix} \right| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3 = \{{}^t(x_1, x_2, x_3)\}$ と同一視する．このとき，G の随伴群 $\mathrm{Ad}(G) \subset GL(3, \mathbb{R})$ は，2 次形式

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -\det \begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_3 & x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ x_1 - \sqrt{-1}x_2 & -\sqrt{-1}x_3 \end{pmatrix}$$

を不変にする固有ローレンツ群 $SO_0(2,1)$ に他ならない．よって，1.7 節でも調べたように，群 G の $\mathfrak{g}_0 \cong \mathbb{R}^3$ 上の随伴軌道は，

(i) 二葉双曲面の上葉：$\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -R^2,\ x_3 > 0\}$ $(R > 0)$,
(ii) 二葉双曲面の下葉：$\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -R^2,\ x_3 < 0\}$ $(R > 0)$,
(iii) 一葉双曲面：$\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = R^2\}$ $(R > 0)$,
(iv) 光錐の上半部分：$\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ x_3 > 0\}$,
(v) 光錐の下半部分：$\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ x_3 < 0\}$,
(vi) 原点：$\{0\}$,

のいずれかとなる．うち (i), (ii), (iii) および (vi) が半単純軌道，(iv) と (v) が零でない冪零軌道を与える．G の既約ユニタリ表現は，その幾何学的構成から，正則あるいは反正則な離散系列表現がそれぞれ二葉双曲面の上葉あるいは下葉に対応し，主系列表現は一葉双曲面に対応している．

では, リー代数の冪零元を通る (余) 随伴軌道, つまり冪零軌道は, 半単純リー群の表現にどのように関与するのだろうか？　普遍包絡代数の原始イデアルの分類, 無限次元表現に対する階数・台・サイクルの概念の導入, あるいは群上の保型形式や表現のホイッタッカー (Whittaker) 模型理論などの進展に伴い, リー代数の冪零軌道が既約表現の退化性や大きさを特徴づける不変量として重要であることが, 1980 年前後からとくに強く認識されるようになった. また, 1990 年ごろからは, 既約ユニタリ表現の分類とも関係して, 冪零軌道の量子化により得られる「極小表現」や「冪単(べきたん)表現」の構成など, 退化したユニタリ表現に関する研究も盛んになってきている. なお, 次節で構成するヴェイユ表現は, メタプレクティック群 (シンプレクティック群の二重被覆群) に対する極小表現を与えることになる.

10.3　ヴェイユ表現—フォック表現の拡張

この節では, ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}(V)$ のシンプレクティックリー代数 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(V)$ による拡大 $\tilde{\mathfrak{n}}_0 = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{n}_0$ を考察し, $\mathfrak{n}_0$ の認容的な既約ユニタリ表現の $\tilde{\mathfrak{n}}_0$ への拡張を論じる. とくに, $\mathfrak{n}_0$ のフォック表現 $(\varpi_s, \boldsymbol{P})$ のユニタリな拡張を具体的に構成する. なお, 見通しよく議論をすすめるために, $\tilde{\mathfrak{n}}_0$ の複素化

$$\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n} \quad (\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}}),\ \mathfrak{n} = V_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}e)$$

を取り扱う. ここで, 実線形空間 V 上のシンプレクティック形式 B を V の複素化 $V_{\mathbb{C}}$ に複素線形に拡張し, $V_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上のシンプレクティック線形空間とみなす.

10.3.1　既約表現の拡張とその一意性

まず, 表現の拡張とは何かを一般的に定式化し, 既約表現の単純リー代数による拡張が一意的であることを示すことから始める. $\mathfrak{g}, \mathfrak{n}$ を $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上の有限次元リー代数とし, 準同型写像 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ をとおして, $\mathfrak{n}$ の $\mathfrak{g}$ による拡大 $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ が定まっているとしよう (命題 7.13 参照). $(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{n}$ の表現とするとき, $\tilde{\mathfrak{n}}$ の $\boldsymbol{V}$ 上への表現 $\tilde{\pi}$ で, その $\mathfrak{n}$ への制限が π に等しいものを, 表現 π の $\tilde{\mathfrak{n}}$ への**拡張**という.

命題 10.13. リー代数 $\mathfrak{g}$ は半単純であると仮定する. このとき,

(i)　$\mathfrak{n}$ の既約表現 $(\pi, \boldsymbol{V})$ の $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ への拡張は (存在するとすれば) 一意的である.

(ii)　$(\pi, \boldsymbol{V})$ が $\mathfrak{n}$ の 1 次元表現のとき, π の拡張 $\tilde{\pi}$ が存在するためには,

$$\pi(\rho(X)Y) = 0 \quad (X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{n})$$

がなりたつことが必要十分条件である. このとき, $\tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}(X + Y) = \pi(Y)$ により与えられる.

証明. (i) $\tilde{\pi}$ が π の $\tilde{\mathfrak{n}}$ への拡張であるとき，任意の $X \in \mathfrak{g}$ と $Y \in \mathfrak{n}$ に対し，

$$[\tilde{\pi}(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]) = \pi(\rho(X)Y) \tag{10.43}$$

は拡張の仕方によらず，表現 π のみにより定まる．したがって，もし別の拡張 $\tilde{\pi}'$ があったとすれば，

$$[\tilde{\pi}(X) - \tilde{\pi}'(X), \pi(Y)] = 0$$

を満たし，$\tilde{\pi}(X) - \tilde{\pi}'(X)$ は $\mathfrak{n}$ の既約表現 π に関する相関作用素となる．ゆえに，シュアの補題 (定理 9.7) より，$\kappa(X) \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$\tilde{\pi}'(X) = \tilde{\pi}(X) + \kappa(X)I \quad (I \text{ は } \boldsymbol{V} \text{ 上の恒等変換})$$

となる．これから

$$\tilde{\pi}'([X, X']) = [\tilde{\pi}'(X), \tilde{\pi}'(X')] = [\tilde{\pi}(X), \tilde{\pi}(X')] = \tilde{\pi}([X, X']) \quad (X, X' \in \mathfrak{g})$$

が得られ，$\tilde{\pi}$ と $\tilde{\pi}'$ は $\mathfrak{g}$ の導来イデアル $D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上で一致することがわかる．ところが $\mathfrak{g}$ は半単純ゆえ，$D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ である (問題 7.12 (iii) 参照)．よって $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}'$ を得る．

(ii) $D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ より，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の 1 次元表現は零表現に限ることに注意せよ．もし $\mathfrak{n}$ の 1 次元表現 π の $\tilde{\mathfrak{n}}$ への拡張 $\tilde{\pi}$ が存在すれば，(10.43) より，$\pi(\rho(X)Y) = 0$ $(X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{n})$ でなければならない．逆に $\pi(\rho(X)Y) = 0$ であるとき，$\tilde{\mathfrak{n}}$ における括弧積 (7.41) を用いて，$\tilde{\pi}(X + Y) = \pi(Y)$ が π の拡張になっていることを容易に確かめることができる． □

上の命題 10.13 をハイゼンベルグ代数のシンプレクティックリー代数による拡大に適用すれば，次のことがわかる．

系 10.14. ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}$ の既約表現の $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ $(\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}}))$ への拡張は (存在すれば) 一意的である．また，$\mathfrak{n}$ の 1 次元表現で $\tilde{\mathfrak{n}}$ に拡張できるものは，零表現のみである．

後半の主張は検証を要するが，やさしいので読者に委ねる．

問題 10.5. 系 10.14 を証明せよ．

10.3.2 半直積 $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ の構造

次に，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}})$ のハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{n}$ への作用 (すなわち括弧積) を具体的に書き下してみよう．いま，

$$\tilde{\mathcal{E}} := (\sqrt{-1}a_1^+, \ldots, \sqrt{-1}a_n^+, a_1^-, \ldots, a_n^-) \tag{10.44}$$

が $V_{\mathbb{C}}$ のシンプレクティック基底を与えることに注目する．この基底に関して $V_{\mathbb{C}}$ 上の 1 次変換を行列表示することによって，$\mathfrak{g}$ を行列のなすリー代数 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ と同一視することにす

る．このとき，$X \in \mathfrak{g}$ を V のシンプレクティック基底 $\mathcal{E} = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ に関して行列表示すれば，$\tilde{\boldsymbol{c}}^{-1}(X) = \boldsymbol{c}^{-1} X \boldsymbol{c}$ となる ($\tilde{\boldsymbol{c}}$ は $\mathfrak{g}$ のケーリー変換)．実際，(8.21) で定まる行列 $\boldsymbol{c}$ が基底の変換 $\tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ を与えるからである．よって，$\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(V)$ は，命題 8.5 で述べた $\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{k}_0' \oplus \mathfrak{p}_0'$ に他ならない．以下，8.2.3 節に倣(なら)い，$\mathfrak{g}_0'$, $\mathfrak{k}_0'$, $\mathfrak{p}_0'$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$ と書くことにする．

さて，$E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{\ell j})_{1 \le k, \ell \le n}$ を n 次の (i,j)-行列単位とし，$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathfrak{g}$ を次式で定める：

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} E_{ij} & O \\ O & -E_{ji} \end{pmatrix} \qquad (1 \le i, j \le n), \tag{10.45}$$

$$B_{ij} := \begin{pmatrix} O & E_{ij} + E_{ji} \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (1 \le i \le j \le n), \tag{10.46}$$

$$C_{ij} := \begin{pmatrix} O & O \\ E_{ij} + E_{ji} & O \end{pmatrix} \qquad (1 \le i \le j \le n). \tag{10.47}$$

A_{ij}, B_{ij} および C_{ij} たちは，それぞれ，$\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}_+$ および $\mathfrak{p}_-$ (例 8.3(ii) 参照) の基底をなす．また，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役作用素 σ は，

$$\sigma(A_{ij}) = -A_{ji}, \quad \sigma(B_{ij}) = C_{ij}, \tag{10.48}$$

と表示される．

基底 $\tilde{\mathcal{E}}$ をとおして $V_{\mathbb{C}}$ を $2n$ 次列ベクトルの空間 $\mathbb{C}^{2n}$ と自然に同一視するとき，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の $\mathfrak{n} = V_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e}$ への作用は行列の列ベクトルへの掛け算であることに注意すれば (なお，定義より $\mathbb{C}\boldsymbol{e}$ への作用は零である)，次の補題が直ちに得られる．

補題 10.15. $\mathfrak{g}$ の基底 $\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}\}$ と $\mathfrak{n}$ の基底 $\{a_k^+, a_k^-, \boldsymbol{e}\}$ との間の交換関係は次のとおりである：

$$[A_{ij}, a_k^+] = \delta_{jk} a_i^+, \qquad [A_{ij}, a_k^-] = -\delta_{ik} a_j^-, \tag{10.49}$$

$$[B_{ij}, a_k^+] = 0, \qquad [B_{ij}, a_k^-] = \sqrt{-1}(\delta_{jk} a_i^+ + \delta_{ik} a_j^+), \tag{10.50}$$

$$[C_{ij}, a_k^+] = -\sqrt{-1}(\delta_{jk} a_i^- + \delta_{ik} a_j^-), \qquad [C_{ij}, a_k^-] = 0, \tag{10.51}$$

$$[X, \boldsymbol{e}] = 0 \quad (X = A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}). \tag{10.52}$$

リー代数 $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ の構造をよりはっきりと理解するため，

$$H_0 := \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & -E_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{k} \tag{10.53}$$

が定める $\tilde{\mathfrak{n}}$ 上の随伴作用素

$$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{n}}} H_0 : \ U \longmapsto [H_0, U] \quad (U \in \tilde{\mathfrak{n}})$$

を考えよう．$Z_0 = \sqrt{-1}H_0/2$ が $\mathfrak{g}$ の三角型分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ を定める $\mathfrak{k}_0$ の中心元であること (命題 8.12) を思い起こせば，上の補題から次のことが導かれる．

命題 10.16. $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{n}}} H_0$ の μ-固有空間を $\tilde{\mathfrak{n}}(\mu)$ とする．このとき，

(i) $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ は (線形空間として)

$$\tilde{\mathfrak{n}} = \tilde{\mathfrak{n}}(-2) \oplus \tilde{\mathfrak{n}}(-1) \oplus \tilde{\mathfrak{n}}(0) \oplus \tilde{\mathfrak{n}}(1) \oplus \tilde{\mathfrak{n}}(2) \tag{10.54}$$

と直和分解し，それぞれの固有空間は，

$$\tilde{\mathfrak{n}}(0) = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e}, \quad \tilde{\mathfrak{n}}(\pm 1) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C}a_k^{\pm}, \quad \tilde{\mathfrak{n}}(\pm 2) = \mathfrak{p}_{\pm} \ (\text{複号同順}), \tag{10.55}$$

と表される．

(ii) $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathfrak{n}}} H_0 \in \mathrm{Der}(\tilde{\mathfrak{n}})$ ゆえ，$[\tilde{\mathfrak{n}}(\mu), \tilde{\mathfrak{n}}(\mu')] \subset \tilde{\mathfrak{n}}(\mu + \mu')$ がなりたつ．

(iii) $\tilde{\mathfrak{n}}$ の実型 $\tilde{\mathfrak{n}}_0$ に関する複素共役作用素 σ は，固有空間 $\tilde{\mathfrak{n}}(\mu)$ を $\tilde{\mathfrak{n}}(-\mu)$ に移す：$\sigma\,\tilde{\mathfrak{n}}(\mu) = \tilde{\mathfrak{n}}(-\mu)$.

この命題の主張 (i)–(iii) のなかで真に証明を要することは残っていないはずだが，確かな理解を得るためにも，読者はぜひ自分で検証されたい：

問題 10.6. 上の命題を証明せよ．

10.3.3 拡張 $\tilde{\varpi}_s$ の構成

以上の準備のもとに，$\mathfrak{n}$ のフォック表現 $(\varpi_s, \boldsymbol{P})$ を半直積 $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ の表現 $\tilde{\varpi}_s$ に拡張する．拡張の一意性は命題 10.13 ですでに示されているから，表現 $\tilde{\varpi}_s$ を具体的に構成すればよい．結論を述べよう．

定理 10.17. $s > 0$ とする．$\boldsymbol{P} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 上の線形変換

$$\tilde{\varpi}_s(A_{ij}) := z_i \partial_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}, \tag{10.56}$$

$$\tilde{\varpi}_s(B_{ij}) := \sqrt{-1} z_i z_j, \tag{10.57}$$

$$\tilde{\varpi}_s(C_{ij}) := \sqrt{-1} \partial_i \partial_j, \tag{10.58}$$

は，$\mathfrak{n}$ の表現 ϖ_s の $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ への拡張を与える．さらに，表現 $\tilde{\varpi}_s$ は $\tilde{\mathfrak{n}}$ の実型 $\tilde{\mathfrak{n}}_0 = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{n}_0$ に関してユニタリである．

証明の概略. (10.56), (10.57) および (10.58) によって，$\mathfrak{n}$ の表現 ϖ_s から，線形写像 $\tilde{\varpi}_s : \tilde{\mathfrak{n}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{P})$ をつくる．これが $\tilde{\mathfrak{n}}$ の表現を与えていることを示す．そのため，行列の括弧

積を計算して，$\mathfrak{g}$ の基底 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} の交換関係を書き下すと次のようになる.

$$[A_{ij}, A_{\ell m}] = \delta_{j\ell}A_{im} - \delta_{mi}A_{\ell j}, \tag{10.59}$$

$$[A_{ij}, B_{\ell m}] = \delta_{j\ell}B_{im} + \delta_{jm}B_{i\ell}, \tag{10.60}$$

$$[A_{ij}, C_{\ell m}] = -\delta_{i\ell}C_{jm} - \delta_{im}C_{j\ell}, \tag{10.61}$$

$$[B_{ij}, C_{\ell m}] = \delta_{i\ell}A_{jm} + \delta_{im}A_{j\ell} + \delta_{j\ell}A_{im} + \delta_{jm}A_{i\ell}, \tag{10.62}$$

$$[B_{ij}, B_{\ell m}] = [C_{ij}, C_{\ell m}] = 0. \tag{10.63}$$

また，A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} と $\mathfrak{n}$ の基底 $a_k^+, a_k^-, \boldsymbol{e}$ との間の交換関係は，(10.49)–(10.52) で記述されている．したがって，$\tilde{\varpi}_s$ が $\tilde{\mathfrak{n}}$ の表現であることを示すには，$\tilde{\mathfrak{n}}$ の基底 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij},$a_k^\pm$, $\boldsymbol{e}$ を，対応する表現作用素 $\tilde{\varpi}_s(A_{ij})$, $\tilde{\varpi}_s(B_{ij})$, $\tilde{\varpi}_s(C_{ij})$, $\tilde{\varpi}_s(a_k^\pm) = \varpi_s(a_k^\pm)$, $\tilde{\varpi}_s(\boldsymbol{e}) = \varpi_s(\boldsymbol{e})$ に置き換えても，同じ交換関係式が成立することを確かめればよい．表現作用素は具体的に与えられているので，あとは計算のみのルーチン・ワークとなる．ここでは，(10.50) と (10.62) に対応する関係式を確かめておこう (残りの場合は読者に委ねる).

まず，(10.50) に対応する場合．$\tilde{\varpi}_s(B_{ij}) = \sqrt{-1}z_iz_j$ と $\varpi_s(a_k^+) = s^{1/2}z_k$ はともに掛け算作用素であり，互いに可換となる：$[\tilde{\varpi}_s(B_{ij}), \varpi_s(a_k^+)] = 0$．一方，積の微分公式から得られる等式：

$$\partial_k \cdot z_iz_j = \delta_{jk}z_i + \delta_{ik}z_j + z_iz_j\partial_k \tag{10.64}$$

に注意すると，$\tilde{\varpi}_s(B_{ij})$ と $\varpi_s(a_k^-) = -s^{1/2}\partial_k$ との括弧積は，

$$\begin{aligned}[\tilde{\varpi}_s(B_{ij}), \varpi_s(a_k^-)] &= -s^{1/2}\sqrt{-1}\,[z_iz_j, \partial_k] \\ &= -s^{1/2}\sqrt{-1}(z_iz_j\partial_k - \partial_k z_iz_j) \\ &= s^{1/2}\sqrt{-1}(\delta_{jk}z_i + \delta_{ik}z_j) \\ &= \sqrt{-1}(\delta_{jk}\varpi_s(a_i^+) + \delta_{ik}\varpi_s(a_j^+))\end{aligned}$$

と計算され，(10.50) と同一の交換関係が得られる.

次に，$\tilde{\varpi}_s(B_{ij})$ と $\tilde{\varpi}_s(C_{\ell m})$ の括弧積を計算する．(10.64) を 2 回用いて，

$$\begin{aligned}\partial_\ell\partial_m \cdot z_iz_j &= \partial_\ell(\delta_{jm}z_i + \delta_{im}z_j + z_iz_j\partial_m) \\ &= \delta_{jm}\partial_\ell z_i + \delta_{im}\partial_\ell z_j + \delta_{j\ell}z_i\partial_m + \delta_{i\ell}z_j\partial_m + z_iz_j\partial_\ell\partial_m\ .\end{aligned}$$

さらに $\partial_\ell z_i = z_i\partial_\ell + \delta_{i\ell}$ から，

$$\begin{aligned}[\partial_\ell\partial_m, z_iz_j] &= \delta_{jm}z_i\partial_\ell + \delta_{im}z_j\partial_\ell + \delta_{j\ell}z_i\partial_m + \delta_{i\ell}z_j\partial_m + \delta_{jm}\delta_{i\ell} + \delta_{im}\delta_{j\ell} \\ &= \delta_{jm}\left(z_i\partial_\ell + \frac{1}{2}\delta_{i\ell}\right) + \delta_{im}\left(z_j\partial_\ell + \frac{1}{2}\delta_{j\ell}\right) \\ &\quad + \delta_{j\ell}\left(z_i\partial_m + \frac{1}{2}\delta_{im}\right) + \delta_{i\ell}\left(z_j\partial_m + \frac{1}{2}\delta_{jm}\right)\end{aligned}$$

を得る．これは，

$$[\tilde{\varpi}_s(B_{ij}), \tilde{\varpi}_s(C_{\ell m})] = \delta_{jm}\tilde{\varpi}_s(A_{i\ell}) + \delta_{im}\tilde{\varpi}_s(A_{j\ell}) + \delta_{j\ell}\tilde{\varpi}_s(A_{im}) + \delta_{i\ell}\tilde{\varpi}_s(A_{jm})$$

を示しており，交換関係式 (10.62) が表現作用素のレベルでも成立する．

以上により，$\tilde{\varpi}_s$ がフォック表現 ϖ_s の $\tilde{\mathfrak{n}}$ への拡張を与えることがわかった．

最後に，(10.20) で定まる $\boldsymbol{P}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して，$\tilde{\varpi}_s$ が $\tilde{\mathfrak{n}}_0 = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{n}_0$ のユニタリ表現であることを検証する．$z_i^* = \partial_i$ および等式 (10.48) から，$\tilde{\varpi}_s(A_{ij})$ および $\tilde{\varpi}_s(B_{ij})$ の共役作用素は，

$$\tilde{\varpi}_s(A_{ij})^* = z_j\partial_i + \frac{1}{2}\delta_{ji} = \tilde{\varpi}_s(A_{ji}) = -\tilde{\varpi}_s(\sigma(A_{ij})),$$
$$\tilde{\varpi}_s(B_{ij})^* = -\sqrt{-1}\partial_i\partial_j = -\tilde{\varpi}_s(C_{ij}) = -\tilde{\varpi}_s(\sigma(B_{ij})),$$

と表される．これらの等式に注意して，補題 9.14 を適用すれば，$\tilde{\varpi}_s$ が $\mathfrak{g}_0$，したがって $\tilde{\mathfrak{n}}_0$ のユニタリ表現であることがわかる． □

注意 10.4. 全く同様に考えれば，中心値 $-\sqrt{-1}s$ $(s>0)$ をもつ $\mathfrak{n}_0$ の認容的既約ユニタリ表現も，半直積 $\tilde{\mathfrak{n}}_0$ のユニタリ表現に拡張できる．ただし，$\tilde{\varpi}_s$ の場合と，掛け算作用素 z_i と微分作用素 ∂_i の役割が逆転する．

さて，拡張 $(\tilde{\varpi}_s, \boldsymbol{P})$ を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ に制限すると，$\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現が得られる．(10.56)–(10.58) よりこの表現はパラメータ $s>0$ によらないので，単に $\tilde{\varpi}$ と書くことにする．

定義 10.2. 実シンプレクティックリー代数 $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ を**ヴェイユ表現**とよぶ．

次章ではヴェイユ表現の構造を詳しく調べる．

◆トピックス 10 (メタプレクティック群のヴェイユ表現). ………………………………

フランスの生んだ 20 世紀の偉大な数学者アンドレ・ヴェイユ (André Weil, 1906–1998) の名を冠し通常ヴェイユ表現とよばれるのは，ハイゼンベルグ群 $N(V)$ のフォック表現 $(\mathring{\varpi}_s, \mathcal{H}(V))$ (あるいはシュレーディンガー表現 $(\mathring{\varpi}'_s, L^2(W'))$) を半直積群 $Mp(V) \ltimes N(V)$ に拡張して得られる $Mp(V)$ のユニタリ表現のことである ([27], [31], [39], [48], [53] などを参照)．ここに，$Mp(V)$ は V 上のメタプレクティック群 (シンプレクティック群 $Sp(V)$ の二重被覆群) を表す．本章で構成したリー代数 $\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ は，$Mp(V)$ のヴェイユ表現を指数写像 $\exp : \mathfrak{g}_0 \to Mp(V)$ をとおして微分して得られるものである．なお，群の表現のレベルで $Sp(V)$ の二重の被覆群を考える必要が生じるのは，作用素 $\tilde{\varpi}(A_{ii}) = z_i\partial_i + (1/2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に現れる分数 1/2 が原因である (注意 11.1 参照)．

保型形式への応用などさまざまな観点から，群レベルでのヴェイユ表現がより重要で興味深いのは間違いない．しかし，それをわかるように解説するには結構な予備知識や考察が必要になる．一方，表現論の立場からみれば，ハリシュ-チャンドラの一般的な理論 [10] により，本章で構成したリー代数 $\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ はメタプレクティック群のヴェイユ表現を (原理的には) 完全に決定している．

第11章
ヴェイユ表現とはしご表現

いよいよ本書第 II 部の核心部分に踏み込もう．この章では，これまでに行った準備をふまえて，シンプレクティックリー代数のヴェイユ表現 $(\varpi, \boldsymbol{P})$ の構造を考察する．まず，表現空間 $\boldsymbol{P}$ における最低ウェイトベクトルを決定し，表現 ϖ を偶部分と奇部分のふたつの既約表現の直和に分解する (定理 11.1)．さらにエルミート型実リー代数 $\mathfrak{u}(p,q)$ $(n=p+q)$ や $\mathfrak{o}^*(2n)$ が $\mathfrak{sp}(\epsilon n, \mathbb{R})$ の部分リー代数として実現できること (8.2.1 節参照) に注目し，ヴェイユ表現をこれらの部分リー代数に制限したとき，どのように既約分解 (分岐) するかを明らかにする (定理 11.6 および 11.18)．ここに，自然数 ϵ は，$\mathfrak{u}(p,q)$ のときには $\epsilon=1$, $\mathfrak{o}^*(2n)$ では $\epsilon=2$ と定める．

上の分解に現れる既約表現は，その極大コンパクト部分リー代数の作用に関して，はしご状のスペクトルをもち，このため「はしご表現」(ladder representation) とよばれる．はしご表現は，$\mathfrak{u}(p,q)$, $\mathfrak{o}^*(2n)$ の $\mathfrak{sp}(\epsilon n, \mathbb{R})$ における中心化リー代数の作用によって，表現空間 $\boldsymbol{P}$ を「切り分ける」ことによって得られる．読者は，多項式というごくありきたりの関数のなす空間に，無限次元既約ユニタリ表現が関わるみごとな構造 (対称性) が見出されることに驚かれるであろう．

なお，本章で与えるヴェイユ表現の分岐則は，より一般に，一方がコンパクトなデュアルペア $(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{o}(k))$, $(\mathfrak{u}(p,q), \mathfrak{u}(k))$, $(\mathfrak{o}^*(2n), \mathfrak{sp}(k))$ に関する表現のハウ対応の枠組みで定式化される ([19], [27])．

11.1 ヴェイユ表現の既約分解

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ を複素シンプレクティックリー代数とし，$\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ とそのカルタン分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ $(\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{u}(n))$ を 10.3.2 節のようにとる． 実リー代数 $\mathfrak{k}_0$ の $\mathfrak{g}$ における複素化 $\mathfrak{k}$ は一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ と同型である．この節では，n 変数多項式のなす空間 $\boldsymbol{P} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ に働くヴェイユ表現 ϖ を，$\mathfrak{g}$ の表現として，ついで $\mathfrak{k}$ の表現として既約分解する．

11.1.1 表現 $\tilde{\varpi}$ の分解公式

まず結果から述べよう．偶数次，奇数次の斉次多項式が生成する $\boldsymbol{P}$ の部分空間を，それぞれ

$$\boldsymbol{P}^{(0)} := \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{P}_{2\ell}, \quad \boldsymbol{P}^{(1)} := \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{P}_{2\ell+1}, \tag{11.1}$$

で表す．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}\}$ ((10.45)–(10.47) 参照) について，定理 10.17 より，表現作用素 $\tilde{\varpi}(A_{ij}) = z_i\partial_j + (\delta_{ij}/2)$ は多項式の次数を変えず，作用素 $\tilde{\varpi}(B_{ij}) = \sqrt{-1}z_iz_j$ (または $\tilde{\varpi}(C_{ij}) = \sqrt{-1}\partial_i\partial_j$) は次数を 2 だけ上げる (または下げる)．よって，$\boldsymbol{P}^{(0)}$, $\boldsymbol{P}^{(1)}$ は $\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{g}$-不変部分空間をなし，(11.1) の斉次成分 $\boldsymbol{P}_{2\ell}$, $\boldsymbol{P}_{2\ell+1}$ はそれぞれ $\mathfrak{k}$-部分加群となる．明らかに $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(0)} \oplus \boldsymbol{P}^{(1)}$ であるが，実は次のことがわかる．

定理 11.1. (i) $\mathfrak{k}$-加群 $\boldsymbol{P}_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ たちはみな既約であり，m が異なれば互いに同型ではない．

(ii) $\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群 $\boldsymbol{P}^{(0)}$, $\boldsymbol{P}^{(1)}$ はともに既約であり，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(0)} \oplus \boldsymbol{P}^{(1)}$ がヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ の既約分解を与える．また，$\boldsymbol{P}^{(0)}$ と $\boldsymbol{P}^{(1)}$ は互いに同型ではない．

この定理の証明は，11.1.2 節でルートとウェイトに関する準備をした後，11.1.3 節で与えられる．

注意 11.1. k を整数とする．n 次の正則な複素正方行列全体のつくる一般線形群 $K := GL(n, \mathbb{C})$ は，線形空間 $\boldsymbol{P}_m$ に，

$$(\pi_k(g)\varphi)(z_1, \ldots, z_n) := (\det g)^k \varphi((z_1, \ldots, z_n)g) \quad (g \in K,\ \varphi \in \boldsymbol{P}_m) \tag{11.2}$$

によって線形に作用する．すなわち $(\pi_k, \boldsymbol{P}_m)$ は群 K の表現になる．この表現を行列の指数写像 (例えば 4.2 節，[38], [54] などを参照):

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni X \longmapsto \exp X := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!} \in K$$

をとおして微分すれば，リー代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の $\boldsymbol{P}_m$ 上への表現 $d\pi_k$ が，

$$d\pi_k(X)\varphi := \frac{d}{dt}\pi_k(\exp tX)\varphi_{|t=0} \quad (X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$$

により得られる．とくに $X = E_{ij}$ (行列単位) とすれば，作用素 $d\pi(E_{ij})$ は

$$d\pi(E_{ij}) = z_i\partial_j + k\delta_{ij}$$

で与えられる．ここで $k = 1/2$ としたものが $\mathfrak{k}$-加群 $\boldsymbol{P}_m$ に他ならない．

しかし，表現 π_k の定義式 (11.2) で $k = 1/2$ とすると，$(\det g)^{1/2} = \sqrt{\det g}$ は g について K 上一価関数にならないため，"$\pi_{1/2}$"は群 K の表現にはならない．$\pi_{1/2}$ を群の表現にするためには，$(\det g)^{1/2}$ の多価性を解消するため，K の二重被覆群を考える必要がある (トピックス 10; p.287 参照)．

11.1.2 ルートとウェイト

定理 11.1 を証明するために，(第 7 章や第 9 章で少し触れた) リー代数のルートや表現のウェイトの概念が必要になる．いま，$H_i := A_{ii}$ $(1 \leq i \leq n)$ を基底とする $\mathfrak{g}$ の可換部分リー代数

$$\mathfrak{h} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} h_i H_i \;\middle|\; h_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \ldots, n) \right\} \tag{11.3}$$

を考える．$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ に属する対角行列全体からなり，$\mathfrak{g}$ の**カルタン部分代数**とよばれる．$\mathfrak{h}$ 上の線形形式 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\varepsilon_i \left(\sum_{i=1}^{n} h_i H_i \right) = h_i$$

で定める．交換関係 (10.59)–(10.61) より，$H \in \mathfrak{h}$ の随伴作用 $\operatorname{ad} H$ は $\mathfrak{g}$ 上で同時対角化可能である．実際，

$$\begin{aligned} [H, A_{ij}] &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(H)\, A_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n) \\ [H, B_{ij}] &= (\varepsilon_i + \varepsilon_j)(H)\, B_{ij} \quad (1 \leq i \leq j \leq n) \\ [H, C_{ij}] &= -(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(H)\, C_{ij} \quad (1 \leq i \leq j \leq n) \end{aligned} \tag{11.4}$$

が $\operatorname{ad} H$ に関する $\mathfrak{g}$ の同時固有空間分解を与える．零でない同時固有値を定める $\mathfrak{h}$ 上の線形形式を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する**ルート**とよび，ルートの集合

$$\Delta := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

を (C_n 型) **ルート系**という．$\gamma \in \Delta$ に対して，γ に対応する同時固有ベクトル (これを**ルートベクトル**という) が生成する $\mathfrak{g}$ の部分空間を $\mathfrak{g}_\gamma$ とすれば，

$$\mathfrak{g}_\gamma = \begin{cases} \mathbb{C}\, A_{ij} & (\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j \text{ のとき}) \\ \mathbb{C}\, B_{ij} & (\gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j \text{ のとき}) \\ \mathbb{C}\, C_{ij} & (\gamma = -\varepsilon_i - \varepsilon_j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表され，リー代数 $\mathfrak{g}$ は線形空間として，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\gamma \in \Delta} \mathfrak{g}_\gamma \right) \tag{11.5}$$

と直和分解する (**ルート空間分解**)．なお，$\operatorname{ad} H$ が $\mathfrak{g}$ 上の微分であるから，

$$[\mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}] \subset \mathfrak{g}_{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta \cup \{0\}) \tag{11.6}$$

となっていることに注意せよ．ただし $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h}$, $\gamma_1 + \gamma_2 \notin \Delta \cup \{0\}$ のときには $\mathfrak{g}_{\gamma_1+\gamma_2} := \{0\}$ と規約する．

さて，ε_i $(1 \le i \le n)$ が $\mathbb{R}$ 上生成する $\mathfrak{h}^*$ の実型を $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ で表し，基底 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ が定める**辞書式順序**を $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ 上に導入しよう．すなわち，相異なる $\lambda = \sum_i \lambda_i \varepsilon_i$, $\mu = \sum_i \mu_i \varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ $(\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R})$ に対して，係数 λ_i と μ_i の大小を $i = 1, 2, \ldots$ と (番号 i について昇順に) 順次比較し，はじめて $\lambda_i \ne \mu_i$ となる番号 i において $\lambda_i > \mu_i$ であるとき，$\lambda > \mu$ と約束するのである．

(11.6) から，負のルート全体の集合

$$\Delta^- := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le j < i \le n\} \cup \{-\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \le j \le n\}$$

に対応して，

$$\mathfrak{b}_- := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}_-, \qquad \mathfrak{u}_- := \bigoplus_{\gamma \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\gamma, \tag{11.7}$$

は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数をなすことがわかる．$\mathfrak{b}_-$ を $\mathfrak{g}$ の**ボレル部分代数**という．$\mathfrak{u}_-$ は冪零行列 A_{ij} $(i > j)$ および C_{ij} $(i \le j)$ から生成される冪零部分リー代数で，$\mathfrak{b}_-$ のイデアルをなす．$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{g}$ の三角型分解 (8.2.3 節参照) とするとき，

$$\mathfrak{k} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

であって，$\mathfrak{b}_-$ は上の三角型分解にそって，

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_- &= (\mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{p}_-), \\ \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{k} &= \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k}) = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{i>j} \mathbb{C} A_{ij} \Big), \\ \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{p}_- &= \mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{p}_- = \mathfrak{p}_- = \bigoplus_{i \le j} \mathbb{C} C_{ij}, \end{aligned} \tag{11.8}$$

と分解する．このとき，$\mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{k}$ は $\mathfrak{k}$ のボレル部分代数とよばれる．

一般に，$(\pi, \boldsymbol{V})$ を $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，$\mathfrak{h}$ 上の線形形式 λ に対して $\boldsymbol{V}$ の部分線形空間 $\boldsymbol{V}(\lambda)$ を，

$$\boldsymbol{V}(\lambda) := \{v \in \boldsymbol{V} \mid \pi(H)v = \lambda(H)v \ (H \in \mathfrak{h})\}$$

で定義する．$\boldsymbol{V}(\lambda) \ne \{0\}$ のとき，λ を表現 π に対する**ウェイト**とよび，$\boldsymbol{V}(\lambda)$ を λ に付随する**ウェイト空間**，$v \in \boldsymbol{V}(\lambda)$ を**ウェイトベクトル**という．とくに，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート (またはルートベクトル) とは，随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ に関する零でないウェイト (またはウェイトベクトル) のことである．また，

$$\pi(Z)v = 0 \quad (\forall Z \in \mathfrak{u}_-) \tag{11.9}$$

なるウェイトベクトル v を $\boldsymbol{V}$ の $\mathfrak{u}_-$ に関する**最低ウェイトベクトル**よび，対応するウェイト λ を**最低ウェイト**という．

ここで，$\gamma \in \Delta \cup \{0\}$ に対して，

$$\pi(\mathfrak{g}_\gamma)\boldsymbol{V}(\lambda) \subset \boldsymbol{V}(\lambda+\gamma) \tag{11.10}$$

がなりたつことに注意する．実際，$X \in \mathfrak{g}_\gamma$, $v \in \boldsymbol{V}(\lambda)$, $H \in \mathfrak{h}$ に対して，

$$\pi(H)(\pi(X)v) = \pi(X)(\pi(H)v) + \pi([H,X])v = (\lambda+\gamma)(H)\pi(X)v$$

となるからである．したがって $\mathfrak{u}_-$ の作用は $v \in \boldsymbol{V}(\lambda)$ のウェイトを下げる．これより，π に対するウェイトたちのなかで $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ における辞書式順序について極小なものがあれば，それは最低ウェイトとなることがわかる．

注意 11.2. カルタン部分代数に関するルート系やボレル部分代数，あるいは表現の (最低) ウェイトといった概念は，複素半単純 (簡約) リー代数に共通して定式化される ([6], [22], [42])．11.2.1 節および 11.3.1 節では，それぞれ，一般線形リー代数 $\mathfrak{l} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ と直交リー代数 $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})'$ の場合を具体的に扱う．

11.1.3 最低ウェイトベクトルの決定と分解公式の証明

話をヴェイユ表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ の場合に戻そう．表現作用素 $\tilde{\varpi}(H_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は多重指数 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ $(\alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0)$ が定める単項式 $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ に，

$$\tilde{\varpi}(H_i)\, z^\alpha = \left(z_i\partial_i + \frac{1}{2}\right)\cdot z^\alpha = \left(\alpha_i + \frac{1}{2}\right) z^\alpha$$

により働くから，z^α はウェイト

$$\hat{\alpha} := \frac{1}{2}\delta + \sum_{i=1}^n \alpha_i\varepsilon_i \quad \left(\delta := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right) \tag{11.11}$$

に対応するウェイトベクトルになる．よって表現空間 $\boldsymbol{P}$ は，

$$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{\alpha} \boldsymbol{P}(\hat{\alpha}), \quad \boldsymbol{P}(\hat{\alpha}) = \mathbb{C}z^\alpha,$$

とウェイト空間分解する．

$\tilde{\varpi}$ の表現作用素の公式 (10.56)–(10.58) を用いて，$\mathfrak{g}$ の表現 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(0)} \oplus \boldsymbol{P}^{(1)}$ に対する最低ウェイトベクトルに関して，次のことを容易に確かめることができる．

補題 11.2. (i)　単項式 z^α が $\mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k}$ に関する最低ウェイトベクトルである，すなわち，

$$\tilde{\varpi}(\mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k})\, z^\alpha = 0, \tag{11.12}$$

であるためには，$\alpha = (0,\ldots,0,m)$ $(m = 0,1,\ldots)$ となることが必要十分条件である．とくに，m 次斉次多項式のなす $\mathfrak{k}$-部分加群 $\boldsymbol{P}_m$ において，条件 (11.12) を満たすウェイトベクトルは定数倍を除き一意に存在し，それは z_n^m に等しい．

(ii)　$\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{g}$-部分加群 $\boldsymbol{P}^{(0)}$, $\boldsymbol{P}^{(1)}$ は，それぞれ，(定数倍を除き) ただひとつ $\mathfrak{u}_-$ に関する最低ウェイトベクトルをもち，それらは $1 \in \boldsymbol{P}^{(0)}$, $z_n \in \boldsymbol{P}^{(1)}$ で与えられる．

問題 11.1. 上の補題を証明せよ.

以上の準備のもとに定理 11.1 を証明する.

定理 11.1 の証明. (ii) を証明する. $\mathfrak{g}$-加群 $\boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ $(\kappa = 0, 1)$ が既約であることを示そう. いま, $\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ の零でない $\mathfrak{g}$-部分加群とする. $\boldsymbol{W}$ は $\mathfrak{h}$ の作用で安定だから, $\boldsymbol{W}$ に属するウェイトベクトル (単項式) たちは $\boldsymbol{W}$ の基底をなす (問題 7.11). したがって,

$$\boldsymbol{W} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{P}_m = \bigoplus_{\alpha} \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{P}(\hat{\alpha})$$

となる. ここに, 右辺の α は任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を動く. さて, $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{P}_{m_0} \neq \{0\}$ なる最小の整数 m_0 をとる. $z^\beta \in \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{P}_{m_0}$ となる β は有限個だから, 対応するウェイト $\hat{\beta}$ たちのなかで $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 上の辞書式順序に関して最小のものが存在する. これを $\hat{\beta}_0$ で表す.

$\hat{\beta}_0$ に対応する $\boldsymbol{W}$ のウェイトベクトル z^{β_0} をとれば, (11.10) および $\hat{\beta}_0$ の最小性から $\tilde{\varpi}(A_{ij})z^{\beta_0} = 0$ $(i > j)$ がわかる. さらに, m の最小性から $\tilde{\varpi}(C_{ij})z^{\beta_0} = 0$ $(i \leq j)$ も従う. よって, $z^{\beta_0} \in \boldsymbol{W}$ は $\mathfrak{u}_-$ に関する最低ウェイトベクトルとなる. 補題 11.2 (ii) から $z_n^\kappa = z^{\beta_0} \in \boldsymbol{W}$ を得る.

さて, $\boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ のとき, $z^\alpha \notin \boldsymbol{W}$ なる単項式 z^α $(|\alpha| \equiv \kappa \mod 2)$ たちは, $\boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ における $\boldsymbol{W}$ の (内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する) 直交補空間 $\boldsymbol{W}^\perp$ の基底をなす. また, $X \in \mathfrak{g}$, $w' \in \boldsymbol{W}^\perp$ とするとき, $\boldsymbol{W}$ は $\mathfrak{g}$-不変であるから,

$$\langle \tilde{\varpi}(X)w', w \rangle = -\langle w', \tilde{\varpi}(\sigma(X))w \rangle = 0 \quad (w \in \boldsymbol{W})$$

となって $\tilde{\varpi}(X)w' \in \boldsymbol{W}^\perp$ を得る (ここに σ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する複素共役変換). つまり $\boldsymbol{W}^\perp$ も $\mathfrak{g}$-不変である. 前段の結果を $\boldsymbol{W}^\perp$ に適用することで $z_n^\kappa \in \boldsymbol{W}^\perp$ がわかるが, これは $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}^\perp = \{0\}$ に反する. ゆえに $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ でなくてはならない.

以上で, $\boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ 上に定まる $\mathfrak{g}$ の表現が既約であることが示された. また, $\boldsymbol{P}^{(0)}$, $\boldsymbol{P}^{(1)}$ の最低ウェイトは, それぞれ, $\delta/2$, $\varepsilon_n + (\delta/2)$ であって相異なるため, $\boldsymbol{P}^{(0)}$ と $\boldsymbol{P}^{(1)}$ は同型にはならない. このようにして (ii) の証明を完了する.

一方, (i) については, $\boldsymbol{P}_m$ において $\mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k}$ に関する最低ウェイトベクトルが一意であること (補題 11.2(i)) を用いて, $\mathfrak{k}$-加群 $\boldsymbol{P}_m$ が既約であることを示すことができる. (ii) の証明に倣えばよいので詳細は省略する. □

注意 11.3. 聡明な読者は, 上の証明において $z_n^\kappa = z^{\beta_0} \in \boldsymbol{W}$ が得られた時点で, この最低ウェイトベクトルに表現作用素 $\tilde{\varpi}(A_{ij}) = z_i\partial_j$ $(i \neq j)$ と $\tilde{\varpi}(B_{ij}) = \sqrt{-1}z_iz_j$ を逐次施すことにより, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}^{(\kappa)}$ がわかることに気づくはずである. あえて回り道をしてみせたのは, ヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ において, $\mathfrak{u}_-$ (あるいは $\mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k}$) に関する最低ウェイトベクトルと $\tilde{\varpi}$ の分解に現れる $\mathfrak{g}$-既約成分 (あるいは $\mathfrak{k}$-既約成分) が対応していることを, はっきりと認識しておくためである. この議論は, 11.2, 11.3 節で表現 $\tilde{\varpi}$ の制限を既約分解する際にも繰り返し使われる.

ここまでに現れた既約表現の最低ウェイトを書き留めておこう.

系 11.3. (i) m 次斉次多項式全体がつくる有限次元既約 $\mathfrak{k}$-加群 $\boldsymbol{P}_m$ は最低ウェイト $m\varepsilon_n+(\delta/2)$ をもつ.

(ii) $\boldsymbol{P}^{(\kappa)}=\bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\boldsymbol{P}_{2\ell+\kappa}$ $(\kappa=0,1)$ は, 最低ウェイト $\kappa\varepsilon_n+(\delta/2)$ をもつ無限次元の既約 $\mathfrak{g}$-加群である.

一般に, 任意の $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して, λ を唯一の最低ウェイトにもつ既約 $\mathfrak{g}$-加群, 既約 $\mathfrak{k}$-加群が, それぞれ, 同型を除き一意に存在することが知られている (これは半単純あるいは簡約な複素リー代数に共通の事実である). これらをそれぞれ $\boldsymbol{L}[\lambda]$, $\boldsymbol{V}[\lambda]$ で表す. このとき, $\mathfrak{k}$-加群 $\boldsymbol{V}[\lambda]$ $(\lambda=\sum_i\lambda_i\varepsilon_i)$ が有限次元になるためには,

$$\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n,\quad \lambda_i-\lambda_{i+1}\in\mathbb{Z}\ \ (i=1,\ldots,n-1),$$

が必要十分条件になる. これに加えて

$$\lambda_n\le 0,\quad \lambda_n\in\mathbb{Z},$$

であるとき, $\boldsymbol{L}[\lambda]$ も有限次元になる. いまここで証明なしに述べたことがらについては, 例えば, [6, Chap. 7], [22, Chap. 6] を参照されたい. トピックス 5 (p. 249) も参考になろう.

以上の記号のもとに, ヴェイユ表現 $(\tilde{\varpi},\boldsymbol{P})$ の $\mathfrak{g}$-加群, $\mathfrak{k}$-加群としての既約分解は次のように表される:

$$\boldsymbol{P}\cong\boldsymbol{L}[\delta/2]\oplus\boldsymbol{L}[\varepsilon_n+(\delta/2)]\qquad(\mathfrak{g}\text{-既約分解})\tag{11.13}$$

$$\boldsymbol{P}^{(0)}\cong\boldsymbol{L}[\delta/2]\cong\bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\boldsymbol{V}[2\ell\varepsilon_n+(\delta/2)]\qquad(\mathfrak{k}\text{-既約分解})\tag{11.14}$$

$$\boldsymbol{P}^{(1)}\cong\boldsymbol{L}[\varepsilon_n+\delta/2]\cong\bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\boldsymbol{V}[(2\ell+1)\varepsilon_n+(\delta/2)]\qquad(\mathfrak{k}\text{-既約分解})\tag{11.15}$$

上のいずれの表現の既約分解においても, 各既約表現は重複度なしにちょうど一回ずつ現れている. このような表現を**重複度自由**(multiplicity free) であるという.

問題 11.2. 有限次元複素リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群 $\boldsymbol{V}$ とその既約分解 $\boldsymbol{V}=\bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\boldsymbol{V}_\ell$ (各 $\boldsymbol{V}_\ell$ は既約) に対して, $\boldsymbol{V}$ 上の相関作用素全体が作用素の和と積 (合成) によってつくる環 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{V})$ を考える. このとき, $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{V}$ 上への表現が重複度自由であるためには, 環 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{V})$ が可換であることが必要十分条件であることを証明せよ. (シュアの補題を用いる.)

11.2 ユニタリ リー代数 $\mathfrak{u}(p,q)$ への制限とはしご表現

$n=p+q$ とし, 符号 (p,q) の非退化エルミート形式に付随したユニタリリー代数 $\mathfrak{l}_0:=\mathfrak{u}(p,q)$ ((8.12) 参照) を考える. $\mathfrak{l}_0$ の複素化 $\mathfrak{l}$ は一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ である. 8.2.1 節で構成し

た埋め込み：

$$\mathfrak{l} \overset{\tilde{\iota}}{\hookrightarrow} \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \quad ((8.27), (8.28) \text{ を参照})$$

をとおして，$\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}$ の部分リー代数とみなす．命題 8.7 より，$\mathfrak{l}_0$ の $\mathfrak{g}_0$ におけるその中心化リー代数 $\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{l}_0^\vee \cong \mathfrak{u}(1)$ はちょうど $\mathfrak{l}_0$ の中心と一致し，$(\mathfrak{l}_0, \mathfrak{c}_0)$ は $\mathfrak{g}_0$ においてデュアルペアをなす．同様に，$\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{c} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{c}_0$ は複素化 $\mathfrak{g}$ でのデュアルペアを与えている．この節では，$\mathfrak{g}$ のヴェイユ表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ が $\mathfrak{l}$-加群，あるいは $\mathfrak{k}^\mathfrak{l} := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}$ 上の加群としてどのように分岐するかを明らかにする．

11.2.1 部分リー代数 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$

埋め込み $\tilde{\iota}$ の表示式 (8.28) より，$\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ はカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を含む．Δ の部分集合 $\Delta_\mathfrak{l}$ を，

$$\begin{aligned}\Delta_\mathfrak{l} := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i,j \le p,\ i \ne j\} \cup \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid p+1 \le i,j \le n,\ i \ne j\} \\ \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mid 1 \le i \le p,\ p+1 \le j \le n\}\end{aligned} \tag{11.16}$$

で定めれば，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{l}$ 上への随伴表現により，$\mathfrak{l}$ は

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\gamma \in \Delta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_\gamma\Bigr) \tag{11.17}$$

とルート空間分解する．$\Delta_\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{l}$ の $\mathfrak{h}$ に関する (A_{n-1} 型) ルート系という．$\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ の辞書式順序に関する負のルートたち

$$\begin{aligned}\Delta_\mathfrak{l}^- := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le j < i \le p\} \cup \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid p+1 \le j < i \le n\} \\ \cup \{-\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \le p,\ p+1 \le j \le n\}\end{aligned}$$

に対応して，$\mathfrak{l}$ のボレル部分代数を

$$\mathfrak{b}_-^\mathfrak{l} := \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}_-^\mathfrak{l}, \quad \mathfrak{u}_-^\mathfrak{l} := \mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{l} = \bigoplus_{\gamma \in \Delta_\mathfrak{l}^-} \mathfrak{g}_\gamma,$$

によって定義する．

また，エルミート型実型 $\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{u}(p,q)$ に付随した三角型分解

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_+^\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{k}^\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}_-^\mathfrak{l} \quad (\mathfrak{k}^\mathfrak{l} \cong \mathfrak{gl}(p,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}(q,\mathbb{C})) \tag{11.18}$$

は，$\mathfrak{g}$ の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ から，

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}^\mathfrak{l} &= \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\substack{1 \le i,j \le p \\ i \ne j}} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\substack{p+1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}\Bigr), \\ \mathfrak{p}_\pm^\mathfrak{l} &:= \mathfrak{p}_\pm \cap \mathfrak{l} = \bigoplus_{\substack{1 \le i \le p \\ p+1 \le j \le n}} \mathfrak{g}_{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j)},\end{aligned} \tag{11.19}$$

により得られる．

なお，リー代数 $\mathfrak{l}$ の表現についても，ウェイト (またはウェイトベクトル)，および，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}$，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}^{\mathfrak{l}} = \mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}$ に関する最低ウェイト (または最低ウェイトベクトル) を，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{l}$ に置き換えて，11.1.2 節と全く同様に定義する．

11.2.2　相関作用素 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}})$ の固有空間分解

一般に，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー代数とするとき，ヴェイユ表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ の $\mathfrak{a}$ への制限を $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{a}}$ で表す．ここでは $\mathfrak{l}$ への制限 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ を扱う．三角型分解 $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_+^{\mathfrak{l}} \oplus \mathfrak{k}^{\mathfrak{l}} \oplus \mathfrak{p}_-^{\mathfrak{l}}$ にそって，

$$
\begin{aligned}
&\{A_{ij} \mid 1 \le i,j \le p \text{ または } p+1 \le i,j \le n\} && (\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}} \text{ の基底})\\
&\{B_{ij} \mid 1 \le i \le p,\ p+1 \le j \le n\} && (\mathfrak{p}_+^{\mathfrak{l}} \text{ の基底})\\
&\{C_{ij} \mid 1 \le i \le p,\ p+1 \le j \le n\} && (\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{l}} \text{ の基底})
\end{aligned}
\tag{11.20}
$$

をあわせることで，線形空間 $\mathfrak{l}$ の基底が得られる．このとき，定理 10.17 に基づき，表現 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の作用素を具体的に書き下すことができるが (自分で実際に書いてみよう)，とくに $\mathfrak{l}$ の (1 次元の) 中心 $\mathfrak{c} = \mathfrak{l}^{\vee}$ の要素

$$
H_{\mathfrak{c}} := \sum_{i=1}^{p} H_i - \sum_{j=p+1}^{n} H_j = \begin{pmatrix} I(p) & O \\ O & -I(p) \end{pmatrix} \quad (\text{命題 8.7 参照}) \tag{11.21}
$$

の $\boldsymbol{P}$ 上への作用は，

$$
\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}}) = \left(\sum_{i=1}^{p} z_i \partial_i - \sum_{j=p+1}^{n} z_j \partial_j \right) + \frac{p-q}{2} \tag{11.22}
$$

と表される．

命題 11.4. 非負整数 ℓ, m に対して，変数 $z_1, \ldots, z_p$ に関して ℓ 次斉次，かつ，変数 $z_{p+1}, \ldots, z_n$ に関して m 次斉次である多項式全体がつくる $\boldsymbol{P}$ の部分空間を $\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ で表す．

(i)　$\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ は $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$-不変である．さらに，$\varphi \in \boldsymbol{P}_{\ell,m}$ に対し，

$$
\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}})\varphi = \bigl(\ell - m + (p-q)/2\bigr)\varphi
$$

がなりたつ．

(ii)　$k \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$
\boldsymbol{P}_{(k)} := \bigoplus_{\substack{\ell,m \ge 0 \\ \ell - m = k}} \boldsymbol{P}_{\ell,m} \tag{11.23}
$$

は作用素 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}})$ の固有値 $k+(p-q)/2$ に対応する固有空間であり，

$$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}_{(k)} \tag{11.24}$$

は $\boldsymbol{P}$ の $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}})$ に関する固有空間分解を与える．さらに $\boldsymbol{P}_{(k)}$ は $\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{l}$-不変部分空間である．

証明． まず，$\boldsymbol{P}$ 上の 1 次変換

$$\sum_{i=1}^{p} z_i\partial_i = \tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}\left(\sum_{i=1}^{p} H_i\right) - \frac{p}{2}, \quad \sum_{j=p+1}^{n} z_j\partial_j = \tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}\left(\sum_{j=p+1}^{n} H_j\right) - \frac{q}{2}$$

が，それぞれ，変数 $(z_1,\ldots,z_p)$, $(z_{p+1},\ldots,z_n)$ に関する次数作用素 (10.2.1 節参照) であることに注意せよ．$\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ はこれらの次数作用素に関する (ℓ,m)-同時固有空間であって，$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{\ell,m=0}^{\infty} \boldsymbol{P}_{\ell,m}$ が $\boldsymbol{P}$ の同時固有空間分解を与える．一方，$\sum_{i=1}^{p} H_i$ と $\sum_{j=p+1}^{n} H_j$ は，ともに $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}} \cong \mathfrak{gl}(p,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}(q,\mathbb{C})$ の中心に属することから，同時固有空間 $\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ は $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$-不変であることがわかる．

(i) の後半と (ii) の前半の主張は，$H_{\mathfrak{c}}$ の定義 (11.21) から，もはや明らかである．また $[\mathfrak{l},\mathfrak{c}]=0$ であるから，$\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H_{\mathfrak{c}})$ は表現 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の相関作用素を与える．よって，その固有空間 $\boldsymbol{P}_{(k)}$ は $\mathfrak{l}$-不変である． □

11.2.3 表現 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の分解公式とはしご表現

結局 (11.24) が表現 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の既約分解を与えることになるのだが，これを示すため，$\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$-加群 $\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ と $\mathfrak{l}$-加群 $\boldsymbol{P}_{(k)}$ における最低ウェイトベクトルを決定する．

補題 11.5. (i) $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$-加群 $\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ $(\ell,m\geq 0)$ において，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ に関する最低ウェイトベクトルが定数倍を除き一意に存在し，それは $z_p^{\ell}z_n^{m}$ に等しい．

(ii) $\mathfrak{l}$-加群 $\boldsymbol{P}_{(k)} = \bigoplus_{\ell-m=k} \boldsymbol{P}_{\ell,m}$ $(k\in\mathbb{Z})$ において，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}$ に関する最低ウェイトベクトルが定数倍を除き一意に存在し，それは z_p^{k} $(k\geq 0$ のとき$)$，または z_n^{-k} $(k\leq 0$ のとき$)$ に等しい．

証明． (i) 冪零リー代数 $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ は，行列

$$A_{ij} \quad (1\leq j<i\leq p \ \text{または}\ p+1\leq j<i\leq n) \tag{11.25}$$

を基底にもつので，ウェイトベクトル

$$z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n} \in \boldsymbol{P}_{\ell,m} \quad (\alpha_1+\cdots+\alpha_p=\ell,\ \alpha_{p+1}+\cdots+\alpha_n=m)$$

が $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ に関する最低ウェイトベクトルであるためには，

$$0 = \tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(A_{ij})z^{\alpha} = z_i\partial_j z^{\alpha} = \alpha_j z^{\alpha-\delta(j)+\delta(i)} \tag{11.26}$$

が，上の (11.25) の範囲の勝手な (i,j) についてなりたつことが条件となる．$1 \le j < i \le p$ の場合の条件から，補題 11.2 (i) と全く同様にして，

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p) = (0, \ldots, 0, \ell)$$

が従う．さらに $p+1 \le j < i \le n$ の場合の条件から，

$$(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = (0, \ldots, 0, m)$$

が得られ，結局 $z^\alpha = z_p^\ell z_n^m$ がわかる．

(ii) $k \ge 0$ の場合に証明する．$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}} = (\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}) \oplus \mathfrak{p}_-^{\mathfrak{l}}$ だから，(11.25) の A_{ij} たちに $\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{l}}$ の基底 C_{ij} $(1 \le i \le p,\, p+1 \le j \le n)$ をあわせたものが $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}$ の基底となっている．(i) より，$\boldsymbol{P}_{(k)}$ における $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ に関する最低ウェイトベクトルは，定数倍を除き，

$$z_p^{k+t} z_n^t \quad (t = 0, 1, \ldots)$$

のいずれかである．ところが，

$$\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(C_{ij}) z_p^{k+t} z_n^t = \sqrt{-1}(k+t)t\delta_{ip}\delta_{jn} z_p^{k+t-1} z_n^{t-1}$$

であるから，$z_p^{k+t} z_n^t$ が $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}$ に関する最低ウェイトベクトルになるためには $t=0$ が必要十分条件となる． □

さて，上の補題 11.5 を用いて，表現 $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の既約分解を次のように与えることができる．

定理 11.6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の部分リー代数 $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ およびそのエルミート型実型 $\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{u}(p,q)$ を考える．

(i) 非負整数 ℓ, m に対して，$\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ は，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ に関する最低ウェイト $\ell\varepsilon_p + m\varepsilon_n + (\delta/2)$ をもつ既約 $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$-加群である．

(ii) ヴェイユ表現の $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ への制限は重複度自由であり，$\boldsymbol{P} = \displaystyle\bigoplus_{\ell,m=0}^{\infty} \boldsymbol{P}_{\ell,m}$ がその既約分解を与える．

(iii) $k \in \mathbb{Z}$ に対し，$\boldsymbol{P}_{(k)} = \bigoplus_{\ell-m=k} \boldsymbol{P}_{\ell,m}$ は既約 $\mathfrak{l}$-加群であり，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}}$ に関して最低ウェイト $k\varepsilon_p + (\delta/2)$ ($k \ge 0$ のとき), または，$-k\varepsilon_n + (\delta/2)$ ($k \le 0$ のとき) をもつ．

(iv) ヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ の $\mathfrak{l}$ への制限 $(\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}, \boldsymbol{P})$ は重複度自由であり，$\boldsymbol{P} = \displaystyle\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}_{(k)}$ が $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の既約分解を与える．

$\mathfrak{l}_0$ の既約ユニタリ表現 $(\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}, \boldsymbol{P}_{(k)})$ $(k \in \mathbb{Z})$ を，$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}(p,q)$ の**はしご表現**とよぶ．

定理 11.6 は，ヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ について補題 11.2 から $\tilde{\varpi}$ の既約分解 (定理 11.1, 系 11.3) を導いたのと全く同じ手順で証明することができる．同じことの繰り返しになるため，紙面の節約のため証明は割愛する．

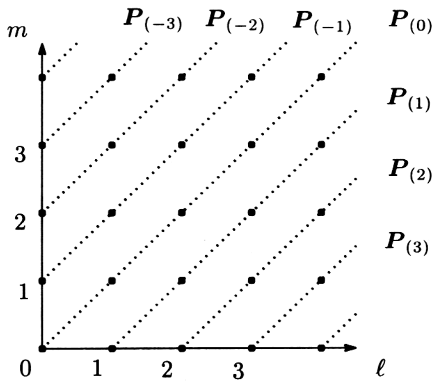


図 11.1. $\mathfrak{u}(p,q)$ のはしご表現 $\boldsymbol{P}_{(k)}$

11.1.3 節と同様に，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を最低ウェイトにもつ既約 $\mathfrak{l}$-加群と既約 $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$-加群を，それぞれ，$\boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[\lambda]$, $\boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}}[\lambda]$ で表す．上の定理で与えた既約分解を最低ウェイトを用いて書き直しておこう：

$$\boldsymbol{P} \cong \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[k\varepsilon_p + (\delta/2)]\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[k\varepsilon_n + (\delta/2)]\right) \tag{11.27}$$

$$\boldsymbol{P} \cong \bigoplus_{\ell,m=0}^{\infty} \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}}[\ell\varepsilon_p + m\varepsilon_n + (\delta/2)] \tag{11.28}$$

$$\boldsymbol{P}_{(k)} \cong \boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[k\varepsilon_p + (\delta/2)] \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}}[(k+m)\varepsilon_p + m\varepsilon_n + (\delta/2)] \quad (k \geq 0) \tag{11.29}$$

$$\boldsymbol{P}_{(-k)} \cong \boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[k\varepsilon_n + (\delta/2)] \cong \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}}[\ell\varepsilon_p + (k+\ell)\varepsilon_n + (\delta/2)] \quad (k \geq 0) \tag{11.30}$$

ここに (11.27) は $\mathfrak{l}$-既約分解であり，(11.28)–(11.30) は $\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}$ の表現としての既約分解である．

例 11.1. $p = q = 1$ の場合，リー代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の半単純元 $H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は，埋め込み $\tilde{\iota} : \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$ をとおして，対角行列

$$\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \quad (E_2 \text{ は } 2 \text{ 次単位行列})$$

と同一視される．したがって，$\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}$ の既約成分 $\boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[k\varepsilon_p + (\delta/2)]$ $(p = 1)$, $\boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[k\varepsilon_n + (\delta/2)]$ $(n = 2)$ における $\tilde{\varpi}_{\mathfrak{l}}(H)$ の固有値（ウェイト）は，$k+1+2s$ $(s = 0, 1, \ldots)$ となる．この表現は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上の加群としては，実型 $\mathfrak{su}(1,1)$ に関する既約ハリシュ-チャンドラ加群 $\boldsymbol{D}_{k+1}^{+}$(9.2.2 参照) に他ならない．(11.28) より，$\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$ のヴェイユ表現は，部分リー代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上で，

$$\boldsymbol{P} \cong \boldsymbol{D}_1^{+} \oplus \left(\bigoplus_{k=2}^{\infty} [2] \cdot \boldsymbol{D}_k^{+}\right)$$

と既約分解する．ここに $[2]\cdot \boldsymbol{D}_k^+ := \boldsymbol{D}_k^+ \oplus \boldsymbol{D}_k^+$ $(k \geq 2)$ であり，この部分の重複度が 2 であるから，上の分解は重複度自由ではない．$\mathfrak{l} = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ から $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}] = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に制限する際に，重複度の単一性がやぶれるのである．

11.3 直交リー代数 $\mathfrak{o}^*(2n)$ への制限とはしご表現

こんどは $\mathfrak{m} := \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})'$ を $2n$ 次の複素直交リー代数 (実現 (8.31) による) とし，$\mathfrak{m}$ の DIII 型の実型 $\mathfrak{m}_0 := \mathfrak{o}^*(2n)$ を考える．埋め込み $\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})' \hookrightarrow \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ ((8.35) 参照) をとおして，$\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}$ を，それぞれ，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ の部分リー代数とみなす．この節では，$\mathfrak{g}$ のヴェイユ表現 $(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ を $\mathfrak{m}$-加群として既約分解する．その既約成分として最低ウェイトをもつ $\mathfrak{m}_0$ の既約ユニタリ表現の一系列 $\boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}]$ (はしご表現; 定理 11.18) を得る．

なお，分解公式を導くにあたっては，ユニタリリー代数 $\mathfrak{l}_0$ の場合と同様，$\mathfrak{g}$ におけるデュアルペア $(\mathfrak{m},\mathfrak{s})$ が大切な働きをする．ここに $\mathfrak{s} = \mathfrak{m}^\vee$ $(\cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ は $\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{g}$ における中心化リー代数である (命題 8.9)．このとき，$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{s} = \{0\}$ であるから，$\mathfrak{g}$ のなかに半単純リー代数

$$\hat{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \cong \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})' \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \tag{11.31}$$

が生じるが，ヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ の $\hat{\mathfrak{m}}$ への制限を既約分解することが本質的なステップになる．

11.3.1 部分リー代数 $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$

まず，$\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{s}$, $\hat{\mathfrak{m}}$ の三角型分解やルート系などを，のちほど必要となる範囲で書き下すことから始める．やたらと記号が出てくるが，本節で扱うのはすべて具体的な行列である．ここでは紙面の節約のため現れる行列を A'_{ij}, B'_{ij} などの記号により表記しているが，これらが実際にどのような行列であるかを，紙に書いて具体的に理解するとよい．

$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathfrak{g}$ ((10.45)–(10.47) 参照) を用いて，行列 $A'_{ij}, B'_{ij}, C'_{ij}$ を，

$$\begin{aligned} A'_{ij} &:= A_{ij} + A_{n+i,n+j} \quad (1 \leq i,j \leq n), \\ B'_{ij} &:= B_{i,n+j} - B_{j,n+i} \quad (1 \leq i < j \leq n), \\ C'_{ij} &:= C_{i,n+j} - C_{j,n+i} \quad (1 \leq i < j \leq n), \end{aligned} \tag{11.32}$$

で定める．例えば，A'_{ij} は次の形の $4n$ 次正方行列である:

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & O & O & O \\ O & E_{ij} & O & O \\ O & O & -E_{ji} & O \\ O & O & O & -E_{ji} \end{pmatrix} \quad (E_{ij} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ は第 } (i,j) \text{ 行列単位}).$$

$\mathfrak{m}$ に属する行列の表示式 (8.35) から，(11.32) で定義した行列たちが部分リー代数 $\mathfrak{m}$ の基底をなすことを確かめるのはやさしい．さらに，$\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}} := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}_{\pm}^{\mathfrak{m}} := \mathfrak{p}_{\pm} \cap \mathfrak{m}$ とおけば，$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の三角型分解にそって，

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_{+}^{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{k}^{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{p}_{-}^{\mathfrak{m}} \tag{11.33}$$

と分解し，$\{A'_{ij}\}$, $\{B'_{ij}\}$, $\{C'_{ij}\}$ は，それぞれ，$\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{p}_{+}^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{p}_{-}^{\mathfrak{m}}$ の基底をなしている．

次に，$H'_i := A'_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が，$\mathfrak{m}$ に属する対角行列全体のなす可換な部分リー代数 ($\mathfrak{m}$ のカルタン部分代数):

$$\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} h_i H'_i \;\middle|\; h_i \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}$$

の基底となっていることに注意して，11.1.2 節と同様に，線形形式 $\varepsilon_i \in (\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^*$ を，

$$\varepsilon_i\Big(\sum_{i=1}^{n} h_i H'_i\Big) = h_i$$

により定める．このとき，$H' \in \mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}$ の随伴作用 $\operatorname{ad} H'$ は $\mathfrak{m}$ 上で次のように同時対角化可能である．

$$\begin{aligned} [H', A'_{ij}] &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(H')\, A'_{ij}, \\ [H', B'_{ij}] &= (\varepsilon_i + \varepsilon_j)(H')\, B'_{ij}, \\ [H', C'_{ij}] &= -(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(H')\, C'_{ij}. \end{aligned} \tag{11.34}$$

ここに現れる $\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}$ 上の零でない線形形式 ($\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}$ に関するルート) の集合

$$\Delta_{\mathfrak{m}} := \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i, j \le n, i \ne j\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mid 1 \le i < j \le n\}$$

を $\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}$ に関する (D_n 型) ルート系という．$\gamma \in \Delta_{\mathfrak{m}}$ に対して，γ に対応する同時固有ベクトル (ルートベクトル) が生成する $\mathfrak{m}$ の (ルート) 部分空間 $\mathfrak{m}_\gamma$ は，

$$\mathfrak{m}_\gamma = \begin{cases} \mathbb{C}\, A'_{ij} & (\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j \text{ のとき}) \\ \mathbb{C}\, B'_{ij} & (\gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j \text{ のとき}) \\ \mathbb{C}\, C'_{ij} & (\gamma = -\varepsilon_i - \varepsilon_j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表され，リー代数 $\mathfrak{m}$ は線形空間として，

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^{\mathfrak{m}} \oplus \Big(\bigoplus_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{m}}} \mathfrak{m}_\gamma \Big) \tag{11.35}$$

とルート空間分解する．これと三角型分解 (11.33) との間の関係は，

$$\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{h}^{\mathfrak{m}} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} \mathfrak{m}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \Big), \quad \mathfrak{p}_{\pm}^{\mathfrak{m}} = \bigoplus_{1 \le i < j \le n} \mathfrak{m}_{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} \ (\text{複号同順}), \tag{11.36}$$

となっている．

注意 11.4. $\mathfrak{l}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の場合と異なり，$\mathfrak{m}$ のルート部分空間 $\mathfrak{m}_\gamma$ $(\gamma\in\Delta_{\mathfrak{m}})$ は，$\mathfrak{g}$ のルート部分空間にはなっていない．実際，この 2 種類のルート部分空間の間の関係は次のとおりである．

$$\mathfrak{m}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=(\mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}+\mathfrak{g}_{\varepsilon_{n+i}-\varepsilon_{n+j}})\cap\mathfrak{m},$$
$$\mathfrak{m}_{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)}=(\mathfrak{g}_{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_{n+j})}+\mathfrak{g}_{\pm(\varepsilon_j+\varepsilon_{n+i})})\cap\mathfrak{m}\quad(\text{複号同順}).$$

こんどは，$\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{g}$ における中心化リー代数 $\mathfrak{s}=\mathbb{C}X_{\mathfrak{s},+}+\mathbb{C}H_{\mathfrak{s}}+\mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (命題 8.9) を考える．$\mathfrak{s}$ を定める標準トリプル $(X_{\mathfrak{s},+},\ H_{\mathfrak{s}},\ X_{\mathfrak{s},-})$ は，$\mathfrak{k}$ の基底 A_{ij} $(H_i=A_{ii})$ を用いて，

$$X_{\mathfrak{s},+}=\sum_{i=1}^{n}A_{i,n+i},\quad H_{\mathfrak{s}}=\sum_{i=1}^{n}(H_i-H_{n+i}),\quad X_{\mathfrak{s},-}=\sum_{i=1}^{n}A_{n+i,i},\tag{11.37}$$

と表される．

線形形式 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ を $\mathbb{R}$ 上の基底とする $(\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^*$ の実型 $(\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^*_{\mathbb{R}}$ に，この基底による辞書式順序 (11.1.2 節参照) を導入し，負のルート全体の集合を $\Delta_{\mathfrak{m}}^-$ で表す：

$$\Delta_{\mathfrak{m}}^-:=\{\gamma\in\Delta_{\mathfrak{m}}\mid\gamma<0\}=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j,\ -\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid 1\le j<i\le n\}.$$

部分リー代数 $\mathfrak{l}$ の場合と同様に，$\mathfrak{m},\mathfrak{s},\hat{\mathfrak{m}}$ のボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{m}},\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{s}},\mathfrak{b}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}$ を，$\mathfrak{g}$ のボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{u}_-$ との共通部分をとることによって，それぞれ，

$$\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{m}}:=\mathfrak{b}_-\cap\mathfrak{m},\quad\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{s}}:=\mathfrak{b}_-\cap\mathfrak{s},\quad\mathfrak{b}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}:=\mathfrak{b}_-\cap\hat{\mathfrak{m}},$$

により定義する．これらの部分代数は，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}\oplus\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{m}},\qquad\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{m}}:=\mathfrak{u}_-\cap\mathfrak{m}=\bigoplus_{\gamma\in\Delta_{\mathfrak{m}}^-}\mathfrak{m}_\gamma,\\
&\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{s}}=\mathbb{C}H_{\mathfrak{s}}\oplus\mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-},\\
&\mathfrak{b}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}=\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}\oplus\mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}},\qquad\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}:=\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}\oplus\mathbb{C}H_{\mathfrak{s}},\ \mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}:=\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{m}}\oplus\mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-},
\end{aligned}\tag{11.38}$$

と分解する．各行の第 1 式において，右辺の第 1 項は $\mathfrak{h}$ との共通部分 (半単純部分)，第 2 項は $\mathfrak{u}_-$ との共通部分 (冪零部分) である．さらに $\mathfrak{k}$ との共通部分を考えて，$\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}:=\mathfrak{k}\cap\hat{\mathfrak{m}}$ のボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}}:=\mathfrak{b}_-\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}:=\mathfrak{b}_-\cap\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}}=\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}\oplus(\mathfrak{u}_-\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}),\quad\mathfrak{u}_-\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}=\bigoplus_{1\le j<i\le n}\mathfrak{m}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j},\\
&\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}=\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}\oplus\{(\mathfrak{u}_-\cap\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}})\oplus\mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-}\},
\end{aligned}\tag{11.39}$$

と表される．

11.3.2 表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の作用素

いま，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ が $\boldsymbol{P}=\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_{2n}]$ に働くヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ について，その $\hat{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{s}$ への制限 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の表現作用素を具体的に書き下しておこう．

命題 11.7. 表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ による $\hat{\mathfrak{m}}$ の基底 $A'_{ij}, B'_{ij}, C'_{ij}, X_{\mathfrak{s},+}, H_{\mathfrak{s}}, X_{\mathfrak{s},-}$ の表現作用素は次のとおり：

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(A'_{ij}) = z_i\partial_j + z_{n+i}\partial_{n+j} + \delta_{ij}, \tag{11.40}$$

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(B'_{ij}) = \sqrt{-1}(z_iz_{n+j} - z_jz_{n+i}), \tag{11.41}$$

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(C'_{ij}) = \sqrt{-1}(\partial_i\partial_{n+j} - \partial_j\partial_{n+i}), \tag{11.42}$$

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(X_{\mathfrak{s},+}) = \sum_{i=1}^{n} z_i\partial_{i+n}, \tag{11.43}$$

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(H_{\mathfrak{s}}) = \sum_{i=1}^{n}(z_i\partial_i - z_{n+i}\partial_{n+i}), \tag{11.44}$$

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(X_{\mathfrak{s},-}) = \sum_{i=1}^{n} z_{n+i}\partial_i. \tag{11.45}$$

証明. 等式 (11.32) と (11.37) に注意して定理 10.17 を適用すればよい. □

今後，$2n$ 個の変数 $z_1, \ldots, z_{2n}$ を $2 \times n$ 行列

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_i & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{n+i} & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix} \tag{11.46}$$

の形にならべ，$\boldsymbol{P}$ を 2 行 n 列の複素行列がつくる線形空間 $M_{2,n} := M_{2,n}(\mathbb{C})$ 上の多項式関数全体 $\mathbb{C}[M_{2,n}]$ と同一視する．表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関する最低ウェイトベクトルを決定するために，次の簡単な補題が役立つことになる．

補題 11.8. $\varphi \in \boldsymbol{P} = \mathbb{C}[M_{2,n}]$ とする．

(i) $1 \leq i \neq j \leq n$ なる (i,j) を固定するとき，$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(A'_{ij})\varphi = 0$ であるためには，任意の $t \in \mathbb{C}$ に対して

$$\varphi\begin{pmatrix} z_1 & \cdots & \overset{\text{第}\,j\,\text{列}}{z_j + tz_i} & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{n+j} + tz_{n+i} & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_j & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{n+j} & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix} \tag{11.47}$$

がなりたつことが必要十分条件である．

(ii) $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(X_{\mathfrak{s},-})\varphi = 0$ であるためには，任意の $t \in \mathbb{C}$ に対して

$$\varphi\begin{pmatrix} z_1 + tz_{n+1} & \cdots & z_i + tz_{n+i} & \cdots & z_n + tz_{2n} \\ z_{n+1} & \cdots & z_{n+i} & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_i & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{n+i} & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix} \tag{11.48}$$

がなりたつことが必要十分条件である．

証明. (11.47) の左辺を t の関数とみなしたものを $\psi(t)$ とする．t に関して微分して，

$$\frac{d\psi}{dt} = \{(z_i\partial_j + z_{n+i}\partial_{n+j})\,\varphi\}\begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_j + tz_i & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{n+j} + tz_{n+i} & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix}$$

を得る．これと (11.40) から，$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(A'_{ij})\varphi = 0$ がなりたつのは，$\psi(t)$ が t の定数関数となる場合である．よって，(i) が示された．(ii) も全く同様に考えればよい． □

なお，条件 (11.47) は，多項式 $\varphi(z)$ が，行列 z の第 j 列に第 i 列の t 倍を加える**列基本変形**を施しても変らないことを意味する．同様に，(11.48) は，z の第 1 行に第 2 行の t 倍を加える**行基本変形**に関する $\varphi(z)$ の不変性を表している．

11.3.3 消滅代数 $\mathcal{N}$ と最低ウェイトベクトル

リー代数 $\hat{\mathfrak{m}}$ の $\mathfrak{k}$-部分 $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ の作用に関してヴェイユ表現を既約分解するため，$\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ のボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ の冪零部分 $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} := (\mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}) \oplus \mathbb{C}X_{\mathfrak{s},-}$ ((11.39) 参照) が消滅させる多項式の空間：

$$\mathcal{N} := \{\varphi \in \boldsymbol{P} \mid \tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(A'_{ij})\varphi = 0 \ (1 \le j < i \le n),\ \tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(X_{\mathfrak{s},-})\varphi = 0\} \tag{11.49}$$

の構造を決定しよう．作用素 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(A'_{ij})$ と $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(X_{\mathfrak{s},-})$ はともに 1 階の微分作用素であるから，多項式の通常の和と積に関して，$\mathcal{N}$ は $\boldsymbol{P}$ の部分代数となることに注意せよ．本稿では $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ の作用に関する**消滅代数**と名づけ，$\mathcal{N}$ の各要素のことを**消滅多項式**とよぶ．

いま多項式 $f_1, f_2 \in \boldsymbol{P}$ を，

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= z_{2n}, \\ f_2(z) &:= z_{n-1}z_{2n} - z_n z_{2n-1} = \det\begin{pmatrix} z_{n-1} & z_n \\ z_{2n-1} & z_{2n} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11.50}$$

で定める．これらの多項式は，明らかに補題 11.8 の条件 (11.47) (ただし $i > j$) および (11.48) を満たす．よって f_1, f_2 の任意の多項式は $\mathcal{N}$ に属するが，その逆も正しい：

命題 11.9. 消滅代数 $\mathcal{N}$ は f_1, f_2 が生成する $\boldsymbol{P}$ の部分代数 $\mathbb{C}[f_1, f_2]$ に一致する．

この事実にかんがみ，f_1, f_2 を**基本消滅多項式**とよぼう．

命題 11.9 の証明. $f_1(z) \neq 0$ かつ $f_2(z) \neq 0$ なる $z \in M_{2,n}$ に対して，$2 \times n$ 行列 z に，第 i 列の何倍かを第 j 列に加える $(i > j)$，および，第 1 行に第 2 行の何倍かを加える，の 2 種類の基本変形を繰り返すことで，z は次の簡約化された行列 z' に変形できる：

$$z' := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_2(z)/f_1(z) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1(z) \end{pmatrix}.$$

実際，z の第 $(2,n)$ 成分 $f_1(z) = z_{2n}$ を要にして第 2 行，続いて第 n 列を掃き出す．得られた行列の第 $(1,n-1)$ 成分は $f_2(z)/f_1(z)$ となり，零でないから，この成分を要にして，第 1 行のうちの最初の $n-2$ 個の成分を零にすると z' が得られる．

このとき，$f \in \mathcal{N}$ に対して，補題 11.8 より $f(z) = f(z')$ がなりたつ．したがって f は f_1, f_2 の多項式に表される：$\mathcal{N} \subset \mathbb{C}[f_1, f_2]$．反対向きの包含関係はすでに示してあるから，これで命題の証明を完了する． □

◆トピックス 11 (数学書を読むときの心得). ……………………………………………………………

一般に，数学の本や論文を読むときに，書いてあることがすべて正しい，あるいは論理的に完全である，と鵜呑(うの)みにするのはよろしくない．さまざまな理由で，実際には正しいが丁寧に書くと少しめんどうな部分を省略することはめずらしくない．定理自体が間違っていることもある．そのような場面に出くわしたとき，自分で納得ができない所をしっかりメモするなり印でもつけておいて，時間があるときにとことん考えてみることが大切である．理解の度合いが大いに深まるはずである．さらに，それが新しい研究に結びつくこともある (例えば [50])．

さて，ボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ の冪零部分 $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ は $\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ のイデアルであるから，半単純部分 $\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{h}^{\mathfrak{m}} \oplus \mathbb{C}H_{\mathfrak{s}}$ は冪零部分に随伴表現により作用する．これより消滅代数 $\mathcal{N}$ は $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}})$-不変であることがわかる．$\mathcal{N}$ への $\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ の作用を具体的に書くと次のようになる．

命題 11.10. $H' \in \mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}$ と $H_{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{s}$ は $\mathcal{N}$ の基底 $f_1^k f_2^\ell$ $(k, \ell \geq 0)$ に

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(H') \cdot f_1^k f_2^\ell = (\ell\varepsilon_{n-1} + (k+\ell)\varepsilon_n + \delta)(H') \cdot f_1^k f_2^\ell, \tag{11.51}$$

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(H_{\mathfrak{s}}) \cdot f_1^k f_2^\ell = (-k) \cdot f_1^k f_2^\ell, \tag{11.52}$$

により作用する．ただし $\delta = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ である．

証明は，微分作用素 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(H_i')$ $(H' = A_{ii}')$ と $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(H_{\mathfrak{s}})$ の表示式 (11.40) と (11.44) に基づき，$f_1^k f_2^\ell$ の微分を直接計算すればよい．単純作業なので練習問題としておこう．なお，多項式の族 $\{f_1^k f_2^\ell \mid k, \ell = 0, 1, \ldots\}$ が 1 次独立であることは，(11.51) によって，対応するウェイトが互いに相異なることからわかる．

問題 11.3. 等式 (11.51) および (11.52) を確かめよ．

命題 11.9 と命題 11.10 をあわせて，$\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ に関する最低ウェイトベクトル (つまり $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ で消滅する $\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-同時固有ベクトル) と対応する最低ウェイトが次のように決定された．

定理 11.11. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ のヴェイユ表現 $\boldsymbol{P}$ において，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ $(\subset \mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} \subset \mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}})$ に関する最低ウェイトベクトルは，定数倍を除き，ちょうど基本消滅多項式の単項式 $f_1^k f_2^\ell$ $(k, \ell \geq 0)$ のかたちである．また，$\lambda_{k,\ell} := \ell\varepsilon_{n-1} + (k+\ell)\varepsilon_n + \delta \in (\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})_{\mathbb{R}}^*$ とおくとき，$f_1^k f_2^\ell$ に対応する最低ウェイトは，

$$\hat{\lambda}_{k,\ell} := (\lambda_{k,\ell}, -k) \in (\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})_{\mathbb{R}}^* \oplus (\mathbb{C}H_{\mathfrak{s}})^* \tag{11.53}$$

で与えられる．ただし，H_5 が生成する 1 次元線形空間上の線形形式 $\nu \in (\mathbb{C}H_5)^*$ を複素数 $\nu(H_5)$ と同一視している．

次に，$\boldsymbol{P} = \mathbb{C}[M_{2,n}]$ において，$\hat{\mathfrak{m}}$ のボレル部分代数 $\mathfrak{b}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}$ の冪零部分 $\mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関する最低ウェイトベクトルを求めておこう．$\mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}$ は，すでに扱った $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ に C'_{ij} $(i < j)$ が生成する部分空間 $\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}$ を加えたものであるから，$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ に関する最低ウェイト $f_1^k f_2^\ell$ のうち，

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(C'_{ij}) \cdot f_1^k f_2^\ell = 0 \quad (1 \le i < j \le n) \tag{11.54}$$

を満たすものを求めればよい．結論は次のとおり．

定理 11.12. 多項式 $f_1^k f_2^\ell \in \boldsymbol{P}$ が条件 (11.54) を満たすのは $\ell = 0$ のときである．したがって，$\mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関する $\boldsymbol{P}$ の最低ウェイトベクトルは，定数倍を除き，$f_1^k = z_{2n}^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ のいずれかであり，対応する最低ウェイトは $\hat{\lambda}_{k,0} = (k\varepsilon_n + \delta, -k)$ となる．

証明. 微分作用素 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(C'_{ij})$ の表示式 (11.42) に注意すれば，$f_1^k f_2^\ell$ が 4 つの変数 $z_{n-1}, z_n, z_{2n-1}, z_{2n}$ のみの多項式であることから，$i \le n-2$ のとき (11.54) はすべての非負整数 k, ℓ に対してなりたつことがわかる．したがって，$f_1^k f_2^\ell$ が問題とする最低ウェイトベクトルになるのは，$(i, j) = (n-1, n)$ の場合の方程式

$$(\partial_{n-1}\partial_{2n} - \partial_n \partial_{2n-1}) \cdot f_1^k f_2^\ell = 0 \tag{11.55}$$

を満たすときである．$\ell = 0$ ならば，$f_1^k f_2^\ell = z_{2n}^k$ は明らかに上の方程式の解である．そこで $\ell > 0$ とする．このとき左辺を実際に計算すれば，

$$(\partial_{n-1}\partial_{2n} - \partial_n \partial_{2n-1}) \cdot f_1^k f_2^\ell = \ell(\ell + 1 + k) f_1^k f_2^{\ell-1} \tag{11.56}$$

となって，零にならない．

対応する最低ウェイトに関する主張は (11.53) から直ちに得られる． □

問題 11.4. 等式 (11.56) を証明せよ．

以上で表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ を既約分解するために必要な最低ウェイトベクトルはすべて得られた．あとは，表現論の “常識” を援用して最終の結論を導き出すことだけが残されている．

11.3.4 表現 $\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の既約分解

一般に，$\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{q}$ と $\varphi \in \boldsymbol{P}$ に対して，

$$\tilde{\varpi}(X_i) \cdots \tilde{\varpi}(X_1)\varphi \quad (X_1, \ldots, X_i \in \mathfrak{q},\ i = 0, 1, \ldots) \tag{11.57}$$

たち (ただし，$i=0$ のときには上のベクトルは φ そのものであると規約する) が生成する $\boldsymbol{P}$ の部分線形空間 $\langle \varphi \rangle_{\mathfrak{q}}$ は，φ を含む $\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{q}$-不変部分空間のなかで最小のものを与える．$\langle \varphi \rangle_{\mathfrak{q}}$ を φ から生成された $\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{q}$-部分加群とよぶ．別の言い方をすると，$\boldsymbol{P}$ を $\mathfrak{q}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{q})$ 上の加群とみたとき (9.3.4 節参照)，$\langle \varphi \rangle_{\mathfrak{q}} = U(\mathfrak{q})\varphi$ である．

最低ウェイトベクトルから生成される $\boldsymbol{P}$ の部分加群はつねに既約になることを示そう．

命題 11.13. $\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ に関する最低ウェイトベクトル $f_1^k f_2^\ell$ が生成する $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-部分加群 $\langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ は既約である．同様に，$\mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関する最低ウェイトベクトル f_1^k が生成する $\hat{\mathfrak{m}}$-部分加群 $\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ も既約である．

注意 11.5. リー代数 $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ の作用は多項式の次数を変えないので，$\langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ は斉次多項式の空間 $\boldsymbol{P}_{k+2\ell}$ に含まれ，とくに有限次元である．一方，$\mathfrak{p}_+^{\mathfrak{m}}$ ($\subset \hat{\mathfrak{m}}$) の作用は多項式の掛け算であるから，$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ は無限次元になる．

命題 11.13 の証明．記号の簡略化のため，$\varphi = f_1^k$, $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_{k,0}$ とおいて，$\hat{\mathfrak{m}}$-加群 $\boldsymbol{U} := \langle \varphi \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の既約性を証明する．($\langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ の場合はよりやさしいので省略する.)　論証をはっきりさせるため，証明を 4 段階に分ける．

第 1 段: リー代数 $\hat{\mathfrak{m}}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ の随伴作用に関するルート (同時固有値) の集合は，

$$\Delta_{\hat{\mathfrak{m}}} = \Delta_{\mathfrak{m}} \cup \{(0, \pm 2)\} \subset (\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}})^*$$

であることに注意する．$\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{h}^{\mathfrak{m}} \oplus \mathbb{C}H_5$ の双対空間 $(\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}})^* = (\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^* \oplus \mathbb{C}$ のなかの実型 $(\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}})^*_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^*_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}$ に，基底 $(\varepsilon_1, 0), \ldots, (\varepsilon_n, 0), (0, 1)$ が定める辞書式順序を入れる．正のルート全体のなす部分集合を $\Delta_{\hat{\mathfrak{m}}}^+ := \{\gamma \in \Delta_{\hat{\mathfrak{m}}} \mid \gamma > 0\}$ で表す．

このとき，線形空間 $\boldsymbol{U}$ はベクトル

$$\tilde{\varpi}(X_{\gamma_i}) \cdots \tilde{\varpi}(X_{\gamma_1})\varphi \quad (\gamma_1, \ldots, \gamma_i \in \Delta_{\hat{\mathfrak{m}}}^+;\ i = 0, 1, \ldots) \tag{11.58}$$

たちから生成される部分空間 $\boldsymbol{U}'$ と一致する : $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}'$.

第 2 段: $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}'$ の証明．非負整数 r に対して，$i \le r$ の範囲で得られるベクトル (11.57) たちが生成する $\boldsymbol{U}$ の部分空間を $\boldsymbol{U}_r$ で表す．ただし，$\boldsymbol{U}_0 = \mathbb{C}\varphi$．同様に，(11.58) を用いて $\boldsymbol{U}'$ の部分空間 $\boldsymbol{U}'_r$ をつくる．明らかに，

$$\boldsymbol{U} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \boldsymbol{U}_r, \quad \boldsymbol{U}' = \bigcup_{r=0}^{\infty} \boldsymbol{U}'_r, \quad \boldsymbol{U}'_r \subset \boldsymbol{U}_r,$$

であるから，逆向きの包含関係 $\boldsymbol{U}_r \subset \boldsymbol{U}'_r$ を示せば十分である．これを r に関する数学的帰納法で証明する．

まず $r=1$ のときは，φ が最低ウェイトベクトルであることから $\boldsymbol{U}'_1 = \boldsymbol{U}_1$ が直ちにわかる．$r \ge 2$ とし，$\psi := \tilde{\varpi}(X_r)\tilde{\varpi}(X_{r-1}) \cdots \tilde{\varpi}(X_1)\varphi \in \boldsymbol{U}_r$ を考える．帰納法の仮定より，

$\tilde{\varpi}(X_{r-1})\cdots\tilde{\varpi}(X_1)\varphi \in \boldsymbol{U}_{r-1} = \boldsymbol{U}'_{r-1}$ であるから，一般性を失わず，$\tilde{\varpi}(X_{r-1})\cdots\tilde{\varpi}(X_1)\varphi$ を $\tilde{\varpi}(X_{\gamma_i})\tilde{\varpi}(X_{\gamma_{i-1}})\cdots\tilde{\varpi}(X_{\gamma_1})\varphi$ $(i \le r-1)$ で置き換えてよい．このとき，

$$\begin{aligned}\psi &= \tilde{\varpi}(X_r)(\tilde{\varpi}(X_{\gamma_i})\tilde{\varpi}(X_{\gamma_{i-1}})\cdots\tilde{\varpi}(X_{\gamma_1})\varphi)\\ &= \tilde{\varpi}(X_{\gamma_i})(\tilde{\varpi}(X_r)\tilde{\varpi}(X_{\gamma_{i-1}})\cdots\tilde{\varpi}(X_{\gamma_1})\varphi) + \tilde{\varpi}([X_r, X_{\gamma_i}])\tilde{\varpi}(X_{\gamma_{i-1}})\cdots\tilde{\varpi}(X_{\gamma_1})\varphi\\ &\in \tilde{\varpi}(X_{\gamma_i})\boldsymbol{U}_{r-1} + \boldsymbol{U}_{r-1} = \tilde{\varpi}(X_{\gamma_i})\boldsymbol{U}'_{r-1} + \boldsymbol{U}'_{r-1} \subset \boldsymbol{U}'_r\end{aligned}$$

が得られ，$\boldsymbol{U}_r \subset \boldsymbol{U}'_r$ がわかる．

第 3 段: (11.10) の $\hat{\mathfrak{m}}$-加群版から，ベクトル (11.58) は $\mathfrak{h}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関するウェイトベクトルであって，ウェイト

$$\hat{\lambda} + \gamma_1 + \cdots + \gamma_i$$

をもつことがわかる．また，$i \ge 1$ ならばこのウェイトは $\hat{\lambda}$ より真に大きい．ゆえに，$\boldsymbol{U}$ は $\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関するウェイト空間の直和に分解し，$\hat{\lambda}$ に対応するウェイト空間は φ が生成する 1 次元部分空間である．つまり，$\boldsymbol{U}$ においては，$\hat{\lambda}$ に対応するウェイトベクトルは定数倍を除き一意的である．

第 4 段: 最後に $\boldsymbol{U}$ の既約性を示す．$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{U}$ の $\hat{\mathfrak{m}}$-部分加群とする．定理 11.1 の証明と同様にして，$\boldsymbol{W}$ の $\boldsymbol{U}$ における直交補空間

$$\boldsymbol{W}^{\perp} := \{\xi \in \boldsymbol{U} \mid \langle \xi, \psi \rangle = 0\ (\forall \psi \in \boldsymbol{W})\}$$

は $\hat{\mathfrak{m}}$-不変であって，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^{\perp}$ は $\hat{\mathfrak{m}}$-加群 $\boldsymbol{U}$ の直和分解を与えることがわかる．ただし $\boldsymbol{U}$ は無限次元なので，

$$\boldsymbol{U} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{P}_m \supset \bigoplus_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{P}_m = \boldsymbol{W}$$

に注意して，斉次多項式空間 (有限次元) で直交補空間を考えよ．

さて，直和分解 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^{\perp}$ にそった $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}^{\perp}$ への射影作用素をそれぞれ P, P' とする：任意の $\xi \in \boldsymbol{U}$ に対して，

$$\xi = P(\xi) + P'(\xi) \quad (P(\xi) \in \boldsymbol{W},\ P'(\xi) \in \boldsymbol{W}^{\perp}).$$

このとき，P, P' は $\hat{\mathfrak{m}}$-相関作用素であることを確かめるのはやさしい．とくに，$P(\varphi) \in \boldsymbol{W}$, $P'(\varphi) \in \boldsymbol{W}^{\perp}$ は $\hat{\lambda}$ に対するウェイトベクトルになるが，もしこれらが両方零でなければ，$\boldsymbol{U}$ における $\hat{\lambda}$-ウェイト空間が 2 次元以上になってしまう．これは第 3 段の結論に反する．よって，$P(\varphi) = 0$ または $P'(\varphi) = 0$ でなくてはならない．φ は $\hat{\mathfrak{m}}$ 上で $\boldsymbol{U}$ を生成しているので，$P(\varphi) = 0$ ならば $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}^{\perp}$, $P'(\varphi) = 0$ ならば $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}$ がでる．結局，$\boldsymbol{W} = \{0\}$ または $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}$ が得られ，$\hat{\mathfrak{m}}$-加群 $\boldsymbol{U}$ の既約性が示された． □

注意 11.6. 上の証明の第 1 段から第 3 段までは，最低ウェイトベクトルで生成される加群一般に対してなりたつことである．一方，第 4 段で，$\boldsymbol{U}$ の不変部分空間 $\boldsymbol{W}$ に $\hat{\mathfrak{m}}$-不変な補空間 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ がとれることに (このような $\boldsymbol{U}$ を**完全可約**であるという)，$\boldsymbol{U}$ 上の表現がユニタリであることが本質的に用いられている．厳密ではないが,「ユニタリならば完全可約」，これも表現論の "常識" のうちのひとつである．

また，次のことも重要である．

命題 11.14. 非負整数 k,ℓ に対して，多項式 $f_1^k f_2^\ell$ が生成する $\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}$-部分加群 $\langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}}$，$\mathfrak{s}$-部分加群 $\langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{s}}$ はともに既約である．同様に，f_1^k が生成する $\mathfrak{m}$-部分加群 $\langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{m}}$ も既約である．

証明は，命題 11.13 に対するものと全く同様である．あるいは，命題 11.13 から上の主張を導きだすことも可能である．

11.1.3 節や 11.2.3 節と同様に，$\hat{\lambda} \in (\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}})^*$ を最低ウェイトにもつ既約 $\hat{\mathfrak{m}}$-加群, 既約 $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-加群を，それぞれ，$\boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}]$, $\boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}[\hat{\lambda}]$ で表す．同様に，$\boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda], \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}}[\lambda]$ $(\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^*)$， $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[\mu]$ $(\mu \in \mathbb{C} = (\mathbb{C}H_{\mathfrak{s}})^*)$ を定義する．命題 11.13 および 11.14 より，同型

$$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \cong \boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}_{k,0}], \qquad \langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} \cong \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}[\hat{\lambda}_{k,\ell}], \tag{11.59}$$

$$\langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{m}} \cong \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}], \qquad \langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}} \cong \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}}[\lambda_{k,\ell}], \tag{11.60}$$

$$\langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{s}} \cong \boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k], \tag{11.61}$$

が得られる．なお，最後の $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k]$ は最低ウェイト $-k$ をもつ $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約表現であるから，第 9 章で扱った $k+1$ 次元既約表現 $\boldsymbol{F}_{k+1}$ に他ならない．

以上の準備のもとに，表現 $(\tilde{\omega}_{\hat{\mathfrak{m}}}, \boldsymbol{P})$ の分解を与える．

定理 11.15. $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \cong \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})' \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に対して，$\boldsymbol{P} = \mathbb{C}[M_{2,n}]$ は $\hat{\mathfrak{m}}$-加群，あるいは $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-加群として次のように既約分解する．

$$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}_{k,0}] \qquad (\hat{\mathfrak{m}}\text{-既約分解}) \tag{11.62}$$

$$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{k,\ell=0}^{\infty} \langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} \cong \bigoplus_{k,\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}[\hat{\lambda}_{k,\ell}] \qquad (\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}\text{-既約分解}) \tag{11.63}$$

$$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} \cong \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}[\hat{\lambda}_{k,\ell}] \qquad (\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}\text{-既約分解}) \tag{11.64}$$

なお，これらの既約分解はすべて重複度自由である．

この定理を示すために，既約表現の和に関する基本的な補題 (これも表現論における "常識" のひとつ) を用意する．

補題 11.16. 複素リー代数 $\mathfrak{q}$ 上の加群 $\boldsymbol{V}$ がある．$\boldsymbol{V}_i$ $(i=1,2,\dots)$ が $\boldsymbol{V}$ の既約な $\mathfrak{q}$-部分加群であって，どのふたつも互いに同型でないとき，$\boldsymbol{V}_i$ たちの和空間は直和になる．

$$\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{V}_i = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{V}_i.$$

証明． 背理法による．もし和 $\sum_i \boldsymbol{V}_i$ が直和でなければ，ある番号 $j \geq 2$ が存在して，$\boldsymbol{W} := \sum_{i<j} \boldsymbol{V}_i$ は直和であるが，$\sum_{i \leq j} \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}_j$ は直和ではない．このとき $\boldsymbol{V}_j \cap \boldsymbol{W} \neq \{0\}$ となるが，$\mathfrak{q}$-加群 $\boldsymbol{V}_j$ の既約性から，$\boldsymbol{V}_j \subset \boldsymbol{W}$ が従う．

いま，直和分解 $\boldsymbol{W} = \bigoplus_{i<j} \boldsymbol{V}_i$ にそった $\boldsymbol{W}$ から $\boldsymbol{V}_i$ への射影作用素を P_i とする．前段の結果から，ある番号 i_0 $(i_0 < j)$ が存在して，P_{i_0} の $\boldsymbol{V}_j$ への制限 Q は零でない．このとき，Q は $\boldsymbol{V}_j$ から $\boldsymbol{V}_{i_0}$ への零でない相関作用素を与える．ところが，$\boldsymbol{V}_j$ と $\boldsymbol{V}_{i_0}$ はともに既約であるから，Q は全単射となって，同型 $\boldsymbol{V}_j \cong \boldsymbol{V}_{i_0}$ を得る．これは仮定に反する．□

定理 11.15 の証明． $\boldsymbol{P}$ の既約 $\hat{\mathfrak{m}}$-部分加群 $\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \cong \boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}_{k,0}]$ たちは，互いに相異なる最低ウェイト $\hat{\lambda}_{k,0}$ をもつから，どのふたつも互いに同型ではない．したがって補題 11.16 より，

$$\boldsymbol{U} := \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \quad (\text{直和})$$

がわかる．もし $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{P}$ ならば，$\boldsymbol{U}$ の $\boldsymbol{P}$ における直交補空間 $\boldsymbol{U}^{\perp}$ は零でない $\hat{\mathfrak{m}}$-不変部分空間をなす．このとき，定理 11.1 の証明に倣えば，$\boldsymbol{U}^{\perp}$ のなかに $\mathfrak{u}_{-}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関する最低ウェイトベクトルが存在することがわかる．これは，f_1^k $(k=0,1,\dots)$ たちが $\boldsymbol{P}$ における $\mathfrak{u}_{-}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ に関する最低ウェイトベクトルたちを尽くしていること (定理 11.12) に反する．よって (11.62) が得られた．(11.63) の証明も全く同様である．

次に (11.64) を示そう．(11.41) より，表現作用素 $-\sqrt{-1}\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(B'_{n-1,n})$ はちょうど基本消滅多項式 f_2 を掛けるという変換を与える．したがって，任意の非負整数 ℓ に対して $f_1^k f_2^\ell = (-\sqrt{-1}\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(B'_{n-1,n}))^\ell f_1^k \in \langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ がわかり，

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \langle f_1^k f_2^\ell \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} \subset \langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$$

を得る．ところが，証明済みの等式 (11.62) および (11.63) に照らし合わせると，上の包含関係が等号でなければ勘定があわない．

最後に，得られた既約分解が重複度自由であることは，既約成分の最低ウェイトが互いに相異なることから直ちにわかる．□

さて，多項式 $f \in \boldsymbol{P}$ が $\mathfrak{p}_{-}^{\mathfrak{m}}$-**調和**であるとは，

$$\tilde{\varpi}_{\hat{\mathfrak{m}}}(X) f = 0 \quad (X \in \mathfrak{p}_{-}^{\mathfrak{m}}) \tag{11.65}$$

がなりたつときをいう．$\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}$-調和な多項式全体のつくる線形空間を $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}}$ と書く．(11.42) から，多項式 f が $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}}$ に属するためには，f が微分方程式系：

$$(\partial_i\partial_{n+j} - \partial_j\partial_{n+i})f = 0 \quad (1 \le i < j \le n)$$

の解であることが必要十分条件である．また，$[\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}, \mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}] \subset \mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}$ から，$\mathcal{H}_{\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}}$ は $\boldsymbol{P}$ の $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-部分加群となることがわかる．定理 11.12 と $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-加群 $\boldsymbol{P}$ の既約分解 (11.63) をあわせると，次の系が直ちに得られる．

系 11.17. $\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$-加群 $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}}$ は，$\mathcal{H}_{\mathfrak{p}_-^{\mathfrak{m}}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}$ と既約分解する．

注意 11.7. $\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のヴェイユ表現 $\tilde{\varpi}$ の t 階 $(t \ge 2)$ のテンソル積表現 $\bigotimes^t \tilde{\varpi}$ ((9.1) 参照) は，自然に t 変数多項式の空間 $\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_t] \cong \mathbb{C}[z_1] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[z_t]$ に実現される．このとき，$X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の表現作用素は，

$$\left(\bigotimes{}^t \tilde{\varpi}\right)(X_-) = \sqrt{-1}(\partial_{z_1}^2 + \cdots + \partial_{z_t}^2)$$

となる．したがって，$\mathfrak{p}_- = \mathbb{C}X_-$ が消滅させる多項式とは，通常の調和多項式のことに他ならない．さらに，この調和多項式の空間には t 次の直交群 (リー代数) が重複度自由に作用する．$t = 3$ の場合には第 I 部 3.5 – 3.7 節で扱ったように，この表現は，$t-1$ 次元球面上に生じる準正則表現 (の既約成分の代数的直和) と同型になる．

なお，簡約な群が多項式の空間に作用するという状況で，さまざまな調和多項式の空間を考えることができる．これについては，和書では [36] が格好の入門書になろう．

一般に，$\mathfrak{m}$ の表現 $(\pi, \boldsymbol{U})$ と $\mathfrak{s}$ の表現 $(\sigma, \boldsymbol{F})$ が与えられたとき，テンソル積空間 $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{F}$ 上に直和リー代数 $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s}$ の表現 $\tau := \pi \otimes \sigma$ が，

$$\tau(X,Y)\cdot(\psi\otimes\eta) := \pi(X)\psi\otimes\eta + \psi\otimes\sigma(Y)\eta$$
$$(X \in \mathfrak{m},\ Y \in \mathfrak{s};\ \psi \in \boldsymbol{U},\ \eta \in \boldsymbol{F})$$

により定まる．$(\tau, \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{F})$ を π と σ の (外部) **テンソル積表現**という．テンソル積表現 τ では，直和因子 $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{s}$ の作用が標準化されているので，定義から，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{F} &\cong \overbrace{\boldsymbol{U} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{U}}^{\dim \boldsymbol{F}\,\text{個}} \quad (\mathfrak{m}\text{-加群としての同型}), \\ \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{F} &\cong \overbrace{\boldsymbol{F} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{F}}^{\dim \boldsymbol{U}\,\text{個}} \quad (\mathfrak{s}\text{-加群としての同型}), \end{aligned} \tag{11.66}$$

が直ちにわかる．とくに $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{F}$ が既約であれば，表現 τ に現れる既約 $\mathfrak{m}$-部分加群，既約 $\mathfrak{s}$-部分加群は，それぞれ，$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{F}$ と同型になる．

締めくくりに，直和リー代数 $\hat{\mathfrak{m}}$ の既約表現 $\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \cong \boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}_{k,0}]$ をテンソル積表現の形に表し，ヴェイユ表現の $\mathfrak{m}$ への制限を既約分解しておこう．

定理 11.18. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ におけるデュアルペア $(\mathfrak{m}, \mathfrak{s}) \cong (\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})', \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$，および，直和リー代数 $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を考える．このとき，$\hat{\mathfrak{m}}$-加群 $\boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}_{k,0}]$ $(\lambda_{k,0} = k\varepsilon_n + \delta)$ は次のテンソル積表現に分解する：

$$\boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}_{k,0}] \cong \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}] \otimes \boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k]. \tag{11.67}$$

したがって，ヴェイユ表現は $\mathfrak{m}$-加群として，

$$\boldsymbol{P} \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} [k+1] \cdot \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}], \quad \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}] \cong \langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{m}}, \tag{11.68}$$

と既約分解する．ここに $k+1 = \dim \boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k]$ は既約成分 $\boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}]$ の $\boldsymbol{P}$ における重複度である．

実単純リー代数 $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{o}^*(2n)$ の既約ユニタリ表現 $\boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}]$ $(k = 0, 1, \ldots)$ を $\mathfrak{m}_0$ の**はしご表現**という．分解 (11.67) をとおして，既約 $\mathfrak{s}$-加群 $\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k]$ に，$\mathfrak{m}$ の既約ユニタリ最低ウェイト表現 $\Theta(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k]) := \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}]$ を対応させる．非負整数 k を動かしたとき，この対応

$$\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k] \overset{\Theta}{\longmapsto} \Theta(\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k])$$

は，$\mathfrak{s}$ の有限次元既約表現の同値類の集合から $\mathfrak{m}$ の既約で (実型 $\mathfrak{m}_0$ 上) ユニタリな表現の同値類の集合のなかへの単射を与える．Θ をデュアルペア $(\mathfrak{m}, \mathfrak{s})$ に関する表現の**ハウ対応**(あるいは**テータ対応**) という．

定理 11.18 の証明. 同型 (11.67) を示せばよい．ヴェイユ表現がユニタリであることから，$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ は $\mathfrak{m}$-加群として，あるいは $\mathfrak{s}$-加群としても完全可約になる．直和リー代数 $\hat{\mathfrak{m}}$ の既約表現は，直和因子 $\mathfrak{m}, \mathfrak{s}$ の既約表現のテンソル積と同型になる (例えば [42, 第 16 章 定理 1] 参照)．したがって既約 $\mathfrak{m}$-加群 $\boldsymbol{U}$ と既約 $\mathfrak{s}$-加群 $\boldsymbol{F}$ が存在して，$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \cong \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{F}$ となる．ところが，$\mathfrak{m}$ の既約表現 $\langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{m}} \cong \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}]$ および $\mathfrak{s}$ の既約表現 $\langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{s}} \cong \boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k]$ は，$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ の部分表現として実際に現れている．したがって同型 (11.66) から，

$$\boldsymbol{U} \cong \boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda_{k,0}], \quad \boldsymbol{F} \cong \boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[-k],$$

でなければならない． □

上の証明は，$\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}}$ がテンソル積表現の形に書けるという事実 (表現論の "常識" ではあるが) を引用して用いている点で，若干手抜きをしている．実際に同型 (11.67) を構成することもさほど難しくないので，問題として残しておくことにする．

問題 11.5. $\hat{\mathfrak{m}}$-加群の同型 $\langle f_1^k \rangle_{\hat{\mathfrak{m}}} \cong \langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{m}} \otimes \langle f_1^k \rangle_{\mathfrak{s}}$ を示せ．

◆トピックス 12 (ユニタリ最低ウェイト表現の研究). ……………………………………………

本章では，シンプレクティックリー代数のヴェイユ表現を既約分解したり，あるいは，部分リー代数 $\mathfrak{u}(p,q)$ や $\mathfrak{o}^*(2n)$ への制限を最も簡単なデュアルペアを用いて調べることで，CI, AIII, DIII 型実単純リー代数に対し，最低ウェイトをもつ既約ユニタリ表現を構成した．同じアイデアでより高次のデュアルペア(8.37) を扱うと，さらにたくさんのユニタリ最低ウェイト表現が得られる ([27])．このようにして，$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ および $\mathfrak{u}(p,q)$ については，ヴェイユ表現をとおしてすべての $\mathfrak{k}$-許容的 (つまり $\mathfrak{k}$ の作用が局所有限であるような) 既約ユニタリ最低ウェイト加群が得られる．しかし $\mathfrak{o}^*(2n)$ の場合はそうではない．

一般に，任意のエルミート型実単純リー代数 (8.2.2 節参照) の $\mathfrak{k}$-許容的既約ユニタリ最低 (最高) ウェイト表現の分類は，エンライト (T. J. Enright)，ハウ (R. Howe)，ワラック (N. R. Wallach) の 3 名の共同研究 [7] により完成された (1983)．その後，この分類理論に改良がなされたり ([8])，対称空間上の勾配型不変微分作用素を使った最低ウェイト表現の実現が得られる ([5]) など，さまざまな進展がある．最低ウェイト表現は，実単純リー代数の既約ユニタリ表現全体のなかでは ($\mathfrak{su}(1,1)$ の特別な場合を除き) ごく一部を占めるにすぎないが，退化した興味深い表現を多数含んでいる (トピックス 9, p. 281 参照)．

参考文献 (第II部)

[1] 新井朝雄, ヒルベルト空間と量子力学, 共立出版, 1997.

[2] A. Beilinson and J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences, Série I, Mathématique, **292** (1981), 15–18.

[3] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chaps. IV-VI, Hermann, Paris, 1968.

[4] A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, vol. **22**, Acadamic Press, 1987.

[5] M. G. Davidson, T. J. Enright and R. J. Stanke, Differential operators and highest weight representations, Memoirs of the American Mathematical Society, No. **455**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[6] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXVII, Gauthier-Villars Editeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.

[7] T. J. Enright, R. Howe, and N. R. Wallach, A classification of unitary highest weight modules, in "*Representation theory of reductive groups* (Park City, Utah, 1982; P.C.Trombi ed.)", Progress in Mathematics, Vol. **40**, Birkhäuser, 1983, pp.97–143.

[8] T. J. Enright and A. Joseph, An intrinsic analysis of unitarizable highest weight modules, Mathematische Annalen, **288** (1990), 571–594.

[9] A. Gyoja and H. Yamashita, Associated variety, Kostant-Sekiguchi correspondence, and locally free $U(\mathfrak{n})$-action on Harish-Chandra modules, Journal of the Mathematical Society of Japan (J. Math. Soc. Japan), **51** (1999), 129–149.

[10] Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I, Transactions of the American Mathematical Society (Trans. Amer. Math. Soc.), **75** (1953), 185–243.

[11] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups. I, Construction of invariant eigendistributions. Acta Mathematica (Acta Math.), **113** (1965), 241–318; II, Explicit determination of the characters. *ibid.*, **116** (1966), 1–111.

[12] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, **80**, Academic Press, New York-London, 1978.

[13] T. Hirai, On irreducible representations of the Lorentz group of n-th order, Proceedings of the Japan Academy (Proc. Japan Acad.), **38** (1962), 258–262.

[14] T. Hirai, Classification and the characters of irreducible representations of $SU(p, 1)$, Proc. Japan Acad., **42** (1966), 907–912.

[15] 平井 武, 線形代数と群の表現 I, II, すうがくぶっくす **20**, **21**, 朝倉書店, 2001.

[16] R. Hotta and R. Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series, Inventiones Mathematicae (Invent. Math.), **26** (1974), 133–178.

[17] 堀田良之, 代数入門 – 群と加群 –, 裳華房, 1987.

[18] R. Howe, Dual pairs in physics: harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons, in: *Applications of group theory in physics and mathematical physics* (Chicago, 1982), pp. 179–207, Lectures in Applied Mathematics, **21**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1985.

[19] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, Trans. Amer. Math. Soc., **313** (1989), 539–570.

[20] R. Howe, Transcending classical invariant theory, Journal of the American Mathematical Society, **2** (1989), 535–552.

[21] R. Howe and E.C. Tan, *Nonabelian harmonic analysis: Applications of* $\mathrm{SL}(2, R)$, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.

[22] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **9**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[23] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論 – 既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1978.

[24] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple Lie groups: an overview based on examples*, Princeton University Press, Princeton, 1986.

[25] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Second Edition, Progress in Mathematics, **140**, Birkhäuser, 2002.

[26] A. W. Knapp and G. J. Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Annals of Mathematics, Second Series, (Ann. of Math. (2)), **116** (1982), 389–455.

[27] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Invent. Math., **44** (1978), 1–47.

[28] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Russian Mathematical Surveys, **17** (1962), 53–104.

[29] 黒川信重 - 若山正人, 絶対カシミール元, 岩波書店, 2002.

[30] R. P. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, preprint (1973); published in "*Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups* (P. J. Sally and D. A. Vogan Eds.)", pp. 101–170, Mathematical Surveys and Monographs, **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1989.

[31] G. Lion and M. Vergne, *The Weil representation, Maslov index and Theta series*, Progress in Mathematics, **6**, Birkhäuser, 1980.

[32] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 331–357.

[33] 松島与三, リー環論, 共立出版, 1956.

[34] 村上信吾, 多様体, 共立出版, 1969.

[35] M. S. Narasimhan and K. Okamoto, An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. of Math. (2), **91** (1970), 486–511.

[36] 西山 享, 多項式のラプソディー, 日本評論社, 1999.

[37] H. Rubenthaler, Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives, Astérisque, **219** (1994).

[38] 齋藤正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 1966.

[39] 佐武一郎, ある群拡大とユニタリ表現について, 数学 (日本数学会編集), **21** (1969), 241–253.

[40] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1974.

[41] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[42] 佐武一郎, [新版] リー環の話, 日本評論社, 2002.

[43] 佐藤 肇, リー代数入門 – 線形代数の続編として, 裳華房, 2000.

[44] W. Schmid and K. Vilonen, Characteristic cycles and wave front cycles of representations of reductive groups, Ann. of Math. (2), **151** (2000), 1071–1118.

[45] J. Sekiguchi, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair, J. Math. Soc. Japan, **39** (1987), 127-138.

[46] M. Sugiura, *Unitary representations and harmonic analysis: An introduction*, Kodansha, Tokyo; Halstead Press [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1975.

[47] R. Takahashi, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bulletin de la Société Mathématique de France, **91** (1963), 289–433.

[48] 高瀬幸一 (編集), 第 4 回整数論サマースクール報告集「Weil 表現入門」, 1996.

[49] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立出版, 2001.

[50] N. Tatsuuma, H. Shimomura and T. Hirai, On group topologies and unitary representations of inductive limits of topological groups and the case of the group of diffeomorphisms, Journal of Mathematics of Kyoto University, **38** (1998), 551–578.

[51] M. Taylor, *Noncommutative harmonic analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, **22**, Amer. Math. Soc., 1986.

[52] D.A. Vogan, Jr., The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. I, Ann. of Math. (2), **109** (1979), 1–60.

[53] A. Weil, Sur certains groupes d'operateurs unitaires, Acta Math., **111** (1964), 143–211.

[54] 山内恭彦-杉浦光夫, 連続群論入門, 培風館, 1960.

解　　説

平井さんが山下さんと組んで表現論入門の続編を出した．

群の表現論は，フロベニウスらによる発生段階においては数論からの影響はあったが，代数学独自の動機，特に，群指標の研究に始まる．この時から粗く勘定してもすでに一世紀は経ったが，この主題が未だに人々の興味を引いて止まないのは，その後量子論を中心とする数理物理学や，かってはその対極にあるとみられていた保型関数論と密接に関係していることが分かってきたからであろう．特に，保型関数論は数論の一つの方法論，いやむしろその実体とも考えられている．この意味で，表現論はその原点に立ち戻っていると言える．

平井さんによる本書の第I部は，既刊の『線形代数と群の表現 I, II』に続いてこの理論の発生から今挙げた現代的興味との関連に至る所を，急がずゆっくりと実に丁寧に説明してくれる．

とは言っても，リー群や関数解析の一般論を延々と展開準備しておいて具体例は一刀両断というやり方ではなく，実例に応じてこの理論特有の考え方と技法を適宜紹介していくという方法をとっている．近頃の類書（外国語のものも込めて）もこのようなやり方をとっているものが多いが，このやり方には著者の個性が強く反映されるようで，私自身は本書に最も親しみを感じ大いに楽しんだ．

もちろん，著者との 30 余年に亘る長いつき合いや，日本語で書かれているというのも一つの理由であろう．特に，我々の世代にとっては，各所に散りばめられた「閑話休題」のなかの著者自身の回想や，学問に対する態度，若い世代への感想などが，著者一流のオールドファッションドでありながら躍動的な語り口と相まって遥かなるノスタルジーに浸る快楽をもたらしてくれる．

前書でもそうであったが，物理学からの話題が近代の量子力学からの断片だけではなく，ニュートンの原典にまで遡っていることに，浅学の私など驚き（と恐怖さえ）を覚える（「閑話休題４」）．

最後の章は，初めに言った保型関数論への表現論的入門で締め括られる．この短いページだけでもしっかり読み込めばこの分野のエッセンスが修得できるだろう．

というわけで，とにかく第I部を通読すれば，表現論の発生から今に至る道筋を，物理学や保型関数の見方を学びながら俯瞰できるだろう．

山下さんによる第II部は，より若い世代のこの分野のやり方を紹介したものである．第I部に比して，手法は全く「代数的」である．リー環（または，リー代数．この呼び方につい

ての蘊蓄(うんちく)は第I部「閑話休題5」にある）というリー群の近似を与える代数系の表現論を展開する．この線型近似は，あまりにも良い近似であるので，この代数学を徹底的に行うことによって，元(もと)の群表現についての精密な情報が得られる．そしてしばしばこの方法でなければ得られない結果もあまたある．

山下さんは，このような代数の技法の入門から始めて，最後にはヴェイユ表現と呼ばれている表現についての様々な結果を導いて見せる．これは，メタプレクティックという特別な群の特別な表現（だから特別な人名ヴェイユが付いている（さらにシェイルという名前を付けることもある））に同等なもので，元来は量子力学の基本に関係する主題である．したがって因(ちな)んだ名前ハイゼンベルグも登場する．しかも，この理論は元は関数解析的な議論（ストーン・フォンノイマンの定理）を中心として得られたものであるが，何とこれが数論と繋がり保型関数論の表現論的扱いを強く促す動機ともなったのである．ヴェイユの寄与はここにあった．

回顧はこのくらいにして，第II部についてであるが，山下さんも主題に密着した着実な計算を基に明確な結果を提示している．理論展開も明快で心地よくスムーズに進んでいく．

鉛筆と紙を側に置いて追っていけば，もうすぐそこに只今発展中のお好みのテーマに関する種々の問題に取り掛かれるだろう．

2003年10月

堀田 良之

(岡山理科大学理学部応用数学科)

記号索引 (第 I 部)

$\square$ (ダランベルシアン) 137, 138
$\mathbf{1}_H$ (H の自明表現) 68

$\mathcal{A}'$ ($\mathcal{A}$ の可換代数) 55
$\mathrm{Ad}(u)$ 93
(A, H) (ポアッソンの括弧式) 59
$\mathfrak{A}_n$ (n 次交代群) 5, 18
$\mathrm{Aut}(G)$ (自己同型群) 17
$\alpha(x, g)$ 56

$\mathfrak{B}_n$ ($\mathfrak{A}_n$ の表現群) 19

γ_j (ディラックのガンマ行列) 138
$\mathbb{C}^\times = \{a \in \mathbb{C}; a \neq 0\}$ 13
$C^\infty(G \,|\, K, \chi_n)$ 162
$C^\infty(\mathfrak{H} \,\|\, \Gamma, n)$, $C_2^\infty(\mathfrak{H} \,\|\, \Gamma, n)$ 166
$\chi_\varpi(g)$ (ϖ の指標) 12
Γ_k 140
$C^{(m)}$ (クレブシュ‐ゴルダンの係数) 113
$\Gamma(N)$ 155
$\mathfrak{C}_n$ ($\mathfrak{A}_n$ の表現群, $n = 6, 7$) 19
$C(S^2)$ (連続関数の空間) 80
$\mathcal{C}z$ (ケーリー変換) 170

Δ (ラプラシアン) 66
$\mathcal{D}^+_{2\ell+2}$, $\mathcal{D}^-_{2\ell+2}$ 177
$\mathcal{D}(A)$ (A の定義域) 62
$\widetilde{\Delta} = \Delta \oplus \Delta$ 95
$dD(X)$, $dD'(X)$ 93
$D(h)$, $D'(h)$ 131
$\mathrm{diag}(\cdots)$ (対角行列) 34
$\mathrm{diag}(u_2(\theta), 1)$ 36
D^+_ℓ, D^-_ℓ (離散系列表現) 158
$d\mu_{G/H}$ 68
$d\mu_n(z)$ 165
$d\mu(z)$ 154
D_n (二面体群) 22
$d\pi_s(X)$ 175
Δ_S (S^2 上のラプラシアン) 66
$d\mu_S(\omega)$ 50
$d_S(x, y)$ 36
$dT(X)$ 161
$D(u)$ 92
$D'(u)$ 91
$\mathfrak{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$ 169
$\Delta_{x,y} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 154

E^3 (3 次元ユークリッド空間) 26, 35
E_n (n 次単位行列) 26
$\langle \xi, \xi \rangle_L = -{\xi_1}^2 - {\xi_2}^2 - {\xi_3}^2 + {\xi_4}^2$ 148
$e^{\varphi X_j}$ (一径数部分群) 92
$e^X = \exp(X)$ (指数写像) 89

$F_{2\ell+1}$ 177

$\mathfrak{g}$ 88
$G_1 \times G_2$ (直積群) 28
G_a (a の固定部分群) 35
$g(b, B)$ 63
$G \rtimes H$ (半直積群) 29
$GL(d, \mathbb{C})$ 11
$GL(m, \mathbb{K})$ (一般線形群) 24
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ 76
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 104
$g\mu$ (測度 μ の変換) 56
$G(T_k)$ (多面体群) 26
$G'(T_k)$ (拡大多面体群) 26
$G_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})$ (ガリレイ変換) 118
Gx (G-軌道) 35

H (ハミルトン関数) 59, 61
$\mathfrak{H}$ (複素上半平面) 39, 151
$\mathcal{H}$ (ヒルベルト空間) 53
$\mathcal{H}^\infty$ 161
$H \backslash G$ (左剰余類空間) 6
$\hbar = h/2\pi$ 59
$\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_\ell^{\mathrm{hol}}$ 168
H_m (ハンケル行列) 42
$\mathcal{H}_S = L_2(S^2; d\mu_S)$ 68, 73
$\mathcal{H}'_S = C^2(S^2)$ 68

$\Im$ (虚部) 165
$I_{\mathcal{H}}$ ($\mathcal{H}$ 上の恒等作用素) 60
$\mathrm{Im}(S)$ (S の像) 51
$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ 3
$\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{1}_H$ (準正則表現) 68
$\mathrm{Int}(G)$ (内部自己同型群) 17
$IOP(T)$ 55
$\mathrm{Iso}(E^3, O)$ 118
$\mathrm{Iso}(E^3)$ 35, 118
$\mathrm{Iso}(S^2)$ 36
$I(T, T)$ 55
$I(T_1, T_2)$, $I(V_1, V_2)$ 48
I_X (X 上の恒等写像) 35

$j_\gamma(z)$ 154
$J_g(z)$ 154
$J_{n,1} = \mathrm{diag}(-E_n, 1)$ 37
$J_{p,q} = \mathrm{diag}(-E_p, E_q)$ 170
$J(x, g)$ 56

$K \subset \mathcal{L}_+^\uparrow = SO_0(3, 1)$ 127
$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ 129
$\mathrm{Ker}(S)$ (写像 S の核) 51
$\mathcal{K}$: $f \mapsto f|_{S^2}$ 70, 79
$\widetilde{K} = \Psi(K), K = SO(2)$ 171

$\boldsymbol{L}$（軌道角運動量） 142
$L_2(\Gamma\backslash G \mid K, \chi_n)$ 164
$L_2(G \mid K, \chi_n)$ 160
$L_2(G) = L_2(G; d\mu_G)$ 156
$\mathrm{Lie}(G)$（G のリー環） 103
$\ell^* = \ell + 1/2$ 101
$\Lambda_\pi(Z)$ 158
$\boldsymbol{L} = \{ L_{\boldsymbol{w}} ; \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \}$ 126
L^n 38
$\log g$（対数写像） 91
L'_v 121
$\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{L}(V)^\times$ 24, 46
$L_{\boldsymbol{w}}$（純ローレンツ変換） 125

M^4, M^{n+1}（ミンコフスキー空間） 37
$\mathcal{M}(E^3)$（ユークリッド運動群） 35, 118
$M(m, \mathbb{K})$ 24
$\mathfrak{M}_n$（純組み糸群） 21
$M_U = U\cdot$（掛け算作用素） 64

$\mathcal{N}^\perp$（直交補空間） 53
$\nu_\ell = -\ell(\ell+1)$ 70, 95

$O(3)$ 35
$O(n)$（n 次直交群） 26
$O'(n)$ 38
$O(n,1)$ 37
$O^\uparrow(n,1)$ 37

$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_+^\uparrow$ 124
$\mathfrak{p}$ 129
ϕ 92, 131
π_ℓ 78
$P_A(x)$ 13
$\pi_{\varepsilon,i\rho}$ 158
$\pi_{\varepsilon,s}$ 174
$PGL(m, \mathbb{C})$ 13
$\pi_{k,n}$ 133
Π_ℓ 106
$\mathbb{P}_\ell$ 70
$P_\ell^m(t)$ 69, 73
$P_{\mathcal{N}}$（$\mathcal{N}$ への直交射影） 53
$p = (p_j)$ 59
$\psi(q,t)$（波動関数） 59

$\pi_s = \pi_{0,s} \oplus \pi_{1,s}$ 174
P_{χ_n} 177
$\mathcal{P}[x]$ 70
$\psi(\boldsymbol{x}, t)$（波動関数） 87
$q = (q_j)_{j=1}^f$, $\dot{q} = (\dot{q}_j)_{j=1}^f$ 59

(r, θ, φ)（極座標） 50
$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$ 50
$R_\Gamma(g_0)$ 163
$r_{\Gamma,n}(Y'_\pm)$, $r_{\Gamma,n}(C)$ 166
R^D 94
$R(g)$ 63, 70
$R'(g)$ 50
$r_{ij}(\psi)$（(x_i, x_j)-平面での回転） 71
R_n 22
$R(u)$ 33
$R(X)$ 77
$r(X)$ 158
$R(Y_+)$, $R(Y_-)$ 78

$\mathrm{supp}(\sigma)$（σ の台） 4
$\mathcal{S}(\Omega)$ 61
S_0, S_1, S_2 99
$\mathrm{sgn}(\sigma)$（σ の符号） 5
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 158
$SL(2, \mathbb{Z})$ 155
$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ 76
$SL(m, \mathbb{K})$（特殊線形群） 24
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ 76
$\mathfrak{S}_n$（n 次対称群） 3
$SO_0(n,1)$（$(n+1)$ 次ローレンツ群） 37
$SO(3)$（3 次元回転群） 35, 91
$\mathfrak{so}(3)$ 76
$\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ 77
$SO(n)$（n 次特殊直交群） 26
$SO'(n)$ 38
$SO(n,1)$ 37
$\mathrm{Spec}_K(T)$（K-スペクトル） 157
$Sp(n, \mathbb{R})$（シンプレクティック群） 167

$SU(2)$（2 次特殊ユニタリ群） 88, 91
$\mathfrak{su}(2)$ 88
$SU(p,q)$ 170
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$（パウリ行列） 87
(s_x, s_y, s_z) 86

T^*, $\|T\|$ 54
$T_{\varepsilon,\rho}(g)$ 57
$T_\alpha(g)$ 56
$\check{T}(g) = T(g^{-1})^*$ 173
T_k（正 k 面体） 26
$\mathbb{T} = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| = 1 \}$ 153
$T_\ell(g)$ 168
$\widetilde{T}_\ell(u)$ 171
$\mathfrak{T}_n$, $\mathfrak{T}'_n$（$\mathfrak{S}_n$ の表現群） 14
$T_\varpi(a)$ 98
$T_\varpi(g)$ 46
$T_\varpi(H), T_\varpi(Y_\pm)$ 99
$T_\varpi(u)$ 94
$T_\varpi(X)$ 96
$\mathrm{tr}(A)$（トレース） 12, 110
$T(u)\boldsymbol{f}$ 45

$U(2)$（2 次ユニタリ群） 88
$u_2(\theta)$（2 次元の回転） 26
$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$（普遍展開環） 97
$U(p,q)$ 170

$\|v\|$（v のノルム） 53
$v_{14}(\tau)$（双曲的回転） 121
$v_2(\tau)$（双曲的回転） 38, 180
$V(A; \lambda)$（A の固有空間） 62
$V(\Delta_S, \nu_\ell)$（Δ_S の固有空間） 70, 74
$V(\Delta_S, \nu_\ell)^\sim = V(\Delta_S, \nu_\ell) \oplus V(\Delta_S, \nu_\ell)$ 100
$V(T)$（T の表現空間） 52
$\langle v, w \rangle$（内積） 52

$W = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 95

$\chi_T(g)$（T の指標） 110
$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ 86
$\langle x, y \rangle_L$ 37
$[X, Y] = XY - YX$ 88

$\mathfrak{Z}_n$（組み糸群） 20
$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 39

記号索引 (第 II 部)

$\mathbf{1} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[z]}$ (恒等変換) 212

A'_{ij} 300
$\boldsymbol{a}$ 230
Ad (随伴表現) 217
ad (随伴表現) 203
Ad^* (余随伴表現) 218
$\mathfrak{a}^\vee$ (中心化リー代数) 229
$a_i^\pm$ 268
AIII 224
A_{ij} 284
$\alpha!$ 270
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (多重指数) 212
$\hat{\alpha}$ 292
$A_n(\mathbb{K})$ (ワイル代数) 212

B'_{ij} 300
$\mathfrak{b}_-$ 291
$\boldsymbol{b}$ 233
$\tilde{\boldsymbol{b}}$ 233
BDI 233
$\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ 202
B_{ij} 284
$\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}$ 302
$\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}} = \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ 302
$\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{l}} = \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{l}$ 295
$\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{m}$ 302
$\mathfrak{b}_-^{\hat{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{b}_- \cap \hat{\mathfrak{m}}$ 302
b_s 272
$\mathfrak{b}_-^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{b}_- \cap \mathfrak{s}$ 302

$\mathbb{C}$ (複素数体) 190
$\boldsymbol{c}$ 227
C'_{ij} 300
$\mathfrak{c}_0$ 229, 295
$\mathfrak{c}$ 229, 295
χ_s 274
CI 226
C_{ij} 284
$C^\infty_{\chi_s}(N)$ 274
$\mathbb{C}[M_{2,n}]$ 303
C_π (カシミール作用素) 253
$\tilde{\boldsymbol{c}}$ (ケーリー変換) 227
$\mathbb{C}(x)$ (有理関数体) 251

∂^β 213
∂_i 212
Δ ($\mathfrak{g}$ のルート系) 290
$\delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ 292
$\delta(i)$ 212
Δ^- 291
δ_{ij} 193
$\Delta_{\mathfrak{l}}$ ($\mathfrak{l}$ のルート系) 295
$\Delta_{\mathfrak{l}}^-$ 295
$\Delta_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m}$ のルート系) 301
$\Delta_{\mathfrak{m}}^-$ 302
$\Delta_{\hat{\mathfrak{m}}}$ 307
$\Delta_{\hat{\mathfrak{m}}}^+$ 307
$\mathrm{Der}(Q)$ 201
DIII 230
$D^k(\mathfrak{g})$ 208
dL''_X 278
dL'_X 276
$\boldsymbol{D}_{2\ell}^\pm$ 245
$\boldsymbol{D}_{2\ell+1}^\pm$ 247
dR'_X 276

E (オイラー作用素) 273
$\boldsymbol{e}$ 210
$\mathcal{E}$ 204, 205
EIII 234
E_{ij} (行列単位) 284
E_n (単位行列) 193
e_n 243
$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ 201
ε_i 290, 301
$\varepsilon(p)$ 205
$\varepsilon(p)_i$ 195
η_s 278
$\tilde{\mathcal{E}}$ 283
EVII 234
$\exp(v + te)$ 216
$\exp Z$ 215

$\mathcal{F}$ (旗) 209
$f_1(z), f_2(z)$ (基本消滅多項式) 304
$\boldsymbol{F}_{2\ell}$ 247
$\boldsymbol{F}_{2\ell-1}$ 245
f_n 247
$\boldsymbol{F}^{\mathfrak{s}}[\mu]$ 309

$\mathfrak{g}_\gamma$ 290
$GL(n, \mathbb{C})$ (一般線形群) 289
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ (一般線形リー代数) 204
$\mathfrak{gl}(V)$ (——————) 201
$\mathfrak{g}_u$ (コンパクト実型) 221

$H'_i = A'_{ii}$ 301
$\mathfrak{h}_+$ 278
$\mathfrak{h}(B)$ 202
$H_{\mathfrak{c}}$ 296
$\mathfrak{h}$ (カルタン部分代数) 290
$H_i = A_{ii}$ 290
$h_J(\cdot, \cdot)$ 198
$\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ のカルタン部分代数) 301
$\mathfrak{h}^{\hat{\mathfrak{m}}}$ 302
H_π (ハミルトン作用素) 268
$\mathcal{H}_{\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}_-}$ (調和多項式の空間) 311

$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ 291
$(\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}})^*_{\mathbb{R}}$ 302

$I(\kappa)$ 194
$\mathcal{I}m$ (虚部) 198
Im (像) 250
$\mathrm{Ind}_Z^N(\chi_s)$ (誘導表現) 275
ι 211, 226
$\tilde{\iota}$ 228
$I(p)$ 195, 224

J 193
$J = J_\varepsilon$ 197
$\boldsymbol{j}$ 220 234
$\tilde{\boldsymbol{j}}$ 235

$\mathbb{K}$ (可換体) 190
$\mathfrak{k}_0$ 223
Ker (核) 250
$\mathfrak{k}$ 223
$\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}$ 295
$\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}$ 301
$\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{k} \cap \hat{\mathfrak{m}}$ 302
$\mathbb{K}[x]$ (多項式の空間) 201
$\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_n] (= \mathbb{K}[z])$ (————) 212

$\mathfrak{l} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 294
$L_{\mathfrak{g}_0}$ 274
$L'_{\mathfrak{g}_0}$ 275
$L''_{\mathfrak{g}_0}$ 278
$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}(p,q)$ 294
$\lambda_{k,\ell}$ 305
$\hat{\lambda}_{k,\ell}$ 305
$\boldsymbol{L}[\lambda]$ 294
$\boldsymbol{L}^{\mathfrak{l}}[\lambda]$ 299
$\boldsymbol{L}^{\mathfrak{m}}[\lambda]$ 309
$\boldsymbol{L}^{\hat{\mathfrak{m}}}[\hat{\lambda}]$ 309

$\mathfrak{m} = \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})'$ 300
$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{o}^*(2n)$ 300
$\mathfrak{m}_\gamma$ 301
$\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s}$ 300
$M_n(\mathbb{K})$ (n 次正方行列の全体) 204
$M_{p,q}(\mathbb{K})$ ($p \times q$ 行列の全体) 206

$Mp(V)$ (メタプレクティック群) 287

$\mathcal{N}$ (消滅代数) 304
$\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ 202
$N^k(\mathfrak{g})$ 208
$N_r(\mathbb{K})$ (ハイゼンベルグ群) 215
$\mathfrak{n}_r(\mathbb{K})$ (ハイゼンベルグ代数) 211
$\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{n}$ 213, 282
$\tilde{\mathfrak{n}}_0 = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{n}_0$ 282
$\tilde{\mathfrak{n}}(\mu)$ 285
$\tilde{\mathfrak{n}}(V)$ 214
$N(V)$ (ハイゼンベルグ群) 216
$\mathfrak{n}(V)$ (ハイゼンベルグ代数) 210

$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})'$ (直交リー代数) 230
$\mathfrak{o}^*(2n)$ (————) 231
$\mathfrak{o}(\kappa; \mathbb{K})$ (————) 205
$\mathfrak{o}(n)$ (————) 222
$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ (————) 205
$\mathfrak{o}(p,q)$ (————) 205
$\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V, B)$ (———) 205
$\mathcal{O}(V)$ (正則関数の空間) 278
$\tilde{\mathcal{O}}(V)$ 277

$\boldsymbol{P}^{(0)}$, $\boldsymbol{P}^{(1)}$ 289
$\boldsymbol{P}_{(k)}$ 296
$\mathfrak{p}$ 223
$\mathfrak{p}_0$ 223
$\mathfrak{p}_\pm$ 235
Φ 261
$\langle \varphi \rangle_{\mathfrak{q}}$ 307
π^1_λ 247
$\pi(a^\pm)^\alpha$ 270
$\pi_{\mathbb{C}}$ 240
π_λ 244
p_i, q_i 193
$(\mathring{\varpi}'_s, L^2(W'))$ (シュレーディンガー表現) 280

$(\mathring{\varpi}_s, \mathcal{H}(V))$ (フォック表現) 279
$(\varpi_s, \boldsymbol{P})$ 273
$\tilde{\varpi}_{\mathfrak{a}}$ 296
$(\tilde{\varpi}, \boldsymbol{P})$ (ヴェイユ表現) 287
$\boldsymbol{P}_{\ell,m}$ 296
$\mathfrak{p}^{\mathfrak{l}}_\pm := \mathfrak{p}_\pm \cap \mathfrak{l}$ 295
$\boldsymbol{P}_m$ 273
$\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}_\pm = \mathfrak{p}_\pm \cap \mathfrak{m}$ 301

$\mathbb{R}$ (実数体) 190
$R'_{\mathfrak{g}_0}$ 275
$R_{\mathcal{E}}$ 204
$R_{\mathfrak{g}_0}$ 274
ρ_0 269
$\sqrt{-1}$ (虚数単位) 197

$\mathfrak{s}$ 232, 300
$\mathfrak{s}_0$ 232
σ 235
$\Sigma(m)$ 241
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ (特殊線形リー代数) 204
$\mathfrak{sl}(V)$ (————) 204
$\mathfrak{S}_m$ (m 次対称群) 241
$\hat{\mathfrak{S}}_m$ 241
$Sp(V)$ (シンプレクティック群) 197
$\mathfrak{sp}(n)$ (シンプレクティックリー代数) 222
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ (————) 205
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})'$ (————) 227
$\mathfrak{sp}(V) = \mathfrak{sp}(V, B)$ (————) 205
$SU(2)$ (特殊ユニタリ群) 265
$SU(1,1)$ (————) 237
$S(U(1) \times U(1))$ 237
$\mathfrak{su}(h)$ (特殊ユニタリリー代数) 224
$\mathfrak{su}(n)$ (————) 222
$\mathfrak{su}(p,q)$ (————) 224
$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$ 225
$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ (対称行列の空間) 236

$T(\mathfrak{g})$ （$\mathfrak{g}$ のテンソル代数） 254
τ 243
Θ （テータ対応） 312
θ （カルタン対合） 221
tr （トレース） 204

$\mathfrak{u}_-$ 291
$U(\mathfrak{g})$ （$\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数） 254
$\mathfrak{u}(h)$ （ユニタリリー代数） 202
$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{l}} = \mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{l}$ 295
$\mathfrak{u}_-^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{u}_- \cap \mathfrak{m}$ 302
$\mathfrak{u}_-^{\hat{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{u}_- \cap \hat{\mathfrak{m}}$ 302
$\mathfrak{u}(n)$ （ユニタリリー代数） 221
$\mathfrak{u}(p,q)$ （————） 224
Υ（ユプシロン） 256

$\boldsymbol{V}(\lambda)$ 291
$\boldsymbol{V}(\mu)$ 268
$\boldsymbol{V}[\lambda]$ 294
$\boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{l}}}[\lambda]$ 299
$\boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}}[\lambda]$ 309
$\boldsymbol{V}^{\mathfrak{k}^{\hat{\mathfrak{m}}}}[\hat{\lambda}]$ 309
v_α 270, 274
$\boldsymbol{V}_\lambda$ 244
$\boldsymbol{V}_\lambda^1$ 247
$V_{\mathbb{R}}$ 197

$W^\perp$ （直交部分空間） 191

(X_+, H, X_-) （標準トリプル） 204
X^* 221
$X_e^\pm$, $X_o^\pm$ 227
$(X_{\mathfrak{s},+}, H_{\mathfrak{s}}, X_{\mathfrak{s},-})$ 232, 302

$\mathbb{Z}$ （整数環） 243
z^α （単項式） 212
$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ （$\mathfrak{g}$ の中心） 203
$z_i = m(z_i)$ 212
$Z(x,y,t)$ 211

事項索引

ア　行

アファイン変換群　63
誤り訂正機構　41

一径数部分群　71, 103, 159
1-コサイクル　56
1 次形式　191
1 次変換　191
一葉双曲面　37, 281
一般線形群　11, 24
一般線形リー代数　201, 204
イデアル (リー代数の)　200
岩澤部分群　237

V 上への表現　88
ウェイト　74, 243, 291
ウェイト空間　291
ウェイトベクトル　79, 243, 291
ヴェイユ表現　287
上半平面　151
ヴォーガン図形　220
運動　35, 118
運動群　35

エーテル理論　119
n 次交代群　5, 18
n 次対称群　3
$(n\ d)$ 部分空間　40
エルミート型　173
エルミート型リー代数　224
エルミート形式　198
エルミート対称空間　237
エルミート内積　52, 173, 198

オイラー角　71
オイラー作用素　273
重さ k の保型形式　155

カ　行

回転群　50, 68
可解リー代数　209
可換子環　55
可換体　190
可換リー代数　203
角運動量　142
拡大 (リー代数の)　213
拡張 (表現の)　282
加群 (リー代数上の)　238
掛け算作用素　64, 212
カシミール元　160, 254
カシミール作用素　254
括弧積　88, 200
加法定理　109
絡み糸　22
ガリレイの相対性　118
ガリレイ変換　118
カルタン対合　129, 221
カルタン部分代数　290
カルタン分解　127, 221, 223
関数への作用　44
慣性系　116, 123
完全可約　309
完備性　80

奇置換　5
軌道　35
軌道角運動量　142
軌道理論　281
基本関係式　5, 18, 19
基本消滅多項式　304
基本領域　155
既約　47
既約指標　110
既約表現　107, 239
既約分解　68, 99, 101, 157
球主系列表現　244
球的でない主系列表現　247
球面調和関数　70
行基本変形　304
共変性　94
共変である　136, 141
共役作用素　54
共役表現　173
共役変換　129
行列表現　24, 31, 88
行列要素　47, 108, 179
強連続性　47
局所同型　92
極大コンパクト部分群　132
極大コンパクト部分リー代数　223
$(K$-$)$ 許容的　243
許容的表現　243

偶置換　5
組み糸, 組み糸群　20
クライン-ゴルドン方程式　137
クレブシュ-ゴルダンの係数　112
クロネッカーのデルタ　193
群　28
群の線形表現　24, 46
群符号　40

K-スペクトル　157
k 面体群　26
結合代数　201
ケーリー変換　169, 227

降演算子　78, 244
交換子積　60
光錐　37, 281
光速度不変の原理　123
交代性　200
恒等置換　4
互換　4

コーシー-リーマンの方程式 166, 278
固定部分群 35
古典リー代数 206
固有関数 62
固有値, 固有空間 62
固有ローレンツ群 37, 127, 281
コリオリの力 117
根基 210
コンパクト実型 222

サ 行

最高ウェイト 74
最低ウェイト 291
最低ウェイトベクトル 291
佐武図形 220
作用する 28, 35, 153
三角型分解 235

自己共役 61
辞書式順序 291
指数行列 215
次数作用素 273
指数写像 89, 128, 216, 289
自然な実型 219
自然表現 88, 240
実型 (複素リー代数の) 219
指標 11, 47, 110
射影作用素 54
射影線形群 13
射影表現 13, 14
弱連続性 47
斜交基底 193
斜交形式 192
斜交線形空間 192
斜交リー代数 205
シュアの補題 51, 250
シュア-ワイル理論 241
重複度自由 294
主系列表現 57
シュレーディンガー作用素 61
シュレーディンガーの描像 59
シュレーディンガー表現 280
シュレーディンガー方程式 62
シュワルツの不等式 53
巡回置換 4
純組み糸群 21
準正則表現 68
準同型写像 (表現の) 240
準同型写像 (リー代数の) 202
準不変である 56
純ローレンツ変換 121
昇演算子 78, 244
商表現 239
消滅代数 304
消滅多項式 304
シルヴェスタの慣性法則 195, 199
シンプレクティック基底 193
シンプレクティック群 167, 197
シンプレクティック形式 192
シンプレクティック線形空間 192
シンプレクティック変換 197
シンプレクティックリー代数 205

推移的 35
水素原子 32, 81
随伴表現 93, 203, 217
スカラー作用素 250
ストーン-フォン・ノイマンの定理 280
スピノル 133, 135
スピン角運動量 86, 143

正規 53
正規直交基底 53, 194
正準交換関係 212
生成元系 5, 18
正則な表現 133
正則表現 157
正則離散系列 172
正多面体 24
正定値 52, 111, 125, 198
正定値エルミート形式 198
線形形式 191
線形作用素 52
線形写像 190
線形表現 11, 46
線形変換 191
線形リー群 93
尖点 154
全等方部分空間 195
全非斉次ローレンツ群 124
前ヒルベルト空間 52
全ポアンカレ群 124

双 1 次形式 191
双 1 次写像 191
相関作用素 48, 97, 240
双曲的回転 121
双スピノル 135
双対 (可換群の) 47
双対空間 47, 54, 191
素体 39

タ 行

対応原理 60
体球関数 70
対合的 129, 221
対称 (線形作用素が) 54
対称性の群 32, 63
対称双 1 次形式 191
対称テンソル 135
対称な内積 52
代数学の基本定理 194
対数写像 91
代数閉体 194
互いに素 (置換が) 4
高々可算次元 250
多元環 201
多重指数 212
多様体 201
ダランベルシアン 138
短完全系列 246
単純置換 5
単純リー代数 206
断面 152

置換の符号 5
置換表現 11, 23
忠実である 35
中心 (リー代数の) 203

中心拡大　13
中心化リー代数　229
中心指標　279
中心値 (既約表現の)　252
調和多項式　70, 310, 311
直積群　28
直和 (加群の)　239
直和 (表現の)　239
直和 (リー代数の)　203
直交　53
直交関係　84
直交基底　53, 194, 261
直交射影　53
直交部分空間　191
直交補空間　53
直交リー代数　205

定常状態　62
ディラックのガンマ行列　137
ディラックハミルトニアン　138
ディラック方程式　135, 137
ディンキン図形　207
θ-安定 (—な実型)　223
テータ対応　312
デュアルペア　229
電子軌道　81
電磁誘導　119
テンソル積　111
テンソル積空間　241
テンソル積表現　111, 241, 311
テンソル代数　254

同型 (加群の)　240
同型 (リー代数の)　202
同型写像 (表現の)　240
同型写像 (リー代数の)　202
動径方程式　67, 81
同時固有空間　99
同値 (表現の)　47, 240
導来イデアル　208
特殊線形群　24
特殊線形リー代数　204
特殊相対性の原理　123
特殊相対性理論　123
特殊ユニタリリー代数　224
トレース　12, 110, 204

ナ　行

内部自己同型　17

二面体群　22
ニュートンの運動法則　115
ニュートンの運動方程式　115
ニュートンポテンシャル　75
ニュートン力学　115
二葉双曲面　37, 281
認容的表現　268

ハ　行

ハイゼンベルグ群　216
ハイゼンベルグ代数　211
ハイゼンベルグの交換関係　212
ハイゼンベルグの描像　60
ハウ対応　312
パウリ行列　87, 88
パウリ方程式　94
はしご表現　288, 298, 312
旗 (線形空間の)　209
波動関数　32, 82
バーマ加群　249
ハミルトン関数　59
ハミルトン作用素　59, 268
ハリシュ-チャンドラ加群　243
反正則な表現　133
反正則離散系列　172
反対称 (交代) 双 1 次形式　191
反対称テンソル　135
半単純リー代数　206
半直積 (群の)　216
半直積 (リー代数の)　213
半直積群　29, 147

非斉次ローレンツ群　38
非退化エルミート形式　198
非退化双 1 次形式　191
被覆写像　91, 132
微分 (分配的代数上の)　201
非ユークリッド空間　37, 38
表現 (群の)　11
表現 (リー代数の)　238
表現行列　191, 204
表現群　13, 14
表現作用素　148, 239
表現の指標　110
表現のテンソル積　111
標準基底　79
標準トリプル　204
ヒルベルト空間　52, 279

フォック空間　279
フォック表現　274, 279
フォックモデル　280
復号化写像, 復号化行列　40
複素化 (実リー代数の)　219
複素化 (表現の)　240
複素カルタン分解　223
複素共役作用素　235
符号 (エルミート形式の)　199
符号 (実対称双 1 次形式の)　195
フーコーの振り子　117
部分加群　239
部分商表現　177
部分表現　239
部分表現定理　249
部分リー代数　200
不変測度　153
不変である　47, 56, 136
普遍展開環 (普遍包絡代数)　97
不変な内積　259
不変にする　62
普遍被覆群　39, 93, 131
不変複素構造　234
不変部分空間　239
普遍包絡代数 (普遍展開環)　254
プランク定数　58, 280
プランシュレルの公式　157
プリンキピア　75
不連続的に　153
分解可能　133
分数変換　12
分配的代数　201

冪零リー代数　209

ベクトル場　201
変換公式 1　46
変換公式 2　56
変換公式 3　148
偏極化　281
偏微分作用素　212

ポアッソン積分　80
ポアッソンの括弧式　59
保型因子　154
保型関数　154, 163
保型形式　154
補系列表現　178, 264
ボレル部分代数　291, 295, 302

マ　行

マイケルソン-モーリーの実験　120

無限小形　75, 175
無限小指標　158, 254
無限小生成元　76
結び糸　21

モデュラー群　155

ヤ　行

ヤコビ恒等式　200
有界線形作用素　54
誘導する　147
誘導表現　147, 174, 275
有理関数体　251
ユークリッド運動群　50, 118
ユニタリ　33
ユニタリ化可能　173, 259
ユニタリ軸　264
ユニタリ双対　281
ユニタリ同値　57, 260
ユニタリ表現　50, 52, 55
ユニタリ表現 (リー代数の)　259
ユニタリ表現の無限小形　161
ユニタリリー代数　221

余随伴軌道　218
余随伴表現　218

ラ　行

ラグランジュ部分空間　195
ラゲール多項式　83
ラドン-ニコディムの微分　56
ラプラシアン　66
ラプラス-ベルトラミ作用素　66

リー環 (リー代数)　76, 95, 132, 200
リー環の表現　77, 102
離散系列の極限　178, 264
離散系列表現　157, 248
リー代数 (リー環)　76, 95, 132, 200
リーマン対称空間　237
量子化　60
量子力学　280

ルジャンドル関数　109
ルート　290, 295, 301
ルート空間分解　206, 290, 295
ルート系　290, 295, 301
ルートベクトル　290, 301

例外型リー代数　207
列基本変形　304
レビ分解　210
連続系列の表現　157
連続線形作用素　54

ローレンツ群のリー環　128
ローレンツ収縮　120

ワ　行

歪エルミート行列　221
歪エルミート変換　260
ワイル代数　212

著者略歴

平井　武（ひらい・たけし）

1936 年　兵庫県に生まれる

1961 年　京都大学理学研究科数学専攻修士課程修了

京都大学理学部助教授，京都大学大学院理学研究科教授などを経て，

現　在　京都大学名誉教授

主　著　『線形代数と群の表現 I，II』（朝倉書店）

山下　博（やました・ひろし）

1959 年　京都府に生まれる

1987 年　京都大学大学院理学研究科数学専攻博士課程修了

京都大学理学部助手，北海道大学大学院理学研究科助教授を経て，

現　在　北海道大学大学院理学研究科教授

表現論入門セミナー

2003 年 11 月 13 日　初版 第 1 刷発行

定価はカバーに
表示しています

著　者　平井 武・山下 博

発行者　西原昌幸

発行所　遊 星 社

164-0001 東京都中野区中野 3 丁目 50-1

電話 (03)3381-5914　振替 00140-5-137657

発売元　星 雲 社

112-0012 東京都文京区大塚 3 丁目 21-10

電話 (03)3947-1021　Fax(03)3947-1617

検印省略

印刷・製本＝平河工業社　　ISBN4-7952-6898-3